Pro Mathematica Vol. XVIII, Nos. 35-36, 2004

EL MODELO DE BLACK-SCHOLES

Jorge Richard Chávez Fuentes

Resumen

Se presenta el modelo de Black-Scholes, a través del más popular de los contratos financieros, esto es, la opción de compra europea. Se establece la fórmula de valuación martingala para reclamos contingentes en general y se muestra una aplicación de ella mediante la obtención del precio del contrato call. Al final se establece también la ecuación de Black-Scholes, que es una ecuación diferencial parcial no lineal de segundo orden, y que constituye una forma alternativa para la preciación de activos derivados.

Sección Matemática, Departamento de Ciencias, PUCP

Palabras Claves
Proceso de Wiener, proceso martingala, bono, stock, portafolio de inversiones, autofinanciamiento, reclamo contingente, arbitraje, fórmula de Itô.

Introducción

En el presente artículo hacemos una breve exposición del modelo de Black-Scholes. Nuestro interés principal radica en explicar rápidamente en qué consiste el modelo y por ello presentamos una versión simplificada del mismo. Así por ejemplo, trabajamos con una integral de Itô definida sobre el espacio $\mathcal{H}^2_{\mathcal{T}}$ y no sobre el más amplio $\mathcal{L}^2_{\mathcal{T}}$, lo que nos permite liberar al modelo de oportunidades de arbitraje. No abordamos tampoco el problema teórico de la completitud de los mercados, es decir, el problema de la existencia de estrategias replicantes para contratos contingentes, pues en nuestro caso particular ella es construida explícitamente dentro del proceso de obtención de la ecuación de Black-Scholes. De otro lado, tanto la tasa de interés del mercado cuanto los coeficientes que definen el precio del stock son considerados como constantes dentro del modelo.

A pesar de las simplificaciones aludidas, nuestro trabajo es matemáticamente formal con el uso inevitable del cálculo estocástico, más específicamente del cálculo de Itô. La teoría de la integración estocástica de Itô es presentada en muchos textos; por ejemplo podríamos citar algunos pocos: Stochastic Calculus and Financial Application de Steele, Stochastic Differential Equation and Application de Friedman, Brownian Motion and Stochastic Calculus de Karatzas and Shreve. Bueno pues, comencemos nuestra escursión.

1. Sobre el Bono y el Stock

Sea $T > 0$ un número real fijo. El intervalo $\mathcal{T} = [0, T]$ representará el intervalo de tiempo a lo largo del cual se desarrolla el fenómeno económico que describimos en este artículo. El mercado financiero estará representado por la tupla $(\Omega, \mathcal{F}, P, F, \mu, \sigma, r)$ donde $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de probabilidad completo y $F = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}$ es una filtración de dicho espacio. Los distintos estados del mercado están representados por el conjunto Ω, $\mathcal{F}$ es la familia de eventos y P es la medida de probabilidad, que representa la percepción común compartida por todos los agentes del mercado acerca de la evolución de éste. La filtración F modela la información que se va acumulando a medida que transcurre el tiempo. Por ejemplo, en el instante $t \in \mathcal{T}$ los agentes económicos disponen del paquete de información $\mathcal{F}_t \in F$ y, entonces, la historia completa del mercado desde el inicio hasta el momento actual es observada en dicho instante. Los términos μ, σ y r son parámetros del modelo que están relacionados con el sistema de precios $\overline{S}$, que enseguida describimos. Antes de esto, mencionemos que la incertidumbre del mercado está generada por la presencia de un proceso de Wiener con valores en $\mathbb{R}$, que se manifiesta en el precio del stock.

El modelo de Black-Scholes (en adelante simplemente el modelo B-S) considera dos activos básicos: el bono, que representamos con la letra B, y el stock, que representamos con la letra S. Estos activos financieros son aquellos en base a los cuales se generan las transacciones financieras del mercado, así como también en base a los cuales se determina el precio de los distintos productos financieros, conocidos como derivados financieros.

