*Pro Mathematica, XIX, 37-38, (2005), 51-71*

# COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE UN SISTEMA ACOPLADO DE ECUACIONES DISPERSIVAS

***Gladys Cruz Y.***[1] ***Juan Montealegre S.***[2]

## *Resumen*

*Se demuestra que el problema de valor inicial asociado con el sistema acoplado de ecuaciones de Korteweg-de Vries*

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \alpha \partial_x^3 v + u^p \partial_x u + v^p \partial_x v = 0 \\ \partial_t v + \partial_x^3 v + \alpha \partial_x^3 u + v^p \partial_x v + \partial_x (u v^p) = 0 \end{cases}$$

*para* $p \geq 4$, *tiene única solución global y su comportamiento asintótico satisface*

$$\sup_{t \in [0,\infty[} (1+t)^{1/3} \|U(t)\|_{\mathbf{H}^1_\infty} < +\infty.$$

***Palabras Clave:*** *Sistemas dispersivos, Teoría de Kato, Fase estacionaria, Comportamiento asintótico.*

[1] *Departamento de Matemática, UNSCH*

[2] *Sección Matemática, Departamento de Ciencias, PUCP*

# Introducción

Nuestro objetivo en este artículo es estudiar el comportamiento asintótico en el tiempo de las soluciones del sistema acoplado de ecuaciones generalizadas de Korteweg-de Vries

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \alpha \partial_x^3 v + u^p \partial_x u + v^p \partial_x v = 0 \\ \partial_t v + \partial_x^3 v + \alpha \partial_x^3 u + v^p \partial_x v + \partial_x \left( u v^p \right) = 0 \\ u\left(x,0\right) = u_0, \\ v\left(x,0\right) = v_0. \end{cases} \tag{1}$$

donde $u = u\left(x,t\right)$ y $v = v\left(x,t\right)$ son funciones con valores reales para $x \in \mathbf{R}$, $t \geq 0$, $\alpha$ es una constante real tal que $|\alpha| < 1$ y $p \geq 4$ es un número entero. El sistema tiene la estructura de un par de ecuaciones de Korteweg-de Vries generalizadas, acopladas a través de los efectos dispersivos y no lineales, y es un caso particular del sistema derivado en [7] como un modelo para describir la interacción de ondas largas débilmente no lineales.

Mediante la teoría de Kato para ecuaciones de evolución cuasi lineales del tipo hiperbólico [10], se demuestra la buena formulación local del problema (1). Para estudiar el comportamiento asintótico de la solución del sistema (1), demostramos un resultado de existencia de solución global para valores grandes de $p$. Esto se logra para datos iniciales pequeños, usando estimados del conmutador que involucran derivadas fraccionarias. Con el método de la fase estacionaria analizamos el sistema lineal asociado con (1) y entonces, usando la ecuación integral asociada con el problema, demostramos el teorema 10.

Las notaciones usadas son las frecuentes: por $H_p^s\left(\mathbf{R}\right) = J^{-s} L^p\left(\mathbf{R}\right)$, $s \in \mathbf{R}$ y $1 \leq p \leq \infty$, representamos al espacio de Sobolev de orden $s$ con base en $L^p\left(\mathbf{R}\right)$, donde la norma es $\|\cdot\|_{H_p^s} = \|J^s \cdot\|_{L^p}$ y $J^s$ representa al potencial de Bessel de orden $-s$ definido por $\widehat{J^s f}\left(\xi\right) = \left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \widehat{f}\left(\xi\right)$. En el espacio producto $\mathbf{H}_p^s\left(\mathbf{R}\right) = H_p^s\left(\mathbf{R}\right) \times H_p^s\left(\mathbf{R}\right)$ consideramos la norma $\|\cdot\|_{\mathbf{H}_p^s}^2 = \|\cdot\|_{H_p^s}^2 + \|\cdot\|_{H_p^s}^2$. Cuando $p = 2$ tenemos los espacios de Sobolev $H^s(\mathbf{R}) = H_2^s(\mathbf{R})$ en los que el producto interno y la norma son representados por $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ y $\|\cdot\|_s$, respectivamente. Para dos operadores $A$ y $B$, el conmutador es dado por $[A, B] = AB - BA$. Así, $[J^s, f]\, g = J^s(fg) - fJ^s g$, en donde $f$ es considerado como un operador de multiplicación.

Las siguientes proposiciones serán utilizadas en la tercera sección, sus demostraciones se pueden consultar en [9], [13] y [15], respectivamente.

**Proposición 1.** *Si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, $s > 0$ y $1 < p < \infty$ y, entonces*

$$\|J^s(fg)\|_{L^p} \leq c\left(\|f\|_{L^{p_1}}\, \|J^s g\|_{L^{p_2}} + \|J^s f\|_{L^{p_3}}\, \|g\|_{L^{p_3}}\right)$$

*y*

$$\|[J^s; f]\, g\|_{L^p} \leq c\left(\|\partial f\|_{L^{p_1}}\, \left\|J^{s-1} g\right\|_{L^{p_2}} + \|J^s f\|_{L^{p_3}}\, \|g\|_{L^{p_3}}\right)$$

*donde $p_2$, $p_3 \in\, ]1, \infty[$ y $p_1$, $p_4$ son tales que $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p} = \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4}$.*

**Proposición 2.** *Sean $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\beta_1 \geq 0$ que satisfacen*

$$\alpha_0 + \alpha_1 - \beta_1 \geq 1\ ,\ \alpha_0 \geq \beta_1 \ \ o\ \ \alpha_1 \geq \beta_1$$

*y*

$$\alpha_0 \geq \beta_1 \ \ si\ \ \alpha_1 = 1,\ \ \alpha_1 \geq \beta_1\ \ si\ \alpha_0 = 1.$$

*Entonces, tenemos*

$$\sup_{0 \leq t \leq +\infty} \int_0^t (1+t)^{\beta_1} (1+t-s)^{-\alpha_0} (1+s)^{\alpha_1}\, ds < +\infty.$$

**Proposición 3.** *Sea $m(t)$ una función continua de valor real no negativa tal que existen constantes positivas $\alpha_0$, $\alpha_1$ y $\beta_1$, $\beta_2$ y*

$$m(t) \leq \alpha_0 + \alpha_1 m^{\beta_1}(t) \exp\left(\beta_2\ m^{\beta_1 + t}(t)\right)$$

