Pro Mathematica, XIX, 37-38, (2005), 5-20

LA CATEGORÍA DERIVADA DE LOS PRO-SUPERCOMPLEJOS

Christian Valqui[1]

Resumen

La categoría derivada es una construcción que invierte ciertos morfismos. Las herramientas requeridas se reducen al máximo en este trabajo para dar detalladamente esta construcción en el caso de pro-supercomplejos. También se muestra que es suficiente analizar a los objetos inyectivos.

Palabras clave: *Pro-categorías, Categoría derivada, Categorías trianguladas*

1. *Sección Matemática, Departamento de Ciencias, PUCP.*

Introducción

En el presente trabajo detallaremos la construcción de la categoría derivada de la categoría de pro-supercomplejos. La construcción general de una categoría derivada consiste en invertir formalmente un cierto conjunto de morfismos, usualmente se inverten los que inducen isomorfismos en homología. Esta construcción se encuentra por ejemplo en [6]. Sin embargo en [6] no se detallan tanto los cálculos, de modo que los cálculos en el presente trabajo pueden servir también para verificar los resultados en [6]. El resultado principal es la buena definición de la composición y la asociatividad, lo cual nos asegura que la categoría derivada $\mathcal{D}$ es efectivamente una categoría. Además se prueba que esta categoría es equivalente a una subcategoría de la categoría homotópica: La formada por los objetos inyectivos.

1 Definiciones y Resultados Previos

La categoría de pro-supercomplejos está formada por sistemas inversos de complejos $\mathbb{Z}/2$-graduados de espacios vectoriales (sobre $\mathbb{C}$). Decimos que una aplicación $f : A \to B$ de pro-supercomplejos es una equivalencia débil, si induce un isomorfismo

$$Hom(B, Z) \to Hom(A, Z)$$

para todo supercomplejo Z, visto como pro-supercomplejo constante. Otras caracterizaciones de la equivalencia débil se pueden ver en [11]. Una secuencia exacta corta $0 \to A \to B \to C \to 0$ es localmente split si es isomorfa a una secuencia exacta corta que en cada nivel es una suma directa. En particular, una secuencia exacta localmente split induce una secuencia exacta

$$0 \to Hom(C, D) \to Hom(B, D) \to Hom(A, D) \to Ext(C, D) \to ...$$

Si D es inyectivo (por ejemplo si es constante) esto es una secuencia exacta corta.

Lema 1.1 *Sea*

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

una secuencia corta localmente split de pro-supercomplejos.

1. *C es débilmente contráctil $\Leftrightarrow$ f es una equivalencia débil.*

2. *A es débilmente contráctil $\Leftrightarrow$ g es una equivalencia débil.*

3. *Sea $0 \to A' \to B' \to C' \to 0$ otra secuencia exacta corta localmente split de (super)complejos de pro-c-espacios de modo que el diagrama*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle h_1}\big\downarrow & & {\scriptstyle h_2}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle h_3} & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

conmute. Si dos de h_1, h_2, h_3 son equivalencias débiles, entonces también lo es el tercer morfismo.

Demostración: Esto se ve directamente aplicando para un supercomplejo constante Z el funtor $Hom(-, Z)$ y verificando las afirmaciones en la secuencia exacta larga en homología correspondiente a la secuencia exacta corta

$$0 \to Hom(C, Z) \to Hom(B, Z) \to Hom(A, Z) \to 0$$

para los dos primeras afirmaciones y aplicando el lema de los cinco (ver [5]) a las dos secuencias en el tercer caso. □

2 La Categoría Derivada

La categoría derivada $\mathcal{D}$ tiene como objetos a los supercomplejos de pro-c-espacios y como morfismos en $Hom_{\mathcal{D}}(A,B)$ a clases de equivalencia de ternas (f,τ,X) con

$$A \xrightarrow[f]{} X \xleftarrow[\tau]{} B,$$

donde τ es además una equivalencia débil. Las clases de equivalencia se establecen según la siguiente relación de equivalencia: $(f,s,X) \sim (g,t,Y)$ si y solamente si existe un diagrama conmutativo en K (la categoría homotópica):

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X \arrow[r] & Z & Y \arrow[l] \\
& B \arrow[ul, "s"] \arrow[u, "u"'] \arrow[ur, "t"'] &
\end{tikzcd}$$

donde u es una equivalencia débil.