El precio del bono en el instante t, $B(t)$, evoluciona con el tiempo según la ecuación diferencial ordinaria

$$\left\{ \begin{array}{l} dB(t) = rB(t)dt \\ B(0) > 0 \end{array} \right. \tag{1}$$

donde r es una constante positiva que representa la tasa de interés del mercado. La solución de (1) es $B(t) = B(0)e^{rt}$, donde $B(0)$, la condición inicial, es un monto inicial depositado o pedido prestado de una cuenta monetaria. Algunos autores le llaman a este activo cuenta monetaria de mercado, reservando el término bono, mas bien, para un tipo de contrato financiero que promete un pago seguro en una fecha futura, como los bonos que emiten los estados por ejemplo. Nosotros seguiremos usando el término bono por ser una expresión más simple y de un uso igualmente extendido en la literatura.

La dinámica del precio del stock está descrita por la ecuación diferencial estocástica

$$\left\{ \begin{array}{l} dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \\ S(0) > 0 \end{array} \right. \tag{2}$$

donde los coeficientes μ y $\sigma > 0$ son constantes y $S(0)$, el precio inicial del stock, es una variable aleatoria cuadrado integrable e independiente del proceso de Wiener W.[1] Si dividimos esta ecuación por $S(t)$ obtenemos la expresión

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t) \tag{3}$$

a partir de la cual podemos hacer una interpretación intuitiva de los coeficientes μ y σ. El cociente $dS(t)/S(t)$ puede entenderse como la tasa de rentabilidad instantánea de una inversión en stocks, de donde, tomando esperanzas a ambos lados de (3), esta ecuación nos estaría indicando que μ es el valor esperado de esta tasa de rentabilidad instantánea y σ su variabilidad.

Se sabe que la (única) solución de (2) es el proceso definido por

$$S(t) = S(0)exp\left[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)\right], \ t \in \mathcal{T} \tag{4}$$

conocido como proceso geométrico de Wiener. Esta forma especial del precio del stock parece haber sido introducida por primera vez por el economista Samuelson (ver [10]), en 1965, y es incorporada luego por Black y Scholes en su artículo [1] de 1973, donde publican su famosa fórmula que establece el precio de una opción europea.[2] Este modelo para el precio del stock está basado en la hipótesis de que en promedio el stock se comporta como un bono, pero posiblemente con una tasa de interés $\widetilde{\mu} = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)$ superior a la de aquel, como una suerte de compensación a la inversión de riesgo. El problema de un modelo adecuado para el precio del stock ha sido largamente estudiado desde la década de 1960, como bien nos lo hacen saber Musiela y Rutkowski en [8], citando una larga lista de referencias adecuadas para el lector interesado en este asunto. Nosotros, por supuesto, seguimos la tendencia establecida por el modelo B-S.

Antes de finalizar esta sección, mencionemos algunas hipótesis adicionales del modelo de B-S. En cuanto al stock, se supone que no paga dividendos a lo largo del horizonte de tiempo $\mathcal{T}$, y en cuanto a las

[1] Esta condición sobre S(0) se impone para asegurar la existencia de la solución de la ecuación (2) (ver [5])

[2] Por este trabajo Scholes ganó el premio Nobel de economía de 1995. Para entonces, Black ya había dejado de existir.

transacciones financieras se asume que no están sujetas a ninguna tasa impositiva, que no generan costos de transacción y que pueden realizarse infinitamente sin ninguna limitación. A veces todas estas condiciones se resumen diciendo simplemente que el mercado está libre de fricciones.

2. Portafolios y Reclamos Contingentes

Definición 2.1. *Un portafolio de inversiones $\overline{\theta}$ es un par (α, β) de procesos estocásticos adaptados (a la filtración F) y medibles tales que*

$$P\left(\int_0^t |\alpha(u)|du < +\infty\right) = 1 \quad \wedge \quad E\left(\int_0^t |\beta(u)|^2 du\right) < +\infty \tag{5}$$

Un portafolio de inversiones, o simplemente un portafolio, también se llama estrategia de inversiones. Para cada par (ω, t) en $\Omega \times \mathcal{T}$, $\overline{\theta}(\omega, t) = (\alpha(\omega, t), \beta(\omega, t))$ representa la posición del inversionista en el estado ω y en el instante t. Concretamente $\alpha(\omega, t)$ y $\beta(\omega, t)$ representan la cantidad de unidades del bono y el stock que el inversionista posee en dicha posición. Las condiciones de integrabilidad (5) se imponen para que tengan sentido las integrales involucradas con los procesos α y β respectivamente. En particular, la segunda condición define el espacio $\mathcal{H}^2_{\mathcal{T}}$ de procesos adaptados y medibles sobre el cual trabajamos la integral de Itô (ver [9])

