Pro Mathematica, XIX, 37-38, (2005), 73-90

SINGULARIDADES SIMPLES NO-DICRÍTICAS

Percy Fernández Sánchez[1]

Resumen

En este artículo de divulgación clasificamos las singularidades simples no-dicríticas utilizando las técnicas de Martinet [5]. Todo este material es inspirado en los artículos: Cano-Cerveau [3], Cano [2] y Fernández-Mozo [4]

Palabras Clave: *Foliaciones, Singularidades. reducción de singularidades*

1. *IMCA-UNI-PUCP.*

Introducción

Consideremos una foliación $\mathcal{F} : \omega = 0$ definida en una vecindad de $0 \in \mathbb{C}^2$ por una 1-forma holomorfa ω. El origen 0 es una *singularidad* de $\mathcal{F}$ si $\omega(0) = 0$.

Las singularidades de una foliación son importantes para entender el comportamiento (topológico y geométrico) de las hojas en una vecindad de estos puntos. Las singularidades más sencillas son las singularidades de campos lineales, y algunas singularidades que tienen parte lineal, como por ejemplo aquéllas cuyos cocientes de sus autovalores no es real negativo, *dominio de Poincaré*, y aquéllas donde este cociente es real negativo, *dominio de Siegel.* Estas singularidades junto con algunas propiedades diofánticas son linealizables. Sin embargo, las foliaciones que no tienen parte lineal se les pueden aplicar un proceso, llamado *reducción de singularidades*, que transforma estas singularidades en un número finito de singularidades con parte lineal y de comportamiento relativamente simple.

La singularidad $0 \in \mathbb{C}^2$ es *simple*, si la parte lineal de ω es no nula y los autovalores λ_1, λ_2 del campo dual de esta parte lineal satisfacen:

1. Simple: $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ y $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}^+$.

2. Silla nodo: $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 \neq 0$ ó $\lambda_1 \neq 0$ y $\lambda_2 = 0$.

Por el Teorema de Seidenberg [6] toda singularidad se puede reducir a singularidades simples mediante un número finito de explosiones.

Las singularidades simples han sido estudiadas muchos años antes de la publicación del Teorema de Seidenberg, lográndose formas normales para muchos tipos de estas singularidades; por ejemplo las formas normales de Poincaré, Dulac y Siegel. Posterior a esta publicación se ha estudiado algunos aspectos dinámicos de estos tipos de singularidades [1]. Cuando el ambiente tiene dimensión mayor a dos, aun no se conoce una forma de reducir las singularidades, excepto cuando la foliación es de codimensión 1 y el ambiente donde esta definida la foliación es tres, este resultado es debido a Cano y Cerveau [3] en el caso no-dicrítico y Cano [2] en el caso dicrítico. Nos proponemos estudiar formalmente las singularidades con parte cuadrática que aparecen después de un número finito de explosiones, estas formas son llamadas *simples* y generalizan las singularidades *simples* en dimensión dos.

Preliminares

Sea X una variedad compleja. Denotemos:

1. $\mathcal{O}_{X,p}$ $(\hat{\mathcal{O}}_{X,p})$ el anillo local de gérmenes de funciones holomorfas (formales) sobre la variedad X en el punto p.

2. $\Theta_{X,p}$ $(\hat{\Theta}_{X,p})$ el espacio de gérmenes de campos holomorfos (formales) sobre X en el punto p.

3. $\mathcal{M} := \mathcal{M}_{X,p}$ $(\hat{\mathcal{M}} := \hat{\mathcal{M}}_{X,p})$ el ideal maximal del anillo $\mathcal{O}_{X,p}$ $(\hat{\mathcal{O}}_{X,p})$.

Mediante un campo vectorial holomorfo $D \in \hat{\mathcal{M}}\hat{\Theta}_{X,p}$ y un entero $k \geq 1$, tenemos inducida una derivación:

$$\begin{array}{rcl} D^k : \mathcal{M}/\mathcal{M}^{k+1} & \rightarrow & \mathcal{M}/\mathcal{M}^{k+1} \\ f + \mathcal{M}^{k+1} & \rightarrow & D(f) + \mathcal{M}^{k+1}. \end{array}$$