La composición está dada por $[(f,s,X)] \circ [(g,t,Y)] := [(\bar{g} \circ f, \bar{s} \circ t, Z)]$ donde la existencia de $\bar{g}, \bar{s}$ y Z en el diagrama conmutativo en K

$$\begin{tikzcd}
& & Z & & \\
& X \arrow[ur, "\bar{g}"] & & Y \arrow[ul, "\bar{s}"'] & \\
A \arrow[ur, "f"] & & B \arrow[ul, "s"'] \arrow[ur, "g"'] & & C \arrow[ul, "t"']
\end{tikzcd}$$

está garantizada por el lema 2.2.

Proposición 2.1 *1. $\sim$ es una relación de equivalencia.*

2. La composición está bien definida.

3. La composición es asociativa.

Para demostrar la proposición que en [6] es parte de una definicion, veremos primero los dos lemas siguientes, que en [6] son parte de los axiomas de sistemas multiplicativos.

Lema 2.2 *Sean s, g morfismos en PS*

$$\begin{tikzcd} E \\ B \arrow[u, "s"] \arrow[r, "g"'] & F \end{tikzcd}$$

donde s es una equivalencia débil. Entonces existen $\bar{s}, \bar{g}, C$ de modo que $\bar{s}$ es una equivalencia débil y talque el diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\bar{g}"] & C \\ B \arrow[u, "s"] \arrow[r, "g"'] & F \arrow[u, "\bar{s}"'] \end{tikzcd}$$

conmute salvo homotopías.

Demostración: Ponemos $C := C_{g\circ\delta}$ según la siguiente construcción: C_s es el cono de mapeo de s y $S^{-1}C_s$ la antisuspensión de C_s. Esto es, $(S^{-1}C_s)_n = (C_s)_{n+1}, \partial^{S^{-1}C_s} = -\partial^{C_s}$. Sea $\delta : S^{-1}C_s \cong B \oplus S^{-1}E \to B$ la proyección al primer sumando, que es un morfismo de complejos de cadenas. Ahora $C := C_{g\circ\delta}$, esto significa que como pro-c-espacio,

$$C = C_{g\circ\delta} \cong S(S^{-1}(C_s)) \oplus F = C_s \oplus F \cong SB \oplus E \oplus F$$

teniendo como diferencial:

$$\partial^C(b, e, f) = (\partial^{C_s}(b, e), \partial f + g \circ \delta(b, e)) = (-\partial b, \partial e + sb, \partial f + g(b)).$$

Definimos $\bar{s}$ y $\bar{g}$ por medio de:

$$\begin{aligned} \bar{s}(f) = (0,0,f) \quad &\Rightarrow \quad \partial\bar{s}f = \bar{s}\partial f \\ \bar{g}(e) = (0,-e,0) \quad &\Rightarrow \quad \partial\bar{g}e = \bar{g}\partial e \end{aligned}$$

Demostraremos que el diagrama conmuta salvo homotopía: Definimos $h : B \to C$ de grado 1 poniendo $h(b) = (b,0,0)$. Se ve que

$$\begin{aligned} \partial h(b) &= (-\partial b, sb, g(b)) \\ h\partial(b) &= (\partial b, 0, 0) \\ (h\partial + \partial h)(b) = (0, sb, g(b)) = \bar{s} \circ g(b) - \bar{g} \circ s(b) & \end{aligned}$$

con lo cual se tiene que $\bar{s} \circ g \simeq \bar{g} \circ s$, que es lo que se tenía que probar.
Finalmente vemos que $\bar{s}$ es equivalencia débil:
Sea Z constante. Como s es equivalencia débil, se tiene que $H_*(Hom(C_s, Z)) = 0$. Ahora la secuencia exacta corta split

$$0 \to F \xrightarrow{\bar{s}} C_{g\circ\delta} \to C_s \to 0$$

y el lema 1.13 demuestran que $\bar{s}$ es una equivalencia débil. □

Lema 2.3 *Si para un morfismo $f : A \to B$ existe un C y una equivalencia débil $s : C \to A$ talque $f \circ s \simeq 0$, entonces existe un D y una equivalencia débil $t : B \to D$ talque $t \circ f \simeq 0$.*