Definición 2.2. *El valor del portafolio $\overline{\theta}$, que denotamos por $V_{\overline{\theta}}$, se define en todo instante t como el producto interno de $\overline{\theta}(t)$ por el sistema de precios $\overline{S} = (B(t), S(t))$:*

$$V_{\overline{\theta}}(t) = \overline{\theta}(t) \cdot \overline{S}(t) = \alpha(t)B(t) + \beta(t)S(t) \tag{6}$$

En lo que sigue suprimiremos el subíndice $\overline{\theta}$ de la expresión $V_{\overline{\theta}}$, dándose por entendido que $V(t)$ alude al valor del portafolio $\overline{\theta}$ en el instante t.

Definición 2.3. *Se dice que el portfolio $\overline{\theta}$ es autofinanciado si para cada $t \in \mathcal{T}$ se cumple*

$$V(t) = V(0) + \int_0^t \alpha(u)dB(u) + \int_0^t \beta(u)dS(u) \tag{7}$$

La forma diferencial de esta ecuación integral es

$$\begin{aligned} dV(t) &= \alpha(t)dB(t) + \beta(t)dS(t) \\ &= (\alpha(t), \beta(t)) \cdot (dB(t), dS(t)) \\ &= \overline{\theta}(t)d\overline{S}(t) \end{aligned}$$

La última igualdad, $dV(t) = \overline{\theta}(t)d\overline{S}(t)$, se conoce como la condición de autofinanciamiento y expresa la idea intuitiva de que el valor instantáneo de un portafolio autofinanciado sólo puede modificarse como consecuencia de un cambio instantáneo en el sistema de precios $\overline{S}$. Esto implica que después de la inversión inicial, $V(0)$, para la puesta en marcha de la estrategia $\overline{\theta}$ no está permitido ni el ingreso ni la salida neta de capital del portafolio. La estrategia misma va generando su propia riqueza y es esta la razón por la cual se dice que ella es autofinanciada.

Definición 2.4. *Un reclamo contingente europeo, o un T reclamo contingente, es un contrato financiero que tiene una función de pago aleatoria Y sobre Ω que se hace efectiva en el momento de maduración T del contrato.*

Representamos este contrato financiero por su función de pago Y, y por razones técnicas se exige que ella sea $\mathcal{F}_T$ −medible, así como P−integrable[3]. Nótese en particular que la condición de que Y sea $\mathcal{F}_T$ −medible nos está indicando que en el instante $t = T$ el valor del contrato Y es completamente conocido.

El ejemplo típico de un T−reclamo contingente es la opción de compra (o de venta) europea. Este contrato se establece sobre el stock y deriva de él su precio.

Contrato Call (European call-option). Una Opción de compra europea es un contrato financiero que le da a su poseedor (titular) el derecho, mas no la obligación, de comprar una unidad del stock al precio de contrato K (también llamado precio de ejercicio) en el momento de maduración T del contrato.

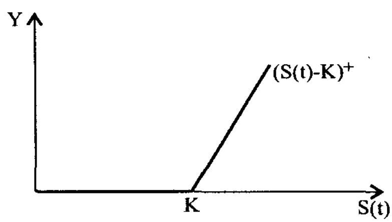
Se específica que la opción es europea para distinguirla de la americana (y de otras opciones llamadas exóticas) que pueden ser ejercidas en cualquier instante t del horizonte $\mathcal{T}$.

[3]Las razones técnicas de estas exigencias se aclaran más adelante.

Si $S(T) > K$ la opción será ejercida, pues le generará a su titular una ganancia equivalente a $Y = S(T) - K$. Efectivamente, en el instante T el titular de la opción adquirirá una unidad del stock al precio de ejercicio K y en ese mismo instante podrá venderlo al precio de mercado $S(T)$ quedándose con la diferencia $S(T) - K$. Por el contrario, si $S(T) \leq K$ entonces no se ejercerá la opción, pues en este caso ella no producirá ningún beneficio a su titular. La opción, entonces, fenece sin valor, es decir, $Y = 0$. La función de pago de un contrato Call es pues