*para cualquier $t$ en un intervalo conteniendo a $t = 0$, donde $\beta_1 > 1$. Si $m(0) \leq \alpha_0$ y el producto $\alpha_0$, $\alpha_1$ es suficientemente pequeño, entonces en el mismo intervalo $m(t)$ es acotado.*

# 1. El Problema Lineal

Consideremos la parte lineal del sistema (1), es decir,

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \alpha \partial_x^3 v = 0 \\ \partial_t v + \partial_x^3 v + \alpha \partial_x^3 u = 0 \end{cases} \tag{2}$$

con $|\alpha| < 1$ y las condiciones iniciales

$$\begin{cases} u(0) = u_0 \\ v(0) = v_0. \end{cases} \tag{3}$$

El problema (2) - (3) vectorialmente tiene la forma

$$\begin{cases} \partial_t U + A_0 U = 0 \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{4}$$

donde $U = (u, v)$, $U_0 = (u_0, v_0)$ y el operador $A_0$ es definido por

$$\begin{cases} \mathcal{D}(A_0) = \mathbf{H}^{s+3}(\mathbf{R}), \ \ s \geq 0 \\ A_0 U = \left(\partial_x^3 u_1 + \alpha \partial_x^3 u_2, \partial_x^3 u_2 + \alpha \partial_x^3 u_1\right), \ \ U = (u_1, u_2). \end{cases} \tag{5}$$

**Teorema 4.** *El operador* $A_0 : \mathbf{H}^{s+3}(\mathbf{R}) \subseteq \mathbf{H}^s(\mathbf{R}) \to \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ *es lineal con dominio denso y anti-adjunto en* $\mathbf{H}^s(\mathbf{R})$, $s \geq 0$. *En particular,* $A_0$ *y* $-A_0$ *son operadores disipativos maximales en* $\mathbf{H}^s(\mathbf{R})$, $s \geq 0$.

**Prueba.** La linealidad del operador $A_0$ y la densidad de su dominio son inmediatas. Además, si $U = (u_1, u_2) \in \mathbf{H}^{s+3}(\mathbf{R})$, se tiene

$$\|A_0 U\|_{\mathbf{H}^s}^2 \leq C\left(\|u_1\|_{s+3}^2 + \|u_2\|_{s+3}^2\right) = C\|U\|_{\mathbf{H}^{s+3}}^2,$$

así que $A_0 U \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ cualquiera sea $U \in \mathbf{H}^{s+3}(\mathbf{R})$. Además, si $U = (u_1, u_2) \in \mathbf{H}^{s+3}(\mathbf{R})$ y $V = (v_1, v_2) \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ tenemos

$$\begin{aligned} \langle A_0 U, V\rangle_{\mathbf{H}^s} &= -\left\langle u_1, \partial_x^3 v_1 + \alpha \partial_x^3 v_2\right\rangle_s - \left\langle u_2, \partial_x^3 v_2 + \alpha \partial_x^3 v_1\right\rangle_s \\ &= -\langle U, A_0 V\rangle_{\mathbf{H}^s}; \end{aligned}$$

por lo tanto, $A_0$ es anti-adjunto. La última afirmación es consecuencia del corolario 2.4.9 de [6] □

**Teorema 5.** *El operador* $-A_0$ *genera un semigrupo de contracciones* $\{W_0(t)\}_{t\geq 0}$ *en* $\mathbf{H}^s(\mathbf{R})$, $s \geq 0$, *tal que para todo* $U = (u, v) \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$,

$$W_0(t)\,U = \begin{pmatrix} \left(E^+(t) + E^-(t)\right)u + \left(E^+(t) - E^-(t)\right)v \\ \\ \left(E^+(t) - E^-(t)\right)u + \left(E^+(t) + E^-(t)\right)v \end{pmatrix}, \quad (6)$$

*en donde* $E_\mu^\pm(t)$ *son los multiplicadores de Fourier definidos por*

$$\widehat{E^\pm(t)}\varphi(\xi) = \frac{e^{\lambda^\pm(\xi)t}}{2}\widehat{\varphi}(\xi) \quad (7)$$

*con*

$$\lambda^\pm(\xi) = i\xi^3(1 \pm \alpha). \quad (8)$$

*Además,* $\{W_0(t)\}_{t\geq 0}$ *se extiende a un grupo de operadores unitarios en* $\mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ *y, cualquiera sea* $U_0 \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ *la función*

$$W_0(\cdot)\,U_0 : \mathbf{R}_0^+ \to \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$$

*es la única solución del problema de valor inicial (14) en*

$$C\left([0, +\infty[\,, \mathbf{H}^{s+3}\right) \cap C^1\left([0, +\infty[\,, \mathbf{H}^s\right).$$

**Prueba.** La primera afirmación es consecuencia del teorema 4 y el Teorema de Hille-Yosida-Phillips [6, Teorema 3.4.3]. Para demostrar (6), se resuelve el problema de valor inicial (14) tomando la transformada de Fourier en la variable espacial y se usa el Teorema 3.1.1 de [6]. □

**Teorema 6.** *Sea* $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ *y* $E^\pm(t)u_0(x)$, *entonces*

$$\left\|E^\pm(t)u_0\right\|_{L^\infty} \leq Ct^{-1/3}\left\|u_0\right\|_{L^1}. \quad (9)$$

**Prueba.** Probaremos (9) para $E^{+}(t)$. Tenemos

$$\left|E^{+}(t)\,u_0\right| \leq \frac{1}{4\pi}\left\|u_0\right\|_{L^1}\int_{\mathbf{R}} e^{\lambda^{\pm}(\xi)+i\xi x}d\xi.$$

Si $u$ es solución de

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t)+\partial_t^3 u(x,t)=0 & x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_0(x) \end{cases},$$

entonces $u(x,t) = S_t(x) * u_0$ donde $S_t(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{3t}}A_i\left(\frac{x}{\sqrt[3]{3t}}\right)$ y $A_i(x) = \int_{\mathbf{R}} e^{i\left(\xi x+\xi^3/3\right)}d\xi$ es la función de Airy. Haciendo el cambio de variable $\xi = \frac{\theta}{\sqrt[3]{3t(1+\alpha)}}$, se tiene que

$$S_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sqrt[3]{3t(1+\alpha)}}A_i\left(\frac{x}{\sqrt[3]{3t(1+\alpha)}}\right),$$

donde $A_i(x) = \int_{\mathbf{R}} e^{i\left(\theta x+\frac{\theta^3}{3}\right)}d\theta$. Luego,

$$|S_t(x)| = t^{-1/3}\left|S_1\left(\frac{x}{\sqrt[3]{t}}\right)\right| \leq ct^{-1/3}.$$