De la igualdad $\hat{\mathcal{M}}/\hat{\mathcal{M}}^{k+1} = \mathcal{M}/\mathcal{M}^{k+1}$, no hay inconveniente en sustituir $\mathcal{M}$ por $\hat{\mathcal{M}}$ en la definición D^k. Por la forma normal de Jordan, el operador lineal D^k puede escribirse como:

$$D^k = D_S^k + D_N^k \quad \text{donde} \quad [D_S^k, D_N^k] = 0$$

Así, D_S^k y D_N^k son derivaciones del espacio $\mathcal{M}/\mathcal{M}^{k+1}$ como un $\hat{\mathcal{O}}_{X,p}$-módulo. Por la unicidad de la descomposición de Jordan podemos tomar límites

$$D_S = \text{lím}\, D_S^k, \quad D_N = \text{lím}\, D_N^k.$$

los cuales serán campos vectoriales formales de X en p, esto es, $D_S, D_N \in \hat{\Theta}_{X,p}$; además, satisfacen

$$D = D_S + D_N; \quad [D_S, D_N] = 0$$

D es llamado *semisimple* (*nilpotente*) si $D_N = 0$ ($D_S = 0$).

Proposición 1. *Sea $D \in \hat{\mathcal{M}}\hat{\Theta}_{X,p}$ un campo vectorial semisimple y $n = \dim X$. Supongamos que existe una secuencia $(x'_1, \ldots, x'_s)$, $1 \leq s \leq n$, $\hat{\mathcal{M}}$-regular en $\hat{\mathcal{O}}_{X,p}$ tal que*

$$D(x'_i) = \lambda'_i x'_i, \quad \lambda'_i \in \mathbb{C}, \quad i = 1, \ldots, s.$$

Entonces existe una secuencia regular de parámetros $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\hat{\Theta}_{X,p}$ tal que

$$\begin{aligned} D(x_i) &= \lambda_i x_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{C}, \quad i = 1, \ldots, n \\ x_i &= x'_i; \quad \lambda_i = \lambda'_i, \quad i = 1, \ldots, s. \end{aligned}$$

Prueba: $(x'_1, \ldots, x'_s)$ da una parte de una base de autovalores para los D^k. Completamos esta base y tomamos límites cuando $s \to \infty$.

□

Sean $D \in \hat{\mathcal{M}}\hat{\Theta}_{X,p}$ un campo formal anulándose en el punto p, y $(x_1, \ldots, x_n)$ un sistema formal linealizable para D_S con autovalores $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ respectivamente. Adoptaremos las siguientes notaciones:

$$\begin{aligned} I &= (i_1, \ldots, i_k) \in \mathbb{N}^k, \quad x^I = x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} \\ \langle \lambda, I \rangle &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j i_j, \quad |I| = \sum_{j=1}^{n} i_j \end{aligned}$$

Ahora por la Proposición 1, $D_S = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \dfrac{\partial}{\partial x_j}$. Luego,

$$\begin{aligned}
D_S\left(x^I \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(x^I \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \left(j x^I x_j^{-1} \frac{\partial f}{\partial x_i} + x^I \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} j \lambda_j x^I \frac{\partial}{\partial x_i} + x^I \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \\
&= x^I \langle \lambda, I \rangle \frac{\partial f}{\partial x_i} + x^I \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
x^I \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) &= x^I \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \\
&= x^I \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + x_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) \\
&= x^I \lambda_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + x^I \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
[D_S, x^I \frac{\partial}{\partial x_i}](f) &= D_S\left(x^I \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) - x^I \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \\
&= (\langle \lambda, I \rangle - \lambda_i) x^I \frac{\partial f}{\partial x_i}
\end{aligned}$$

De esto se desprende que $x^I \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ son autovectores de D_S con autovalores $\langle \lambda, I\rangle - \lambda_i$. Escribamos D_N como una serie formal

$$D_N = \sum_{j=1}^{n} \sum_{|I|\geq 1} a_{I,j} x^I \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Por la condición $[D_S, D_N] = 0$ tenemos

$$0 = [D_S, D_N] = \sum_{j=1}^{n} \sum_{|I|\geq 1} a_{I,j}[D_S, x^I \frac{\partial}{\partial x_j}] = \sum_{j=1}^{n} \sum_{|I|\geq 1} a_{I,j}((\langle \lambda, I\rangle - \lambda_j) x^I \frac{\partial}{\partial x_i}$$

entonces $a_{I,j}((\langle \lambda, I\rangle - \lambda_j) = 0$ para $j = 1, \ldots, n$ y $|I| \geq 1$ de esto tenemos que si $((\langle \lambda, I\rangle - \lambda_j) \neq 0$ entonces $a_{I,j} = 0$. Luego

$$D = D_S + D_N = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{|I|\geq 1 \\ \langle \lambda, I\rangle = \lambda_j}} a_{I,j} x^I \frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{1}$$

Esta fórmula puede ser generalizada para álgebras abelianas finitas generadas de campos vectoriales formales.