$$Y = (S(T) - K)^+ = max\{(S(T) - K), 0\}$$

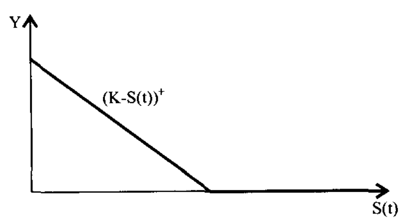
y su gráfica es



La opción de venta europea (European put-option) es completamente análoga al contrato Call, pero en este caso el derecho del titular consiste en vender, y no en comprar, una unidad del stock a quien escribe o lanza el contrato. La función de pago de un contrato Put es

$$Y = (K - S(T))^+ = max\{(K - S(T)), 0\}$$

y su gráfica es



Definición 2.5. *Un portafolio replicante del contrato Y es un portafolio $\overline{\theta}$ autofinanciado que cumple la igualdad*

$$P(V(T) = Y) = 1$$

El portafolio $\overline{\theta}$ replica al contrato Y cuando alcanza el valor del contrato en el momento de maduración T. Nótese que para que esta definición tenga sentido debe exigirse que Y sea $\mathcal{F}_T-$ medible.

Definición 2.6. *Sea $\overline{\theta}$ un portafolio autofinanciado. Se dice que $\overline{\theta}$ es un portafolio de arbitraje, o que es una oportunidad de arbitraje, si satisface las siguientes condiciones*
1. $V(0) = 0$
2. $V(T) \geq 0 \quad \wedge \quad P(V(T) > 0) > 0$

Un portafolio de arbitraje es una estrategia de negocio que permite generar dinero con cierta chance a partir de una riqueza inicial nula. En términos del lenguaje económico diríase que tal estrategia es un perfecto lonche gratis. Puede verse un ejemplo de tal portafolio, dentro de un modelo general de B-S, en [9], pág. 148.

Evidentemente los portafolios de arbitraje deben ser evitados por el modelo teórico, pues la práctica real del mercado no soporta tales estrategias. Por esto, se impone distinguir una categoría especial de portafolios que no generen oportunidades de arbitraje. Tales portafolios se llaman admisibles o más exactamente se dice que un portafolio $\overline{\theta}$ autofinanciado es admisible si su proceso de valor descontado, $V^*(t) = e^{-rt}V(t)$, es un proceso martingala respecto a cierta medida de probabilidad Q[4]. En la siguiente sección se muestra que, dentro del modelo de B-S que estamos desarrollando, todo portafolio $\overline{\theta}$ autofinanciado es admisible, en otras palabras, nuestro mercado está libre de arbitraje.

3. La Medida Martingala

Debido al teorema de Guirsanov, sabemos que bajo la medida de probabilidad Q, que tiene por densidad

$$\frac{dQ}{dP} = exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(r-\mu)^2}{\sigma^2}T + \frac{r-\mu}{\sigma}W(T)\right]$$

el proceso

[4] Ver [8]

$$\widetilde{W}(t) = W(t) - \frac{r-\mu}{\sigma}t, \quad t \in \mathcal{T} \tag{8}$$

es también un proceso de Wiener con respecto a la filtración F y la nueva medida de probabilidad Q. Pues bien, resulta que esta medida de probabilidad Q torna al precio descontado del stock en un proceso martingala, razón por la cual la medida Q se conoce como medida martingala, veamos.

Proposición 3.1. *Si $S^*(t) = e^{-rt}S(t)$ es el precio del stock, descontado a la tasa de interés r, entonces $S^*(t)$ es un proceso martingala (respecto a F y Q)*

Prueba. Puesto que $dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$, entonces, debido a la fórmula de Itô, tenemos

$$\begin{aligned}
dS^*(t) &= d(e^{-rt}S(t)) \\
&= -re^{-rt}S(t)dt + e^{-rt}dS(t) \\
&= -re^{-rt}S(t)dt + e^{-rt}\Big(\mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)\Big) \\
&= S^*(t)\Big[(\mu - r)dt + \sigma dW(t)\Big]
\end{aligned}$$

y reemplazando dW por $d\widetilde{W} + \dfrac{r-\mu}{\sigma}dt$ se tiene

$$\begin{aligned}
dS^*(t) &= S^*(t)\Big[(\mu - r)dt + \sigma d\widetilde{W}(t) + (r-\mu)dt\Big] \\
&= S^*(t)\sigma d\widetilde{W}(t)
\end{aligned}$$

de donde, por ser $\widetilde{W}$ un proceso de Wiener (respecto a F y Q), entonces S^* es un proceso martingala en tanto que es una integral estocástica de Itô □