Ahora, verifiquemos el caso $t=1$ es decir,

$$|S_1(x)| \leq c. \tag{10}$$

Definamos la función $\varphi_0 \in C^{\infty}(\mathbf{R})$ tal que $\varphi_0 \equiv 0$ donde $|\theta| < 1$, y $\varphi_0 \equiv 1$ para $|\theta| \geq 2$. Así, para probar (10) es suficiente demostrar que

$$I(x) = \left|\int_{\mathbf{R}} e^{\phi_x(\theta)}\varphi_0(x)\,d\theta\right| < c,$$

donde $\phi_x(\theta) = i\theta x + i\theta^3$ para cualquier $x \in \mathbf{R}$. Si $x > 2$, la primera derivada de $\phi_x(\theta)$ nunca se anula en el soporte de $\varphi_0$. Entonces el resultado se obtiene integrando por partes.

Si $x \leq -2$, elegimos $\varphi_1$ y $\varphi_2 \in C^{\infty}(\mathbf{R})$ tales que $\varphi_1 + \varphi_2 \equiv 1$ con $\varphi_1 \geq 0$, $\varphi_2 \geq 0$, el soporte de $\varphi_1$ contenido en

$$A = \left\{ |\theta| : \left| 3\,|\theta|^2 + x \right| \leq \frac{1}{2}\,|x| \right\},$$

y $\varphi_2 \equiv 0$ en

$$B = \left\{ |\theta| : \left| 3\,|\theta|^2 + x \right| \leq \frac{1}{3}\,|x| \right\}.$$

Así,

$$I(x) \leq I_1(x) + I_2(x),$$

donde

$$I_j(x) = \left| \int_{\mathbf{R}} e^{\phi_x(\theta)} \varphi_0(x)\, \varphi_j(x)\, d\theta \right|$$

para $j = 1, 2$. Cuando $\varphi_2(\theta) \neq 0$ tenemos $\left| 3\,|\theta|^2 + x \right| \geq c' \left( 3\,|\theta|^2 + x \right)$. Por lo tanto, integrando por partes se demuestra que

$$I_2(x) = \left| c \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\left(3\,|\theta|^2 + x\right)} \varphi_0(\theta)\, \varphi_2(\theta)\, \frac{d}{d\theta} e^{i\left(\theta x + \theta^3\right)} d\theta \right| \leq c'.$$

Finalmente cuando $\theta \in A$ se sigue que $|\theta|^2 \sim |x|$, entonces $\left| \left(d^2/d\theta^2\right) \phi_x(\theta) \right| \geq c\,|x|^{1/2}$ y

$$I_1(x) = \left| \int_{\mathbf{R}} e^{i\left(\theta x + \theta^3\right)} \psi_x\, d\theta \right|$$

donde $\psi_x \in C_0^{\infty}(\mathbf{R})$, el soporte de $\psi_x \subseteq A \cap \{|\theta| > 1\}$ y $\int_{\mathbf{R}} \left| \psi_x'(\theta) \right| d\theta < c''$ con $c''$ independiente de $x$. Para probar esto, observar que $\psi'$ cambia de signo un número finito de veces independientemente de $x$. Usando la proposición 2 completamos la prueba. □

Antes de concluir con esta sección, notemos que en este caso no es posible resolver el problema (1) de manera tradicional, es decir, reducirlo a una ecuación integral y aplicar el teorema del punto fijo de Banach.

En efecto, es fácil verificar que (1) es, al menos formalmente, equivalente a

$$U(t) = W_0(t)\,U_0 - \int_0^t W_0(t-\tau)\,F(U(\tau))\,d\tau$$

en donde $\{W_0(t)\}_{t\geq 0}$ es el semigrupo de contracciones en $\mathbf{H}^s(\mathbf{R})$, $s \geq 0$, generado por el operador matricial $-A_0$ y

$$F(U) = (u^p\partial_x u + v^p\partial_x v, v^p\partial_x v + \partial_x(uv^p)). \tag{11}$$

Ahora, si $U \in C([0,T], \mathbf{H}^s(\mathbf{R}))$ entonces $F(U) \in \mathbf{H}^{s-1}(\mathbf{R})$ y $W_0(t-\tau)$ aplica $\mathbf{H}^{s-1}(\mathbf{R})$ en sí mismo y no en $\mathbf{H}^s(\mathbf{R})$. En consecuencia, la aplicación

$$(\Psi U)(t) = W_0(t)\,U_0 - \int_0^t W_0(t-\tau)\,F(U(\tau))\,d\tau$$

no transforma $C([0,T], \mathbf{H}^s(\mathbf{R}))$ en sí mismo de modo que el teorema del punto fijo de Banach no puede ser aplicado.

# 2. Buena Formulación Local

En esta sección, presentaremos un teorema acerca de la buena formulación local del problema de valor inicial (1). El teorema se obtiene por aplicación del teorema de Kato [10] para ecuaciones de evolución cuasi lineales.

**Teorema 7.** *Si $U_0 \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ con $s > \frac{3}{2}$, entonces existen $T_0 = T_0(\|U_0\|_{\mathbf{H}^s}) > 0$ y*

$$U \in C([0,T_0], \mathbf{H}^s(\mathbf{R})) \cap C^1([0,T_0], \mathbf{L}^2(\mathbf{R}))$$

*única solución del problema de valor inicial (1). Además, $U$ depende continuamente del dato inicial $U_0$ en el sentido que la aplicación*

$$\Psi : U_0 \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R}) \mapsto U \in C([0,T_0], \mathbf{H}^s(\mathbf{R})) \cap C^1([0,T_0], \mathbf{L}^2(\mathbf{R}))$$

*es continua.*

Como ya se mencionó, el teorema 7 es consecuencia del teorema de Kato. El contexto analítico-funcional de la teoría de Kato consiste de un par de espacios de Banach reflexivos $X$ e $Y$, donde $Y$ está contenido en $X$ con la inyección continua y densa. El papel central en el teorema de Kato lo desempeña un isomorfismo suryectivo $S : Y \to X$ donde las normas de los espacios son elegidas de tal manera que $S$ sea una isometría. La teoría se aplica al problema de valor inicial

$$\begin{cases} \partial_t U(t) + A(t, U(t))\, U(t) = 0, & 0 \le t \le T_0 \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{12}$$

asociado con una ecuación de evolución cuasi lineal del tipo hiperbólico en un espacio de Banach $X$, en donde $U_0 \in Y$ es un valor inicial dado. El teorema de Kato asegura que existe un $T = T(\|U_0\|_Y) \in ]0, T_0]$ tal que (12) tiene solución única en $C([0,T], Y) \cap C^1([0,T], X)$ siempre que ciertas condiciones sean satisfechas. Además, la función $\Psi : Y \to C([0,T], Y) \cap C^1([0,T], X)$ que asocia a $U_0$ la solución $U$ es continua.