Demostración: La idea es completar con t el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & & C_\phi \\ 0 \arrow[r] & B \arrow[r, "Id"] & B \arrow[u, dotted, "t"'] \\ C \arrow[u] \arrow[r, "s"'] & A \arrow[u, "f"'] \arrow[r] & C_s \arrow[u, "\phi"'] \end{tikzcd}$$

Sabemos que $fs \simeq 0$, esto significa que existe un $h : C \to B$ de grado 1 con $fs = h\partial + \partial h$. Definimos $\phi : C_s \to B$ poniendo $\phi(c,a) := h(c) + f(a)$.

Se verifica que esto es un morfismo de cadenas, de hecho es un caso especial del morfismo inducido en los conos de mapeo, identificando B con el cono de mapeo de la aplicación $0 : 0 \to B$.

Ahora t es la inclusión canónica $t : B \to C_\phi \cong SC_s \oplus B \cong C \oplus SA \oplus B$, es decir $t(b) = (0, 0, b)$. Se sabe que t es un morfismo de complejos. Además t es equivalencia débil:
Como s es equivalencia débil, tenemos que C_s y por lo tanto también SC_s son debilmente contráctiles, esto es, $H_*Hom(C_s, Z) = 0$ para todo Z constante. La secuencia exacta corta split

$$0 \to B \xrightarrow{t} C_\phi \to SC_s \to 0$$

y el lema 1.11 nos da que t es una equivalencia débil.
Si definimos finalmente $\bar{h} : A \to D = C_\phi$ poniendo $\bar{h}(a) = (0, a, 0)$ tenemos que $(\bar{h}\partial + \partial\bar{h})(a) = (0, \partial a, 0) + (0, -\partial a, f(a)) = (0, 0, f(a)) = t \circ f(a)$. Por lo tanto $\partial\bar{h} + \bar{h}\partial = t \circ f$, es decir, $t \circ f \simeq 0$. □

Corolario 2.4 *Si*

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r, dotted, "t"] & Y \\ X \arrow[r, "s"] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "h"] & D \arrow[u, "k"] & \end{tikzcd}$$

conmuta en K luego de componer con la equivalencia débil s, es decir $gfs \simeq khs$, entonces existe $t : C \to Y$ de modo que el diagrama conmuta luego de componer con t, es decir $tgf \simeq tkh$.

Demostración: basta aplicar el lema anterior a $gf - kh$. □

Demostración: (De la prop. 2.1) Veamos que $\sim$ es una relación de equivalencia: La simetría y reflexividad son obvias. Para la transitividad supongamos que tenemos los siguientes diagramas conmutativos en K:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X \arrow[r] & Z_1 & Y \arrow[l] \\
 & B \arrow[ul, "s"] \arrow[u, "u_1"'] \arrow[ur, "t"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "h"] & \\
Y \arrow[r] & Z_2 & U \arrow[l] \\
 & B \arrow[ul, "t"] \arrow[u, "u_2"'] \arrow[ur, "r"'] &
\end{tikzcd}$$

que nos dan $(f, s, X) \sim (g, t, Y) \sim (h, r, U)$. Usando el lema 2.2 podemos completar con flechas punteadas que serán equivalencias débiles el diagrama (conmutativo en K) :

$$\begin{tikzcd}
Z_1 \arrow[r, dotted] & Z_3 \\
Y \arrow[u] \arrow[r] & Z_2 \arrow[u, dotted]
\end{tikzcd}$$

y obtenemos

$$\begin{tikzcd}
 & & A \arrow[ddll, "f"'] \arrow[ddrr, "h"] & & \\
 & & Z_3 & & \\
X \arrow[r] & Z_1 \arrow[ur] & & Z_2 \arrow[ul] & U \arrow[l] \\
 & & Y \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[uu] & & \\
 & & B \arrow[u, "t"'] \arrow[uull, "s"] \arrow[uurr, "r"'] & &
\end{tikzcd}$$

Esto asegura que $(f, s, X) \sim (h, r, U)$. □

Comentario 2.5 *Si $t : X \to Y$ es una equivalencia débil, entonces $(f, s, X) \sim (tf, ts, Y)$, como se ve en el diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "tf"] & \\
X \arrow[r, "t"] & Y & Y \arrow[l, "Id"'] \\
 & B \arrow[ul, "s"] \arrow[u, "ts"] \arrow[ur, "ts"'] &
\end{tikzcd}
$$