Proposición 3.2. *Si $\overline{\theta}$ es un portafolio autofinanciado, entonces su valor descontado $V^*(t) = e^{-rt}V(t)$, es un proceso martingala (respecto a F y Q)*

Prueba. Igual que en la prueba de la proposición anterior, haciendo uso de la fórmula de Itô, tenemos

$$
\begin{aligned}
dV^*(t) &= d(e^{-rt}V(t)) \\
&= -re^{-rt}V(t)dt + e^{-rt}dV(t) \\
&= -re^{-rt}\Big(\alpha(t)B(t) + \beta(t)S(t)\Big)dt + \\
&\quad e^{-rt}\Big(\alpha(t)dB(t) + \beta(t)dS(t)\Big) \\
&= -re^{-rt}\Big(\alpha(t)B(t) + \beta(t)S(t)\Big)dt + \\
&\quad e^{-rt}\Big(\alpha(t)rB(t)dt + \beta(t)dS(t)\Big) \\
&= -re^{-rt}\beta(t)S(t)dt + e^{-rt}\beta(t)dS(t) \\
&= \beta(t)d(e^{-rt}S(t)) \\
&= \beta(t)dS^*(t) \\
&= \beta(t)\sigma S^*(t)d\widetilde{W}(t)
\end{aligned}
$$

La última ecuación, $dV^*(t) = \beta(t)\sigma S^*(t)d\widetilde{W}(t)$, por la misma razón anterior muestra que el proceso V^* es un proceso martingala $\square$

Proposición 3.3. *Si $\overline{\theta}$ es un portafolio autofinanciado, entonces él no puede generar oportunidades de arbitraje*

Prueba. Partamos suponiendo lo contrario, es decir, que $\overline{\theta}$ genera oportunidades de arbitraje. Por lo tanto
1. $V(0) = 0$
2. $e^{-rT}V(T) \geq 0 \quad \wedge \quad Q(e^{-rT}V(T) > 0) > 0$
donde estamos utilizando el hecho de que P y Q son medidas de probabilidad equivalentes (ver [9]).

Como $\overline{\theta}$ es autofinanciado, entonces por la proposición anterior, su proceso de valor descontado, $V^*(t) = e^{-rt}V(t)$, es un proceso martingala. De aquí, denotando la esperanza con respecto a Q por E^* (como es usual en la literatura) y aplicando propiedades de la esperanza condicionada, tenemos

$$E^*(V^*(T)) = E^*(E^*(V^*(T)|\mathcal{F}_o)) = E^*(V^*(0)) = E^*(V(0)) = 0$$

es decir,

$$E^*(e^{-rT}V(T)) = 0$$

Pero esta última igualdad contradice la condición (2) de arriba, y por lo tanto $\overline{\theta}$ no puede generar oportunidades de arbitraje □

4. Valuación Martingala

Dado el contrato Y, ¿cuál es el precio justo que éste debiera tener? De lo que se trata por supuesto es de encontrar un precio o valor del contrato que calce bien para ambas partes, tanto para el lanzador cuanto para el comprador del mismo.

Para analizar esta cuestión, veamos las cosas por un momento desde la perspectiva de quien lanza el contrato. Como en el instante de maduración T la obligación Y debe ser satisfecha, entonces el lanzador intentará cubrirse, es decir, protegerse frente a cualquier eventualidad con un portafolio $\overline{\theta}$ que alcance el valor del contrato Y en el instante de maduración T. Es decir, construirá un portafolio replicante $\overline{\theta}$ tal que

$$P(V(T) = Y) = 1$$

Por consiguiente, el precio que fijará el lanzador del contrato será lo mínimo necesario para echar a andar tal estrategia replicante. Es decir, el precio del contrato Y en el instante t deberá ser igual al valor del portafolio replicante $\overline{\theta}$ en ese instante. Por otro lado, es claro que el futuro titular del contrato Y no pagará más de tal cantidad. Así pues, si $\overline{\theta}$ es un portafolio replicante del contrato Y y V es su proceso de valor, entonces el precio del contrato Y estará dado por