Antes de aplicar el teorema hacemos la transformación

$$U(t) = W_0(t)\, V(t) \tag{13}$$

donde $\{W_0(t)\}_{t\geq 0}$ es el grupo de operadores unitarios en $\mathbf{H}^s(\mathbf{R})$, $s \geq 0$, generado por el operador $-A_0$ según el teorema 5.

En la forma vectorial del problema (1),

$$\begin{cases} \partial_t U(t) + A_0 U(t) + F(U(t)) = 0 \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{14}$$

donde $F(U(t))$ está definido en (11), la sustitución (13) conduce al problema de valor inicial

$$\begin{cases} \partial_t V(t) + A(t, V(t))\, V(t) = 0 \\ V(0) = U_0, \end{cases}$$

que tiene la forma (12), en donde, si para $Y = (y, z)$ y $V = (\varphi, \psi)$ escribimos $f(t) = T^+(t)\, y + T^-(t)\, z$, $g(t) = T^-(t)\, y + T^+(t)\, z$, $\widetilde{u}(t) =$

$T^{+}(t)\varphi + T^{-}(t)\psi$ y $\widetilde{v}(t) = T^{-}(t)\varphi + T^{+}(t)\psi$, con $T^{+}(t) = E^{+}(t) + E^{-}(t)$ y $T^{-}(t) = E^{+}(t) - E^{-}(t)$, tenemos que

$$A(t,Y)\,V(t) = \frac{W_0(-t)}{2^{p+1}} \begin{pmatrix} f^p(t)\,\partial_x\widetilde{u}(t) + g^p(t)\,\partial_x\widetilde{v}(t) \\ g^p(t)\,\partial_x\widetilde{v}(t) + \partial_x\left(\widetilde{u}(t)\,g^p(t)\right) \end{pmatrix}.$$

Entonces, para aplicar el teorema de Kato se toma $X = \mathbf{L}^2(\mathbf{R})$, $Y = \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ y $S = (J^s, J^s)$. Los detalles de la demostración son como los presentados en [11] para la ecuación de Korteweg-de Vries, por eso no son presentados aquí.

# 3. Existencia de Solución Global y su Comportamiento Asintótico

En esta sección demostramos que la solución local del problema (1) obtenida en el teorema 7 puede ser extendida al intervalo $[0,+\infty[$, para esto será suficiente demostrar que $\Psi(r)$ dada en (17) es acotada para todo $r \geq 0$. Este será el caso si el dato inicial es elegido suficientemente pequeño, el comportamiento asintótico de la solución global en el tiempo está dada por

$$\sup_{t\in[0,\infty[} (1+t)^{1/3}\,\|U(t)\|_{\mathbf{H}^1_1} < +\infty. \tag{15}$$

**Teorema 8.** *Si $U_0 \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ con $s > \frac{3}{2}$, sea $U$ la única solución del problema de valor inicial (1) obtenida en el teorema 7. Si $p \geq 2$, entonces*

$$\sup_{t\in[0,T_0]} \|U(t)\|_{\mathbf{H}^s} \leq C\,\|U_0\|_{\mathbf{H}^s} \exp\left(C\int_0^{T_0} \Psi(r)\,dr\right) \tag{16}$$

*donde, para $U = (u,v)$ tenemos*

$$\Psi(r) = \|u\|_{L^\infty}^{p-1}\,\|\partial_x u\|_{L^\infty} + \|v\|_{L^\infty}^{p-1}\,\|\partial_x v\|_{L^\infty}$$
$$+ \|v\|_{L^\infty}^{p-1}\,\|\partial_x u\|_{L^\infty} + \|v\|_{L^\infty}^{p-2}\,\|\partial_x v\|_{L^\infty}\,\|u\|_{L^\infty}. \tag{17}$$

**Prueba.** Probaremos (16) usando los resultados sobre conmutadores de la proposición 1. Aplicando el operador $J^s$ a las dos ecuaciones del sistema (1) y usando las igualdades

$$J^s\left(f^p \partial_x f\right) = \left[J^s, f^p\right] \partial_x f + f^p J^s \partial_x f$$

y

$$\begin{aligned} J^s \partial_x \left(f g^p\right) &= p\left[J^s, g^{p-1} f\right] \partial_x g + p g^{p-1} f J^s \partial_x g \\ &\quad + \left[J^s, g^p\right] \partial_x f + g^p J^s \partial_x f. \end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned} &\partial_t J^s u + \partial_x^3 J^s u + \alpha \partial_x^3 J^s v + \left[J^s, u^p\right] \partial_x u \\ &\quad + u^p J^s \partial_x u + \left[J^s, v^p\right] \partial_x v + v^p J^s \partial_x v = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

y

$$\begin{aligned} &\partial_t J^s v + \partial_x^3 J^s v + \alpha \partial_x^3 J^s u + \left[J^s, v^p\right] \partial_x v \\ &\quad + v^p J^s \partial_x v + p\left[J^s, v^{p-1} u\right] \partial_x v \\ &\quad + p v^{p-1} u J^s \partial_x v + \left[J^s, v^p\right] \partial_x u + v^p J^s \partial_x u = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_t \left\|J^s u\right\|_0^2 &= -\left\langle J^s u, \partial_x^3 J^s u\right\rangle_0 - \alpha\left\langle J^s u, \partial_x^3 J^s v\right\rangle_0 \\ &\quad - \left\langle J^s u, \left[J^s, u^p\right] \partial_x u\right\rangle_0 - \left\langle J^s u, u^p J^s \partial_x u\right\rangle_0 \\ &\quad - \left\langle J^s u, \left[J^s, v^p\right] \partial_x v\right\rangle_0 - \left\langle J^s u, v^p J^s \partial_x v\right\rangle_0 \end{aligned} \tag{20}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_t \left\|J^s v\right\|_0^2 &= -\left\langle J^s v, \partial_x^3 J^s v\right\rangle_0 - \alpha\left\langle J^s v, \partial_x^3 J^s u\right\rangle_0 \\ &\quad - \left\langle J^s v, \left[J^s, v^p\right] \partial_x v\right\rangle_0 - \left\langle J^s v, v^p J^s \partial_x v\right\rangle_0 \\ &\quad - p\left\langle J^s v, \left[J^s, v^{p-1} u\right] \partial_x v\right\rangle_0 - p\left\langle J^s v, v^{p-1} u J^s \partial_x v\right\rangle_0 \\ &\quad - \left\langle J^s v, \left[J^s, v^p\right] \partial_x u\right\rangle_0 - \left\langle J^s v, v^p J^s \partial_x u\right\rangle_0 . \end{aligned} \tag{21}$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones (20) y (21), notando que