Proposición 2. *Sea $\mathfrak{G} \subset \hat{\mathcal{M}}\hat{\Theta}_{X,p}$ un álgebra de Lie abeliano finita dimensional. Entonces:*

1. *Existen dos álgebras finitas dimensionales $\mathfrak{G}_1$ y $\mathfrak{G}_2$ en $\hat{\mathcal{M}}\hat{\Theta}_{X,p}$ tales que*

   a) $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{G}_1 \oplus \mathfrak{G}_2 \quad y \quad [\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2] = 0.$

   b) *Si $D \in \mathfrak{G}_1$ (respectivamente $D \in \mathfrak{G}_2$) entonces D es semi-simple (respectivamente nilpotente).*

2. *Sea $(x_1', \ldots, x_s')$ una secuencia $\hat{\mathcal{M}}$-regular en $\hat{\mathcal{M}}\hat{\Theta}_{X,p}$ tal que para todo $D \in \mathfrak{G}$*

$$D_s(x_i) = \lambda_i(D) x_i, \quad \lambda_i(D) \in \mathbb{C}, \quad i = 1, \ldots, n$$

$$x_i = x_i', \quad \lambda_i(D) = \lambda_i'(D), \quad \textit{para todo } D \in \mathfrak{G} \textit{ y } i = 1, \ldots, s.$$

Prueba: Vea [3] □

Por la proposición anterior existen coordenadas formales $(x_1, \ldots, x_n)$ que linealizan D_S para todo $D \in \mathfrak{G}$. Dado $D \in \mathfrak{G}$, denote por $\lambda(D) = (\lambda_1(D), \ldots, \lambda_n(D))$ los correspondientes autovalores. Tomemos un campo genérico $Z \in \mathfrak{G}$ como en la prueba de la proposición anterior [3]. La condición $[Z_S, D_N] = 0$ significa que $D = D_S + D_N$ puede ser escrito como

$$D = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(D) x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{|I| \geq 1 \\ (\lambda(D), I) = \lambda_j(D),\ \forall\ D \in \mathfrak{G}}} a_{I,j}(D) x^I \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Clasificación de la Singularidades Pre-simples

Sea X una variedad compleja. Dado $p \in X$, consideremos el subespacio

$$\mathcal{D}(\omega)(p) = \{D(p) : \ D \in \Theta_{X,p} \quad y \quad \omega(D) = 0\}$$

de T_pX. La codimensión de $\mathcal{D}(\omega)(p)$ en T_pX es llamado el *tipo dimensional* denotado por $t = \tau(\mathcal{F}, p)$.

Sea $E \subset X$ un divisor a cruzamientos normales tal que las componentes irreducibles de E son no-dicríticas ($\mathcal{F}$-invariantes).

Denotemos por $e = e(E, p)$ el número de la componentes irreducibles de E a través de p. Claramente $e \leq t$. Así, podemos tomar coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ alrededor del punto $p = (0, \ldots, 0)$ y $A \subset \{1, \ldots, t\}$ tal que

$$E = \left\{ \prod_{i \in A} x_i = 0 \right\}$$

y entonces ω es escrito como

$$\omega = \prod_{i\in A} x_i \left(\sum_{i\in A} b_i(x_1,\ldots,x_t)\frac{dx_i}{x_i} + \sum_{i\in\{1,\ldots,t\}-A} b_i(x_1,\ldots,x_t)dx_i \right) \tag{2}$$

Definimos el *orden adaptado*:

$$\nu(F,E,p) = \text{mín}\{\nu_p(b_i) : i\ldots,t\},$$

donde $\nu_p(b_i)$ es la multiplicidad algebraica de b_i en p. Definimos también la *multiplicidad adaptada*

$$\mu(\mathcal{F},E,p) = \text{mín}\{\nu_p(b_i)\}_{i\in A} \cup \{\nu_p(b_i)+1\}_{i\notin A}.$$