$$p(t) = V(t), \quad t \in \mathcal{T}$$

y como V^* es un proceso martingala (respecto a F y Q), entonces

$$e^{-rt}V(t) = V^*(t) = E^*(V(T)|\mathcal{F}_t)$$

de donde

$$V(t) = E^*(e^{rt}V^*(T)|\mathcal{F}_t)$$

con lo que finalmente se tiene

$$p(t) = V(t) = E^*(e^{-r(T-t)}Y|\mathcal{F}_t) \tag{9}$$

Notar que la fórmula (9) implica que si dos portafolios $\overline{\theta}_1$ y $\overline{\theta}_2$ autofinanciados replican el mismo contrato Y, entonces ellos tienen el mismo proceso de valor. Notar además, que es necesario exigir que la variable aleatoria Y sea Q integrable, para que tenga sentido la fórmula de valuación expresada en (9).

Aplicación. La ecuación (9) que hemos obtenido es conocida en la literatura como fórmula de valuación martingala. Apliquemos esta fórmula para calcular el precio del contrato Call. A partir del precio del stock dado en (4) se tiene

$$lnS(T) = lnS(0) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W(T)$$

y para $t < T$

$$lnS(t) = lnS(0) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)$$

Así pues,

$$lnS(T) - lnS(t) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma(W(T) - W(t))$$

o también

$$S(T) = S(t)exp\left[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma(W(T) - W(t))\right] \tag{10}$$

Ahora bien, de la ecuación (8) de la sección anterior tenemos

$$W(t) = \widetilde{W}(t) + \frac{(r-\mu)}{\sigma}t$$

y reemplazando en (10) conseguimos

$$S(T) = S(t)exp\left[(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t) + \sigma(\widetilde{W}(T) - \widetilde{W}(t))\right] \tag{11}$$

Haciendo $\widetilde{r} = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)$, $\widetilde{t} = T - t$ y $Z = \dfrac{\widetilde{W}(T) - \widetilde{W}(t)}{\sqrt{\widetilde{t}}}$, la ecuación (11) queda

$$S(T) = S(t)exp(\widetilde{r}\,\widetilde{t} + \sigma\sqrt{\widetilde{t}}Z)$$

donde, dada la información actualmente disponible $\mathcal{F}_t$ y bajo la medida de probabilidad Q, Z es una variable normal estándar: $Z \sim N(0,1)$. Por consiguiente, el precio del contrato Call, según la fórmula de valuación martingala (9), es

$$p(t) = e^{-r\widetilde{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[S(t)exp(\widetilde{r}\,\widetilde{t} + \sigma\sqrt{\widetilde{t}}z) - K\right]^{+} \varphi(z)dz \tag{12}$$

donde φ es la densidad de la variable aleatoria Z, esto es,

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Lo que resta por delante son cuentas rutinarias para calcular $p(t)$. Continuemos entonces.

El integrando de (12) desaparece cuando

$$S(t)exp(\widetilde{r}\,\widetilde{t} + \sigma\sqrt{\widetilde{t}}z) < K$$

o, equivalentemente, cuando

$$lnS(t) + \widetilde{r}\,\widetilde{t} + \sigma\sqrt{\widetilde{t}}z < lnK$$

lo que es cierto si y sólo si

$$z < \frac{ln(\frac{K}{S(t)}) - \widetilde{r}\,\widetilde{t}}{\sigma\sqrt{\widetilde{t}}} = z_\circ$$

Por consiguiente la integral (12) puede ser escrita como

$$
\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} \left[S(t) exp(\widetilde{r}\ \widetilde{t} + \sigma\sqrt{\widetilde{t}} z) - K \right]^{+} \varphi(z) dz \\
= & \int_{z_\circ}^{+\infty} S(t) exp(\widetilde{r}\ \widetilde{t} + \sigma\sqrt{\widetilde{t}} z) \varphi(z) dz - K \int_{z_\circ}^{+\infty} \varphi(z) dz \\
= & \frac{S(t) exp(\widetilde{r}\ \widetilde{t})}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_\circ}^{+\infty} exp\left[\sigma\sqrt{\widetilde{t}} z - \frac{1}{2} z^2 \right] dz - K \int_{-\infty}^{-z_\circ} \varphi(z) dz \\
= & \frac{S(t) exp(\widetilde{r}\ \widetilde{t})}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_\circ}^{+\infty} exp\left[-\frac{1}{2}(z - \sigma\sqrt{\widetilde{t}}\ )^2 + \right. \\
& \left. \frac{1}{2}\sigma^2 \widetilde{t} \right] dz - KN(-z_\circ) \\
= & S(t) exp(r\widetilde{t}) \int_{z_\circ}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}(z - \sigma\sqrt{\widetilde{t}}\ )^2 \right] dz - KN(-z_\circ)
\end{aligned} \tag{13}
$$