$$\left\langle J^s f, \partial_x^3 J^s g\right\rangle_0 = -\left\langle \partial_x^3 J^s f, J^s g\right\rangle_0$$

y

$$\langle J^s f, g^p J^s \partial_x g\rangle_0 = -p\left\langle J^s g, g^{p-1}\partial_x g J^s f\right\rangle_0 - \langle J^s g, g^p J^s \partial_x f\rangle_0 ,$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\partial_t\left[\|J^s u\|_0^2 + \|J^s v\|_0^2\right] \\
&\qquad = -\langle J^s u, [J^s, u^p]\,\partial_x u\rangle_0 - \langle J^s u, u^p J^s \partial_x u\rangle_0 \\
&\qquad - \langle J^s u, [J^s, v^p]\,\partial_x v\rangle_0 - \langle J^s v, [J^s, v^p]\,\partial_x v\rangle_0 \\
&\qquad - \langle J^s v, v^p J^s \partial_x v\rangle_0 - p\left\langle J^s v, \left[J^s, v^{p-1} u\right]\partial_x v\right\rangle_0 \\
&\qquad -p\left\langle J^s v, v^{p-1} u J^s \partial_x v\right\rangle_0 - \langle J^s v, [J^s, v^p]\,\partial_x u\rangle_0 \\
&\qquad +p\left\langle J^s v, v^{p-1}\partial_x v J^s u\right\rangle_0 .
\end{aligned} \tag{22}$$

Ahora, estimamos cada uno de los términos del segundo miembro de (22). Usando la desigualdad de Hölder, la proposición 1, $\left\|J^{s-1}\partial_x u\right\|_0 = \|u\|_s$, $\|J^s u^p\|_0 \leq C\,\|u\|_{L^\infty}^{p-1}\|u\|_s$ y $\|\partial_x u^p\|_{L^\infty} = p\,\|u\|_{L^\infty}^{p-1}\|\partial_x u\|_{L^\infty}$ e integración por partes obtenemos

$$\begin{aligned}
|\langle J^s u, [J^s, u^p]\,\partial_x u\rangle_0| &\leq C\left(\|\partial_x u^p\|_{L^\infty}\left\|J^{s-1}\partial_x u\right\|_0\right. \\
&\qquad \left.+ \|J^s u^p\|_0\,\|\partial_x u\|_{L^\infty}\right)\|u\|_s \\
&\leq C\,\|u\|_{L^\infty}^{p-1}\,\|\partial_x u\|_{L^\infty}\,\|u\|_s^2 ,
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
|\langle J^s u, u^p J^s \partial_x u\rangle_0| &= |\langle u^p, J^s u \partial_x J^s u\rangle_0| \\
&\leq C\left\|u^{p-1}\partial_x u\right\|_{L^\infty}\|J^s u\|_0^2 \\
&\leq C\,\|u\|_{L^\infty}^{p-1}\,\|\partial_x u\|_{L^\infty}\,\|u\|_s^2 ,
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}\left|\left\langle J^s v, v^{p-1} u J^s \partial_x v\right\rangle_0\right| &\leq C\left|\left\langle (p-1)\, v^{p-2} u \partial_x v, \left(J^s v\right)^2\right\rangle_0\right| \\ &\quad + C\left|\left\langle v^{p-1} \partial_x u, \left(J^s v\right)^2\right\rangle_0\right| \\ &\leq C \left\|v\right\|_{L^\infty}^{p-2} \left\|\partial_x v\right\|_{L^\infty} \left\|u\right\|_{L^\infty} \left\|v\right\|_s^2 \\ &\quad + C \left\|v\right\|_{L^\infty}^{p-1} \left\|\partial_x u\right\|_{L^\infty} \left\|v\right\|_s^2 \end{aligned} \tag{25}$$

y

$$\begin{aligned}\left|\left\langle J^s v, v^{p-1} \partial_x v J^s u\right\rangle_0\right| &\leq \left\|v^{p-1}\partial_x v\right\|_{L^\infty} \left\|J^s v\right\|_0 \left\|J^s u\right\|_0 \\ &\leq \left\|v\right\|_{L^\infty}^{p-1} \left\|\partial_x v\right\|_{L^\infty} \left\|v\right\|_s \left\|u\right\|_s . \end{aligned} \tag{26}$$

Con los mismos procedimientos empleados para la deducción de (23), (24), (25) y (26) tenemos

$$\left|\left\langle J^s v, \left[J^s, v^p\right] \partial_x v\right\rangle_0\right| \leq C \left\|v\right\|_{L^\infty}^{p-1} \left\|\partial_x v\right\|_{L^\infty} \left\|v\right\|_s^2 , \tag{27}$$

$$\left|\left\langle J^s v, v^p J^s \partial_x v\right\rangle_0\right| \leq C \left\|v\right\|_{L^\infty}^{p-1} \left\|\partial_x v\right\|_{L^\infty} \left\|v\right\|_s^2 , \tag{28}$$

$$\left|\left\langle J^s u, \left[J^s, v^p\right] \partial_x v\right\rangle_0\right| \leq C \left\|v\right\|_{L^\infty}^{p-1} \left\|\partial_x v\right\|_{L^\infty} \left\|v\right\|_s \left\|u\right\|_s , \tag{29}$$

$$\left|\left\langle J^s v, \left[J^s, v^p\right] \partial_x u\right\rangle_0\right| \leq C \left\|v\right\|_{L^\infty}^{p-1} \left\|\partial_x u\right\|_{L^\infty} \left\|v\right\|_s , \tag{30}$$

$$\begin{aligned}\left|\left\langle J^s v, \left[J^s, v^{p-1} u\right] \partial_x v\right\rangle_0\right| &\leq C \Big( \left\|v\right\|_{L^\infty}^{p-1} \left\|\partial_x u\right\|_{L^\infty} \\ &\quad + \left\|v\right\|_{L^\infty}^{p-2} \left\|u\right\|_{L^\infty} \left\|\partial_x v\right\|_{L^\infty} \Big) \left\|v\right\|_s^2 \\ &\quad + C \left\|v\right\|_{L^\infty}^{p-1} \left\|\partial_x v\right\|_{L^\infty} \left\|u\right\|_s \left\|v\right\|_s . \end{aligned} \tag{31}$$