Por definición tenemos las siguientes desigualdades

$$\nu(\mathcal{F},E,p) \le \mu(\mathcal{F},E,p) \le \nu(\mathcal{F},E,p)+1.$$

Veamos algunos casos particulares

1. $n=2$, $E=\{x_1=0\}$, $t=2$

$$\begin{aligned}\omega &= x_1\left(b_1(x_1,x_2)\frac{dx_1}{x_1} + b_2(x_1,x_2)dx_2\right)\\ &= b_1(x_1,x_2)dx_1 + x_1 b_2(x_1,x_2)dx_2.\end{aligned}$$

2. $n=3$, $E=\{x_1x_3=0\}$, $t=3$

$$\begin{aligned}\omega &= x_1x_3\left(b_1(x_1,x_2,x_3)\frac{dx_1}{x_1} + b_2(x_1,x_2,x_3)dx_2 + b_3(x_1,x_2,x_3)\frac{dx_3}{x_3}\right)\\ &= x_3b_1(x_1,x_2,x_3)dx_1 + x_1x_3b_2(x_1,x_2,x_3)dx_2 + x_1b_3(x_1,x_2,x_3)dx_3.\end{aligned}$$

3. $n=3$, $E=\{x_1x_3=0\}$, $t=3$

$$\begin{aligned}\omega &= x_1x_3\left(b_1(x_1,x_2,x_3)\frac{dx_1}{x_1} + b_2(x_1,x_2,x_3)dx_2 + b_3(x_1,x_2,x_3)\frac{dx_3}{x_3}\right.\\ &\quad \left.+b_4(x_1,x_2,x_3)dx_4\right)\\ &= x_4b_1(x_1,x_2,x_3)dx_1 + x_1x_3b_2(x_1,x_2,x_3)dx_2 + x_1b(x_1,x_2,x_3)dx_3\\ &\quad + x_1x_3b_4(x_1,x_2,x_3)dx_4.\end{aligned}$$

Definición 1. Una singularidad $p \in \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ es llamada *pre-simple* de $\mathcal{F}$ adaptada a E si y sólo si una de las siguientes propiedades valen:

1. $\nu(\mathcal{F}, E, p) = 0$
2. $\nu(\mathcal{F}, E, p) = \mu(\mathcal{F}, E, p) = 1$ y existe un i tal que la parte lineal b_i^1 de b_i no depende solamente de las variables $\{x_i : i \in A\}$.

El lector puede observar que en dimensión 2 una singularidad simple corresponde a una singularidad de multiplicidad 1 que no es *nilpotente*, esto es, los campos cuya parte lineal tiene sus dos autovalores nulos.

Definición 2. Una singularidad $p \in \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ es llamada *simple* de $\mathcal{F}$ adaptada a E si y solo si formalmente equivalente a una de las formas:

1. Existen $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, s$, tal que

$$\omega = \prod_{i=1}^{s} x_i \left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i \frac{dx_i}{x_i} \right)$$

   y para todo $n_1, \ldots, n_s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ no todos nulos tenemos $\sum_{i=1}^{s} n_i \lambda_i \neq 0$.

2. Existe un entero k, $1 \leq k \leq s$ tal que

$$\omega = \prod_{i=1}^{s} x_i \left(\sum_{i=1}^{k} p_i \frac{dx_i}{x_i} + \psi(x_1^{p_1} \ldots x_k^{p_k}) \sum_{i=2}^{s} \alpha_i \frac{dx_i}{x_i} \right)$$

   donde los $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{N}$ primos relativos, $\psi(t) \in \mathbb{C}[[t]]$, con $\psi(0) \neq 0$; $\alpha_i \in \mathbb{C}$ y para todo entero $n_{k+1}, \ldots, n_s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ no todos nulos tenemos $\sum_{i=k+1}^{s} n_i \alpha_i \neq 0$.

Lema 1. *Sea p una singularidad pre-simple para $\mathcal{F}$ adaptada a E con $\nu_p(\mathcal{F}) = 2$. Entonces existe un sistema regular de parámetros (x, y, z) de $\hat{O}_{X,p}$ y dos campos formales conmutativos*

$$D_1 = x\frac{\partial}{\partial x} - a\frac{\partial}{\partial z}, \quad D_2 = y\frac{\partial}{\partial y} - b\frac{\partial}{\partial z}; \quad \textit{con} \quad \nu_p(a), \nu_p(b) \geq 1$$

tangente a $\mathcal{F}$.