donde la expresión $N(-z_\circ)$ representa la distribución acumulada de Z hasta $z_\circ$ y el integrando $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ exp\left[-\frac{1}{2}(z - \sigma\sqrt{\widetilde{t}}\ )^2 \right]$ no es otra cosa que la densidad de la variable aleatoria $Z' \sim N(\sigma\sqrt{\widetilde{t}}, 1)$. Normalizando Z', esto es, haciendo $z' = z - \sigma\sqrt{\widetilde{t}}$ y utilizando la simetría de la distribución normal, la ecuación (12) puede escribirse de la siguiente manera

$$
p(t) = S(t) \int_{-\infty}^{\sigma\sqrt{\widetilde{t}} - z_\circ} \varphi(z') dz' - K e^{-r\widetilde{t}} N(-z_\circ) \tag{14}
$$

Ahora bien, para seguir la notación usual de la literatura, hagamos

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \frac{ln(\frac{S(t)}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \\
d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T - t}
\end{aligned}
$$

con lo que, finalmente después de reemplazar en (14) tenemos

$$
p(t) = S(t) N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) \tag{15}
$$

que es el precio del contrato Call que Black y Scholes encontraron en su famoso artículo

5. La Ecuación de Black-Scholes

Cuando la función de pago del contrato Y es una función (con ciertas características que se especifican más abajo) del precio final de stock, digamos $g(S(T))$, entonces Nielsen muestra en [9] que el precio del contrato Y es una función $p = p(t, S(t))$ del instante t en el cual se establece el contrato y del precio del stock en dicho instante (ver ecuación 15). Además, dicha función es de clase C^∞ y por lo tanto puede aplicarse la fórmula de Itô sin ninguna preocupación. Específicamente se tiene:

Si Y es un T-reclamo contingente y $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es una función medible que cumple la siguientes características
(1) $Y = g(S(T))$
(2) g es localmente integrable, es decir,

$$\int_a^b |g(x)|dx < +\infty \quad \forall a, b \in \mathbb{R}_+$$

(3) g satisface la condición de crecimiento polinómico, esto es, para algún $\beta > 0$ se cumple

$$|g(x)| \leq 1 + x^\beta, \quad x > x_0,$$

Entonces, dadas estas condiciones, se tiene

$$\begin{cases} p(t, S(t)) & = & V(t), \ t \in [0, T[\\ p(T, S(T)) & = & g(S(T)) \end{cases}$$

donde p es infinitamente diferenciable[5]

Notar que la función $g(x) = (x - K)^+$, que define la función de pago del contrato Call, satisface las condiciones (1), (2) y (3) de arriba.

Lo que haremos enseguida es utilizar este resultado general para derivar la ecuación de B-S. Como $V(t) = p(t, S(t))$ es infinitamente diferenciable, entonces podemos aplicar la fórmula de Itô a $Z(t) = p(t, S(t))$:

$$\begin{aligned} dZ(t) &= \left[p_t(t, S(t)) + \mu S(t)p_x(t, S(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2(S(t))^2 p_{xx}(t, S(t))\right] \\ &\quad dt + \sigma S(t)p_x(t, S(t))dW(t) \end{aligned} \tag{1}$$

[5]V(t) es el valor martingala del contrato Y

Sea $\overline{\theta}(t) = (\alpha(t), \beta(t))$ un portafolio replicante del contrato Y[6]. Por la condición de autofinanciamiento tenemos

$$dp(t, S(t)) = dV(t) = \overline{\theta}(t)d\overline{S}(t) = \alpha(t)dB(t) + \beta(t)dS(t) \tag{2}$$

Como $dZ(t) = dp(t, S(t))$, entonces (2) es una reformulación del diferencial dZ. Desarrollemos esta ecuación

$$\begin{aligned} dZ(t) &= \alpha(t)dB(t) + \beta(t)dS(t) \\ &= \alpha(t)B(t)rdt + \beta(t)\Big[\mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)\Big] \\ &= \Big[\alpha(t)B(t)r + \beta(t)\mu S(t)\Big]dt + \beta(t)\sigma S(t)dW \end{aligned} \tag{3}$$