Entonces usando todos los estimados obtenidos en (23) al (31) se tiene que (22) es equivalente a

$$\frac{1}{2}\partial_t \left[\left\|J^s u\right\|_0^2 + \left\|J^s v\right\|_0^2\right] \leq C\Psi\left(r\right) \left[\left\|u\right\|_s^2 + \left\|v\right\|_s^2\right] \tag{32}$$

donde

$$\begin{aligned}\Psi(r) &= \|u\|_{L^\infty}^{p-1}\|\partial_x u\|_{L^\infty} + \|v\|_{L^\infty}^{p-1}\|\partial_x v\|_{L^\infty} \\ &\quad + \|v\|_{L^\infty}^{p-1}\|\partial_x u\|_{L^\infty} + \|v\|_{L^\infty}^{p-2}\|\partial_x v\|_{L^\infty}\|u\|_{L^\infty}.\end{aligned}$$

Finalmente, integrando a (32) desde cero hasta $t \leq T_0$

$$\int_0^t \frac{1}{2}\partial_t\left[\|u\|_s^2 + \|v\|_s^2\right] dr \leq C\int_0^t \Psi(r)\left[\|u\|_s^2 + \|v\|_s^2\right] dr$$

se obtiene que

$$\|U(t)\|_{\mathbf{H}^s} \leq \|U_0\|_{\mathbf{H}^s} + C\int_0^t \Psi(r)\|U(r)\|_{\mathbf{H}^s}\, dr \tag{33}$$

y aplicando la desigualdad de Gronwall en (33) se tiene que

$$\|U(t)\|_{\mathbf{H}^s} \leq \|U_0\|_{\mathbf{H}^s}\exp\left(C\int_0^t \Psi(r)\, dr\right), \tag{34}$$

ahora tomamos el supremo en (34)

$$\sup_{t\in[0,T_0]}\|U(t)\|_{\mathbf{H}^s} \leq C\|U_0\|_{\mathbf{H}^s}\exp\left(C\int_0^{T_0}\Psi(r)\, dr\right)$$

con lo cual concluimos la prueba del teorema 8. □

Para extender la solución local del sistema (12) obtenida en el capítulo anterior es suficiente demostrar que la función $\Psi(r)$ dada por (17) es acotada para todo $r \geq 0$.

Sabemos que si $U$ es la solución del sistema no lineal (12) cuando el dato inicial es $U_0 \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$, $s > \frac{3}{2}$, entonces

$$U(t) = W_0(t)U_0 + \int W(t-r)F(r)\, dr \tag{35}$$

donde

$$F(r) = \left(u^p\partial_x u + v^p\partial_x v, v^p\partial_x v + \partial_x(uv^p)\right). \tag{36}$$

**Teorema 9.** *Supongamos que en el problema (1), $|\alpha| < 1$ y $p \geq 1$ un número entero. Si $U_0 \in \mathbf{H}_1^1(\mathbf{R}) \cap \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ con $s \geq 2$, entonces*

$$\|W_0(t)\,U_0\|_{\mathbf{H}^1_\infty} \leq C\,\|U_0\|_{\mathbf{H}^1_1}\,t^{-1/3} \tag{37}$$

*y*

$$\|F(r)\|_{\mathbf{H}^1_1} \leq C\,\|U(t)\|^{p-1}_{\mathbf{H}^1_\infty}\,\|U(t)\|_{\mathbf{H}^2} \tag{38}$$

**Prueba.** Por el teorema 5, $U(t) = W_0(t)\,U_0$ para $t \geq 0$ es la única solución del problema de valor inicial (2) - (3), donde $\{W_0(t)\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo de contracciones en $\mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ generado por $-A_0$ definido en (6).

Observemos que por densidad la proposición 6 se cumple para $U_0 \in H_1^1(\mathbf{R}) \cap H^s(\mathbf{R})$. Luego por (6) se deduce que

$$\begin{aligned}\|U(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq\ & C\left[\left\|E^+(t)\,u_0\right\|_{L^\infty} + \left\|E^-(t)\,u_0\right\|_{L^\infty}\right.\\ & \left.+\left\|E^-(t)\,v_0\right\|_{L^\infty} + \left\|E^+(t)\,v_0\right\|_{L^\infty}\right].\end{aligned} \tag{39}$$

Por el teorema 6

$$\begin{aligned}\|U(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq C\left[t^{-1/3}\,\|u_0\|_{L^1} + t^{-1/3}\,\|u_0\|_{L^1} + t^{-1/3}\,\|v_0\|_{L^1}\right.\\ &\quad\left.+\,t^{-1/3}\,\|v_0\|_{L^1}\right]\\ &\leq Ct^{-1/3}\left[\|u_0\|_{L^1} + \|v_0\|_{L^1}\right].\end{aligned} \tag{40}$$

Ahora consideremos la derivada con respecto a la variable espacial del problema (2) - (3),

$$\begin{cases}\partial_t(\partial_x u) + \partial_x^3(\partial_x u) + \alpha\partial_x^3(\partial_x v) = 0\\ \partial_t(\partial_x v) + \partial_x^3(\partial_x v) + \alpha\partial_x^3(\partial_x u) = 0\\ \partial_x u(x,0) = \partial_x u_0(x)\\ \partial_x v(x,0) = \partial_x v_0(x).\end{cases} \tag{41}$$