Ahora veremos que la composición está bien definida: Supongamos que hemos definido la composición de dos distintas maneras (el lema 2.2 no asegura la unicidad):

$$
\begin{tikzcd}
 & Z_1 & & Z_2 & \\
 & X \arrow[u, "g_1"] \arrow[urr, "g_2"] & & Y \arrow[u, "s_2"'] \arrow[ull, "s_1"'] & \\
A \arrow[ur, "f"] & & B \arrow[ul, "s"'] \arrow[ur, "g"'] & & C \arrow[ul, "t"']
\end{tikzcd}
$$

Tenemos que demostrar que $(g_1 f, s_1 t, Z_1) \sim (g_2 f, s_2 t, Z_2)$.
Para esto completemos con equivalencias débiles s_3, s_4 (lema 2.2) el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
 & Z_3 & \\
Z_1 \arrow[ur, dotted, "s_3"] & & Z_2 \arrow[ul, dotted, "s_4"'] \\
 & Y \arrow[ul, "s_1"] \arrow[ur, "s_2"'] &
\end{tikzcd}
$$

Además tenemos que $s_4 g_2 s \simeq s_3 g_1 s$ (pues $s_4 g_2 s \simeq s_4 s_2 g \simeq s_3 s_1 g \simeq s_3 g_1 s$) y entonces el corolario 2.4 nos dice que hay un pro-supercomplejo

Z_4 y una equivalencia débil $s_5 : Z_3 \to Z_5$ de modo que $s_5 s_4 g_2 \simeq s_5 s_3 g_1$. Obtenemos finalmente:

$$
\begin{aligned}
(g_1 f, s_1 t, Z_1) &\sim (s_3 g_1 f, s_3 s_1 t, Z_3) \\
&\sim (s_3 g_1 f, s_4 s_2 t, Z_3) \\
&\sim (s_5 s_3 g_1 f, s_5 s_4 s_2 t, Z_4) \\
&\sim (s_5 s_4 g_2 f, s_5 s_4 s_2 t, Z_4) \\
&\sim (g_2 f, s_2 t, Z_2)
\end{aligned}
$$

Estas equivalencias se obtienen siguiendo los morfismos en el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & & Z_4 & & \\
 & & Z_3 \arrow[u, "s_5"] & & \\
 & Z_1 \arrow[ur, "s_3"] & & Z_2 \arrow[ul, "s_4"'] & \\
 & X \arrow[u, "g_1"] \arrow[urr, "g_2"] & & Y \arrow[u, "s_2"'] \arrow[ull, "s_1"] & \\
A \arrow[ur, "f"] & & B \arrow[ul, "s"'] \arrow[ur, "g"'] & & C \arrow[ul, "t"']
\end{tikzcd}
$$

Queda como ejercicio escribir las equivalencias correspondientes a la demostración de la asociatividad en el diagrama (las $\sim$ junto a una flecha indican equivalencias débiles):

$$
\begin{tikzcd}
 & & & U_5 & & & \\
 & & & U_4 \arrow[u, "\sim"'] & & & \\
 & & & U_3 \arrow[u, "\sim"'] & & & \\
 & & U_2 \arrow[ur, "\sim"'] & & V_2 \arrow[ul, "\sim"'] & & \\
 & U_1 \arrow[ur] & & & & V_1 \arrow[ul, "\sim"'] & \\
 & X \arrow[u] \arrow[uurrr] & & Y \arrow[ull, "\sim"'] \arrow[urr] & & Z \arrow[u, "\sim"'] \arrow[uulll, "\sim"'] & \\
A \arrow[ur, "f"] & & B \arrow[ul, "s"'] \arrow[ur, "g"'] & & C \arrow[ul, "t"'] \arrow[ur, "h"'] & & D \arrow[ul, "r"']
\end{tikzcd}
$$

3 Reducción a Inyectivos

Finalmente mostraremos que la categoría derivada se puede describir usando resoluciones inyectivas. Primero demostramos que todo pro-supercomplejo admite una inyección localmente split a un inyectivo y luego veremos que los morfismos entre inyectivos corresponden a los morfismos entre ellos en la categoría derivada. Esto es suficiente para verificar que la categoría derivada es equivalente la subcategoría plena de la categoría homotópica formada con los objetos inyectivos.