Prueba: Consideraremos los siguientes casos:

1. $e(E, p)$=2 y $\nu(\mathcal{F}, E, p)$. Entonces existe un sistema de coordenadas (x, y, z) tal que $E : xy = 0$ y $\mathcal{F}$ es generado por

$$\omega = a\frac{dx}{x} + b\frac{dy}{y} + dz; \quad \textit{con} \quad \nu(a), \nu(b) \geq 1.$$

   Tomemos entonces $D_1 = x\frac{\partial}{\partial x} - a\frac{\partial}{\partial z}$, $D_2 = y\frac{\partial}{\partial y} - b\frac{\partial}{\partial z}$. Ellos satisfacen las condiciones requeridas.

2. $e(E, p) = 3$. En este caso existen coordenadas x, y, z tal que $E : xyz = 0$ y $\mathcal{F}$ es generado por

$$\omega = a\frac{dx}{x} + b\frac{dy}{y} + \frac{dz}{z};$$

   En este caso $D_1 = x\frac{\partial}{\partial x} - az\frac{\partial}{\partial z}$ y $D_2 = y\frac{\partial}{\partial y} - bz\frac{\partial}{\partial z}$ cumplen las condiciones del enunciado.

3. $e(E, p)$ y $\nu(\mathcal{F}, E, p) = 1 = \mu(\mathcal{F}, E, p)$ existen coordenadas convergentes x, y, z tales que $\mathcal{F}$ es generado por

$$\omega = a\frac{dx}{x} + b\frac{dy}{y} + cdz; \ \nu(a) = 1, \ \nu(b) \geq 1, \ \nu(c) \geq 1.$$

   Tenemos entonces $\frac{\partial a}{\partial z}(0) = 1$, luego podemos escribir $a = z + \sum_{i,j=1} a_{ij}x^i y^j + za'$, con $\nu_p(a') \geq 1$. Si consideramos

$$(s, t) = \text{mín}\{(i, j) : a_{ij} \neq 0\},$$

donde la relación de orden es: $(i,j) \leq (i',j')$ si y sólo si $(i+j < i'+j')$ ó $(i+j = i'+j'$ y $i \geq i')$. Si $(s,t) = \infty$ entonces z divide a a. En caso contrario, un cambio de coordenada, $z' = z + \alpha_{st}x^s y^t$, donde $\alpha_{st} = a_{st}$, transforma a de tal manera que éste tenga (s',t') estrictamente menor que (s,t). Así, mediante el cambio de coordenada $\hat{z} = z + \sum_{st} \alpha st x^s y^t$, podemos conseguir que $\hat{z}$ divide a a. Luego, multiplicando ω por una unidad, tenemos que

$$\omega = \hat{z}\frac{dx}{x} + b\frac{dy}{y} + cd\hat{z}; \quad \nu(b), \nu(c) \geq 1.$$

Por la condición de integrabilidad $\omega \wedge d\omega = 0$ implica que $\hat{z}$ también divide a b. Por lo tanto, existen coordenadas convergentes x, y y una formal $\hat{z}$ tal que $\mathcal{F}$ es generada por la forma

$$\omega = a\frac{dx}{x} + b\frac{dy}{y} + \frac{d\hat{z}}{\hat{z}}.$$

En este caso puede tomarse $D_1 = \hat{z}\frac{\partial}{\partial \hat{z}} - cx\frac{\partial}{\partial x}$ y $D_1 = y\frac{\partial}{\partial y} - bx\frac{\partial}{\partial x}$.

□

Teorema 1 (Cano-Cerveau). *Sea p una singularidad pre-simple de $\mathcal{F}$ adaptada a E. Entonces p es una singularidad simple o:*

I). *Cuando $t = 2$ existe un sistema regular de coordenadas (x,y) de $\hat{O}_{X,p}$ y un generador ω cuya forma normal es:*

$$\omega = x\left((my + x^m)\frac{dx}{x} - dy\right), \; m \geq 1.$$

II). *Cuando $t = 3$ existe un sistema regular de coordenadas (x,y,z) de $\hat{O}_{X,p}$ y un generador ω cuya forma normal es:*

$$\omega = xy\left(\alpha y^m \tfrac{dx}{x} - (mz + y^m)\tfrac{dy}{y} + dz\right), \quad m \geq 1, \quad \alpha \neq 0.$$
$$\omega = xy\left(-(pz + x^p y^q)\tfrac{dx}{x} - (qz + \beta x^p y^q)\tfrac{dy}{y} + dz\right), \; p,q \geq 1, \; 0 \neq \beta \notin \mathbb{Q}^-.$$