Así $(\partial_x u, \partial_x v)$ es la solución de (41), entonces con cálculos similares a los realizados para deducir (40), obtenemos

$$\|\partial_x U(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C\left(\|\partial_x u_0\|_{L^1} + \|\partial_x v_0\|_{L^1}\right)t^{-1/3}. \tag{42}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\|W_0(t)\,U_0\|_{\mathbf{H}^1_\infty} &= \|u(t)\|_{L^\infty} + \|\partial_x u(t)\|_{L^\infty} \\
&\quad + \|v(t)\|_{L^\infty} + \|\partial_x v(t)\|_{L^\infty} \\
&\leq C\left(\|u_0\|_{L^1} + \|\partial_x u_0\|_{L^1}\right) t^{-1/3} \\
&\quad + C\left(\|v_0\|_{L^1} + \|\partial_x v_0\|_{L^1}\right) t^{-1/3} \\
&= C\,\|U_0\|_{\mathbf{H}^1_1}\, t^{-1/3}, \qquad (43)
\end{aligned}$$

lo que prueba (37). Para probar (38), sea $F = (f_1, f_2)$ donde $f_1 = u^p\partial_x u + v^p\partial_x v$ y $f_2 = v^p\partial_x v + \partial_x(uv^p)$. Por la igualdad $\|J^s(u^p\partial_x u)\|_{L^1} = \left\|u^{p-1}J^s u\partial_x u\right\|_{L^1}$ válida para $u, v \in H^s(\mathbf{R})$, $s \geq 0$ y $p \geq 1$, la desigualdad de Hölder y la proposición 1 obtenemos

$$\begin{aligned}
\|f_1\|_{H^1_1} &\leq \left\|u^{p-1}J(u\partial_x u)\right\|_{L^1} + \left\|v^{p-1}J(v\partial_x v)\right\|_{L^1} \\
&\leq \left\|u^{p-1}\right\|_{L^\infty}\|J(u\partial_x u)\|_{L^1} + \left\|v^{p-1}\right\|_{L^\infty}\|J\partial_x v\|_{L^1} \\
&\leq C\left(\left\|u^{p-1}\right\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}\|J\partial_x u\|_{L^2}\right. \\
&\quad \left. + \left\|v^{p-1}\right\|_{L^\infty}\|v\|_{L^2}\|J\partial_x v\|_{L^2}\right) \\
&\leq C\left(\left\|u^{p-1}\right\|_{L^\infty}\|u\|_2^2 + \left\|v^{p-1}\right\|_{L^\infty}\|v\|_2^2\right) \qquad (44)
\end{aligned}$$

y por cálculos similares tenemos que

$$\begin{aligned}
\|f_2\|_{H^1_1} &\leq C\left(\left\|v^{p-1}\right\|_{L^\infty}\|v\|_2^2 + \left\|v^{p-1}\right\|_{L^\infty}\|u\|_2\|v\|_2\right. \\
&\quad \left. + \left\|v^{p-2}\right\|_{L^\infty}\|u\|_2\|v\|_2^2\right). \qquad (45)
\end{aligned}$$

de (44) y (45) se obtiene

$$\begin{aligned}
\|F(r)\|_{\mathbf{H}^1_1} &\leq C\left[\left\|u^{p-1}\right\|_{L^\infty}\|u\|_2^2 + \left\|v^{p-1}\right\|_{L^\infty}\|v\|_2^2\right. \\
&\quad \left. + \left\|v^{p-1}\right\|_{L^\infty}\|u\|_2\|v\|_2 + \left\|v^{p-2}\right\|_{L^\infty}\|u\|_2\|v\|_2^2\right]. \\
&\leq C\,\|U(t)\|_{\mathbf{H}^1_\infty}^{p-1}\|U(t)\|_{\mathbf{H}^2}
\end{aligned}$$

y concluye la demostración. □

**Teorema 10.** *Supongamos que en el problema (1),* $|\alpha| < 1$ *y* $p > 4$ *es un número entero,* $U_0 \in \mathbf{H}_1^1(\mathbf{R}) \cap \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ *con* $s \geq 2$. *Si existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$\|U_0\|_{\mathbf{H}_1^1} + \|U_0\|_{\mathbf{H}^s} < \delta, \tag{46}$$

$\|U_0\|_{\mathbf{H}_1^1} + \|U_0\|_{\mathbf{H}^s} < \delta$,*entonces existe* $U \in C([0,\infty[, \mathbf{H}^s(\mathbf{R}))$ *única solución global de (1) tal que*

$$\sup_{t\in[0,\infty[} (1+t)^{1/3} \|U(t)\|_{\mathbf{H}_\infty^1} < +\infty.$$

**Prueba.** Sea $[0, T^*[$ el intervalo máximo de existencia de la solución $U$ de (1). La desigualdad (38) muestra que para cualquier $t \in [0, T^*[$, $U \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R}) \cap \mathbf{H}_\infty^1(\mathbf{R})$. Tomando la norma en $\mathbf{H}_\infty^1$ en la ecuación (35) y usando la desigualdad triangular

$$\|U(t)\|_{\mathbf{H}_\infty^1} \leq \|W_0(t)U_0\|_{\mathbf{H}_\infty^1} + \int_0^t \|W(t-r)F(r)\|_{\mathbf{H}_\infty^1} dr. \tag{47}$$

Las desigualdades (37) y (46) implican

$$\|W_0(t)U_0\|_{\mathbf{H}_\infty^1} \leq C\|U_0\|_{\mathbf{H}_1^1} t^{-1/3} < C\delta t^{-1/3}, \tag{48}$$

además, como $\{W_0(t)\}_{t\in\mathbf{R}}$ es un grupo de contracciones tenemos

$$\begin{aligned} \|W_0(t-r)F(r)\|_{\mathbf{H}_\infty^1} &= \|W_0(-1)W_0(1+t-r)F(r)\|_{\mathbf{H}_\infty^1} \\ &\leq \|W_0(1+t-r)F(r)\|_{\mathbf{H}_\infty^1} \\ &\leq C(1+t-r)^{-1/3}\|F(r)\|_{\mathbf{H}_1^1}. \end{aligned} \tag{49}$$

Usando los estimados (48) y (49) en (47) se tiene que

$$\|U(t)\|_{\mathbf{H}_\infty^1} \leq C\delta t^{-1/3} + C\int_0^t (1+t-r)^{-1/3}\|F(r)\|_{\mathbf{H}_1^1} dr. \tag{50}$$

De (38)

$$\|F(r)\|_{\mathbf{H}^1_1} \leq C(1+r)^{\frac{p-1}{3}} \|U(t)\|^{p-1}_{\mathbf{H}^1_\infty} (1+r)^{\frac{1-p}{3}} \|U(t)\|_{\mathbf{H}^2}.$$