Teorema 3.1 *Para todo pro-supercomplejo X existe un pro-supercomplejo $\hat{X}$ inyectivo y una inclusión (localmente split) $\tau : X \to \hat{X}$ que es una equivalencia débil.*

Demostración: Ponemos $J_n := \bigoplus_{k=1}^{n} X_k$, lo cual nos da un pro-super-complejo $J = (J_k)$ con σ^J la proyección canónica. Tenemos una inclusión localmente split
$X \hookrightarrow J$ dada en cada nivel por $x_n \mapsto (\sigma_{n1}(x_n), \ldots, \sigma_{n,n-1}(x_n), x_n)$. La retracción local está dada por $\pi_n(x_1, \ldots, x_n) := x_n$.
La secuencia exacta corta localmente split que corresponde a esta inclusión

$$0 \to X \to J \xrightarrow{p} Q \to 0$$

da para todo pro-c-espacio A la secuencia

$$0 \to Hom(A, X) \to Hom(A, J) \to Hom(A, Q) \to$$

$$\to Ext(A, X) \to Ext(A, J) \to Ext(A, Q) \to 0$$

Como $Ext(A, J) = 0$ para todo A, también es $Ext(A, Q) = 0$, por lo tanto el cociente Q es inyectivo. Esto nos dice finalmente que como pro-c-espacio $C_p \cong SQ \oplus J$ es inyectivo. Se verifica directamente que el cociente de la inclusión de X en la suspensión del cono de mapeo de p es la suspensión del cono de mapeo de la identidad de Q:

$$0 \to X \overset{\tau}{\hookrightarrow} SC_p \to SC_{Id_Q} \to 0$$

Ponemos $\hat{X} := SC_p$ y el mismo argumento usado ya varias veces (aplicar $Hom(-, Z)$ a la secuencia exacta corta y luego ver la secuencia exacta larga en homología) nos lleva a la conclusión de que la inclusión $\tau : X \to \hat{X}$ es una equivalencia débil, que era lo que queríamos demostrar. □

Corolario 3.2 *Todo morfismo en $Hom_{\mathcal{D}}(A, B)$ puede ser representado por (f, t, X) con X inyectivo.*

$$\begin{tikzcd} & X & \\ A \arrow[r, "g"'] & Y \arrow[u, "\tau"'] & B \arrow[l, "s"] \end{tikzcd}$$

Demostración: Si el representante es (g, s, Y) se toma τ y X según el teorema de modo que X es inyectivo y la inclusión $\tau : Y \hookrightarrow X$ es una equivalencia débil. Por el comentario 2.5 se sabe que $(f, t, Y) \sim (\tau g, \tau s, X) = (f, t, X)$ □

Proposición 3.3 *Si M, N son supercomplejos de pro-c-espacios inyectivos y $f : M \to N$ es una equivalencia débil, entonces f es una equivalencia homotópica.*

Demostración: Como M y N son inyectivos, también será inyectivo $C_f \cong SM \oplus N$. Pero entonces $H_*(Hom(C_f, C_f)) = 0$ lo cual significa que $Id_{C_f} \simeq 0$, es decir $C_f \simeq 0$. Esto dice que $C_f = 0$ en K y por lo tanto f es un isomorfismo en K, es decir, es una equivalencia homotópica. □

Teorema 3.4 *Si N es inyectivo como pro-c-espacio, entonces* $Hom_K(M, N) \cong Hom_{\mathcal{D}}(M, N)$.

Demostración: Definimos $\varphi : Hom_K(M, N) \to Hom_{\mathcal{D}}(M, N)$ asignando $[f] \mapsto [(f, Id_N, N)]$. Veremos que es una biyección: Está bien definido pues si $f \simeq g$, entonces

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ N \arrow[r] & N & N \arrow[l] \\ & N \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo en K, donde todas las flechas de N a N son la identidad, y por lo tanto $(f, Id, N) \sim (g, Id, N)$.