Comparando (1) y (3) e identificando términos tenemos

$$\begin{aligned} & p_t(t, S(t)) + \mu S(t)p_x(t, S(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2(S(t))^2 p_{xx}(t, S(t)) \\ & = \alpha(t)B(t)r + \beta(t)\mu S(t) \end{aligned} \tag{4}$$

$$\sigma S(t)p_x(t, S(t)) = \beta(t)\sigma S(t) \tag{5}$$

Además,

$$\alpha(t)B(t) + \beta(t)S(t) = p(t, S(t)) \tag{6}$$

De (5) se tiene

$$\beta(t) = p_x(t, S(t)) \tag{7}$$

y sustituyendo en (6) obtenemos

$$\alpha(t) = \Big[p(t, S(t)) - p_x(t, S(t))S(t)\Big](B(t))^{-1} \tag{8}$$

Ahora, sustituyendo (7) y (8) en (4) y simplificando algo la notación conseguimos

$$p_t(t,S) + \mu S p_x(t,S) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 p_{xx}(t, S) = \Big[p(t,S) - p_x(t,S)S\Big]B^{-1}Br + p_x(t,S)\mu S$$

de donde

$$p_t(t, S) + rSp_x(t, S) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 p_{xx}(t, S) = rp(t, S), \quad t \in [0, T[\quad P - c.c.$$

[6] El modelo B-S es completo y por lo tanto está asegurada la existencia del portafolio replicante (ver [9])

y por supuesto

$$P(T, S(T)) = g(S(T))$$

De manera pues que el precio del contrato Y es una solución de la ecuación diferencial parcial no lineal conocida como la ecuación de Black-Scholes (B-S):

$$(B-S): \begin{cases} p_t(t,x)+rxp_x(t,x)+\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 p_{xx}(t,x) = rp(t,x), \quad x\in\mathbb{R}_+, \; t\in [0,T[\\ p(T,x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \tag{9}$$

Existen métodos probabílisticos que permiten resolver esta ecuación (ver por ejemplo [7]). Técnicas analíticas usuales, usando transformada de Fourier, también pueden ser aplicadas, como lo hace por ejemplo Steel en [11]. Cuando (9) es aplicada para encontrar el precio del contrato Call, se obtiene la solución, única, que hallamos por medio de la fórmula de valuación martingala en la sección 5.

Finalmente, hacemos notar que en nuestro proceso de obtención de la ecuación B-S se ha establecido explícitamente el portafolio replicante en las ecuaciones (7) y (8).

Agradecimientos. A los profesores Ramón García-Cobián y José Flores, por su constante apoyo y estímulo.

Referencias

[1] FISHER BLACK, MYRON SCHOLES: *The pricing of option and Corporate Liabilities.* Journal of Political Economy 81 (1973) 637-654.

[2] DARREL DUFFIE: *Dynamic Asset Pricing Theory.* Princeton University Press, (1996).

[3] ROSE-ANNE DANA, MONIQUE JEANBLANC: *Financial Markets in Continuous Time.* Springer-Verlag, (1998).

[4] ROBERT ELLIOT, EKKERHARD KOPP: *Mathematics of Financial Markets.* Springer Verlag, (1999).

[5] AVNER FRIEDMAN: *Stochastic Diffrential Equations and Applications (V1).* Academic Press, (1975).

[6] JEAN-PIERRE FOUQUE, GEORGE PAPANICOLAU, RONNIE SICAR: *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility.* Cambridge University Press, (2000).

[7] IOANIS KARATZAS, STEVEN SHREVE: *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Springer-Verlag, (1998).

[8] MAREK MUSIELA, MAREK RUTKOWSKI: *Martingale Methods in Financial Modelling.* (1998).

[9] LARS NIELSEN: *Pricing and Hedgin of Derivative Securities.* Oxford University Press, (1999).

[10] PAUL A. SAMUELSON: *Rational Theory of Warrant Pricing.* Industrial Magnament Revie, 6: (1965) 13-32.

[11] MICHAEL STEEL: *Stochastic Calculus and Financial Applications.* Springer Verlag, (2001).

Jorge Richard Chávez Fuentes
Profesor de la Sección Matemática
Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú
jrchavez@pucp.edu.pe