Definiendo la función $m(\cdot)$ por

$$m(T) = \sup_{0\leq t\leq T} (1+t)^{1/3} \|U(t)\|_{\mathbf{H}^1_\infty}, \tag{51}$$

que es continua, no negativa y creciente, usando (51) y el teorema 8 sigue que

$$\|F(r)\|_{\mathbf{H}^1_1} \leq Cm^{p-1}(T)(1+r)^{\frac{1-p}{3}} \|U_0\|_{\mathbf{H}^2} \exp\left(c\int_0^r \Psi(\tau)\,d\tau\right) \tag{52}$$

De (50) y (46) deducimos que

$$\begin{aligned}
\|U(t)\|_{\mathbf{H}^1_\infty} - C\delta t^{-1/3} &\leq C\delta m^{p-1}(T)\exp\left(c\int_0^t \Psi(\tau)\,d\tau\right) \times \\
&\quad \int_0^t (1+t-r)^{-\frac{1}{3}}(1+r)^{\frac{1-p}{3}}\,dr \\
&\leq C\delta m^{p-1}(T)\exp(cm^p(T)) \times \\
&\quad \int_0^t (1+t-r)^{-\frac{1}{3}}(1+r)^{\frac{1-p}{3}}\,dr \\
&\leq C\delta m^{p-1}(T)\exp(cm^p(T))(1+t)^{-\frac{1}{3}}
\end{aligned} \tag{53}$$

donde hemos usado que $\Psi(r) \leq C\|U(t)\|^p_{\mathbf{H}^1_\infty}$, para $p \geq 4$ y la proposición 2 con $\beta_1 = \alpha_0 = \dfrac{1}{3}$, $\alpha_1 = \dfrac{p-1}{3}$. Ahora, multiplicando por $(1+t)^{1/3}$ a (53) obtenemos que

$$\begin{aligned}
(1+t)^{1/3}\|U(t)\|_{\mathbf{H}^1_\infty} &\leq C\delta t^{-1/3}(1+t)^{1/3} \\
&\quad + C\delta m^{p-1}(T)\exp(cm^p(T)) \\
&\leq C\delta\left[1 + m^{p-1}(T)\exp(cm^p(T))\right]
\end{aligned} \tag{54}$$

donde la función $f(t) = t^{-1/3}(1+t)^{1/3}$ es decreciente y alcanza el máximo valor cuando $t$ se aproxima a cero. Además, la constante $C$ es independiente de $T$.

Tomemos el supremo a la desigualdad (54)

$$\sup_{0\le t\le T}(1+t)^{1/3}\|U(t)\|_{\mathbf{H}^1_\infty} \\ \le \sup_{0\le T\le T^*} C\delta\left\{1+m^{p-1}(T)\exp\left(cm^p(T)\right)\right\}.$$

Del teorema 8 se tiene

$$m(T)\le \sup_{0\le T\le T^*} C\delta\left\{1+m^{p-1}(T)\exp\left(cm^p(T)\right)\right\},$$

entonces la proposición 3 implica que

$$m(T)\le C\delta + C\delta m^{p-1}(T)\exp\left(cm^p(T)\right).$$

Luego, $m(T)$ es acotado para todo $0\le T\le T^*$. Este estimado a priori y un argumento usual de extensión sigue la existencia y unicidad de la solución global. El comportamiento asintótico es inmediato de (51). □

# Referencias

[1] R. A. ADAMS: *Sobolev spaces.* Academic Press. New York, (1975).

[2] J. ALBERT, J. L. BONA, J. C. SAUT: *Model equations for waves in stratified.* Proc. Royal Soc. London A, 453 (1997).

[3] J. BERGH, J. LOFSTROM: *Interpolation Spaces.* Springer-Verlag, N. York, (1970), 139-142.

[4] E. BISOGNIN, V. BISOGNIN y G. P. MENZALA: *On the asymptotic Behaviour in the time of the solutions of a coupled system of kdV Equations.* Laboratorio Nacional de Computación científica, N°09/95.

[5] J. Bona, G. Ponce, J. C. Saut y M. Tom: *A model system for strong interaction between internal solitary waves.* Comm. Math. Phys. 143 (1992).

[6] T. Cazenave, A. Haraux: *Introduction aux problèmes d'evolution semi-linéaires.* Mathématiques et Applications 1, Ellipses, Paris, (1990).

[7] J. A. Gear y R. Grimshaw: *Weak and strong interactions between internal solitary waves.* Stud. Appl. Math., **65**, (1984) 235-258.

[8] R. J. Iorio Jr., V. Iorio: *Fourier analysis and partial differential equations.* Cambridge University Press, N. York, (2001).

[9] T. Kato y G. Ponce: *Conmutators estimates and the Euler and Navier-Stokes equatios.* Comm. Pure Applied Math, (1988) 891-907.

[10] T. Kato: *Quasi-linear equations of evolution, with applications to partial differential equations.* Lecture and Notes in Mathematics, 448 (1975) 25-70.

[11] T. Kato: *On the Korteweg-de Vries equation.* Manuscripta Math., 28 (1979) 89-99.

[12] C. E. Kening, G. Ponce y L. Vega: *On the (Generalized) Korteweg-de Vries Equation.* Duke Math. Journal, Vol. 53, No. 3 (1989) 588-592.

[13] R. Racke: *Lectures on nonlinear evolution equations.* Initial Value Problems, (1982) 88-90.

[14] J. C. Saut, R. Teman: *Remarks on the Korteweg-de Vries equation.* Israel J. of Math., 24 (1976) 78-87.

[15] W. Strauss: *Decay and asymtotics for* $\Box u = F(u)$. J. Functional Analysis, 2 (1968) 409-457.

**Abstract**

In this paper we prove that the initial value problem associated with the coupled system of Korteweg - Vries equations

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \alpha \partial_x^3 v + u^p \partial_x u + v^p \partial_x v = 0 \\ \partial_t v + \partial_x^3 v + \alpha \partial_x^3 u + v^p \partial_x v + \partial_x (uv^p) = 0 \end{cases}$$

for $p \geq 4$, has a unique global solution and its asymptotic behavior in time satisfies

$$\sup_{t \in [0,\infty[} (1+t)^{1/3} \|U(t)\|_{\mathbf{H}^1_\infty} < +\infty.$$

**Key words:** Dispersive systems, Kato's theory, stationary phase, asymptotic behavior.

Gladys Cruz Yupanqui
Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional San Cristóbal de Huamanga
`gladyscy6@hotmail.com`

Juan Montealegre Scott
Sección Matemática, Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú
`jmscott@pucp.edu.pe`