φ es sobre: Sea $[(f, s, X)] \in Hom_{\mathcal{D}}(M, N)$. Incluimos a X con una equivalencia débil t en un inyectivo I:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & X \arrow[d, "t"] & N \arrow[l, "s"'] \\ & I & \end{tikzcd}$$

Sabemos que $(f, s, X) \sim (tf, ts, I)$. Como ts es una equivalencia débil entre dos inyectivos, es un isomorfismo en K por la proposición 3.3. Sea $[g]$ su inverso en K, es decir $[g] = [ts]^{-1}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\varphi([g \circ t \circ f]) &= [(gtf, Id_N, N)] \\
&= [(tsgtf, ts, I)] \\
&= [(tf, ts, I)] \\
&= [(f, s, X)]
\end{aligned}$$

Ver la figura:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "gtf"] & N \arrow[d, "ts"] & N \arrow[l, "Id"'] \\
& I &
\end{tikzcd}$$

Veamos finalmente que φ es inyectiva: Sea $\varphi([f]) = \varphi([g])$, es decir, $(f, Id, N) \sim (g, Id, N)$. Esto significa que existe un diagrama conmutativo en K:

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
N \arrow[r] & X & N \arrow[l] \\
& N \arrow[ul, "Id"] \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "Id"'] &
\end{tikzcd}$$

Podemos asumir que X es inyectivo y que las flechas horizontales son iguales a u. Por la proposición 3.3(X y N inyectivos) u es una equivalencia homotópica, es decir, existe u^{-1}, el inverso módulo homotopía, de u. Del diagrama vemos que $uf \simeq ug$ entonces $u^{-1}uf \simeq u^{-1}ug \Rightarrow f \simeq g$, es decir $[f] = [g]$. $\square$

Referencias

[1] M. ARTIN and B. MAZUR : *Etale homotopy.* Lecture Notes in Mathematics. 100. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. (1969) 169.

[2] J. CUNTZ and D. QUILLEN: *Excision in bivariant periodic cyclic cohomology.* Invent. Math. 127, No.1 (1997) 67-98.

[3] J. CUNTZ: *Excision in periodic cyclic theory for topological algebras.* Cyclic cohomology and noncommutative geometry. Proceedings of a workshop, Fields Institute, Waterloo, Ont., Canada, June 14–18, 1995. Providence, RI: American Mathematical Society. Fields Inst. Commun. 17 (1997) 43-53.

[4] A. DOLD: *Zur Homotopietheorie der Kettenkomplexe.* Math. Annalen 140 (1960) 278-298.

[5] P. HILTON and U. STAMMBACH: *A course in homological algebra.* Graduate texts in Mathematics 4, Berlin-Heidelberg-New York: Springer Verlag (1971).

[6] M. KASHIWARA and P. SCHAPIRA: *Sheaves on Manifolds.* Springer Grundlehren 292 (1990).

[7] S. MACLANE: *Categories for the working mathematician.* Texts in Mathematics 5, Springer-Verlag (1971).

[8] C. VALQUI: *Pro-Vektorräume, Pro-Algebren und bivariante periodische zyklische Homologie.* SFB Preprint 29 (1998). http://wwwmath.uni-muenster.de/math/inst/sfb/about/publ/valqui.ps

[9] C. VALQUI: *Universal extension and excision for topological algebras.* SFB Preprint 58 (1999). http://wwwmath.uni-muenster.de/math/inst/sfb/about/publ/valqui2.ps

[10] C. VALQUI: *Weak equivalences of pro-complexes and excision in topological Cuntz-Quillen theory.* SFB Preprint 88 (2000). http://wwwmath.uni-muenster.de/math /inst/ sfb/about /publ/valqui4.ps

[11] C. VALQUI: *Notes on weak equivalences of pro-complexes.* SFB Preprint 357 (2004). http://wwwmath.uni-muenster.de /math - /inst/sfb/about/publ/heft357.ps

Abstract

The derived category arises when we invert formally certain morphisms. The tools needed for this purpose are reduced to a minimum in this article, giving the detailed construction in the case of pro-supercomplexes. It is also shown that one can restrict to injective objects.

Key words: Pro-categories, derived category, triangulated categories.

Christian Valqui
Sección Matemática, Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú
`cvalqui@pucp.edu.pe`