Prueba:

I) Supongamos que $t = 2$. Dividamos esta situación en dos casos:

1) $e(E,p) = 1$ entonces existen coordenadas (x,y) con $E:\ x = 0$ y

$$\omega = a\frac{dx}{x} + bdy, \quad a,b \in \mathcal{O}_{X,p} \quad (a,b) = 1$$

con $\nu(a) \geq 1$ y x no divide a a. Dividimos nuestro análisis en dos casos:

i) $\nu(b) = 0$, así podemos suponer que $b = 1$, es decir, $\mathcal{F}_\omega$ es generada por $D = x\frac{\partial}{\partial x} - a\frac{\partial}{\partial y}$. Luego, por la Proposición 1, existen coordenadas formales regulares, que continuamos denotando por (x,y), tales que $D_S(y) = \lambda y$, donde $\lambda = \frac{\partial a}{\partial y}(0) \in \mathbb{C}$. De (2) tenemos:

$$D = D_S + D_N = x\frac{\partial}{\partial x} + \lambda y\frac{\partial}{\partial y} + \sum_{\substack{i+j\geq 2\\ i+\lambda j=\lambda}} a_{ij;2}x^i y^j \frac{\partial}{\partial y} \tag{3}$$

Si $\lambda = 0$ de (3) tenemos $D = x\frac{\partial}{\partial x} + \lambda y\frac{\partial}{\partial y} + \sum_{j\geq 2} a_{0j;2}y^j \frac{\partial}{\partial y}$.

Si $\lambda = -\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^-$ con $p,q \in \mathbb{N}$ primos relativos. Entonces el campo D que genera $\mathcal{F}_\omega$ es de la forma $D = x\frac{\partial}{\partial x} + \lambda y\frac{\partial}{\partial y} + \sum_{j\geq 1} a_{pi,qj;2}(x^p y^q)^j y\frac{\partial}{\partial y}$.

Si $\lambda = m \in \mathbb{N}$ tenemos $D = x\frac{\partial}{\partial x} + my\frac{\partial}{\partial y} + a_{m0,2}x^m\frac{\partial}{\partial y}$.

Si $\lambda = \frac{1}{m} \in \frac{1}{\mathbb{N}}$, $m \geq 2$ entonces $D = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{m}y\frac{\partial}{\partial y}$.

Si $\lambda \in \mathbb{C} - \left(\mathbb{N} \cup \frac{1}{N} \cup \mathbb{Q}^-\right)$ entonces $D = x\frac{\partial}{\partial x} + \lambda y\frac{\partial}{\partial y}$.

ii) $\nu(b) \geq 1$ entonces a tiene parte lineal que por un cambio lineal de coordenadas podemos suponer que la parte lineal de a es y, esto es, $a = y + a'$ donde $\nu(a) \geq 2$. Luego el campo que genera $\mathcal{F}_\omega$ es $D = bx\dfrac{\partial}{\partial x} - (y + a')\dfrac{\partial}{\partial y}$. De esto tenemos que $D_S = y\dfrac{\partial}{\partial y}$. Luego de (2) tenemos

$$D = y\frac{\partial}{\partial y} + \sum_{i\geq 2} a_{i0;1}x^i\frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i\geq 2} a_{i0;1}x^i y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Si hacemos $u = \sum_{i\geq 2} a_{i0;1}x^i$ y $v = 1 + \sum_{i\geq 2} a_{i0;1}x^i$ tenemos que la foliación $\mathcal{F}$ es generada por la 1-forma

$$\omega = xy\left(\frac{dx}{x} - \frac{u}{v}\frac{dy}{y}\right).$$

la cual es una singularidad simple.

2) Cuando $e(E, p) = 2$ tenemos que existen coordenadas (x, y) regulares $E : xy = 0$ y

$$\omega = a\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}.$$

Entonces $\mathcal{F}_\omega$ es generada por el campo vectorial $D = x\dfrac{\partial}{\partial x} - ay\dfrac{\partial}{\partial y}$. Ahora procedemos como en el caso 1) para llegar, en cualquier caso, a singularidades simples.

II) Supongamos ahora que $t = 2$. Tomemos un sistema regular de coordenadas (x, y, z) de $\hat{O}_{X,p}$ y dos campos vectoriales formales

$$D_1 = x\frac{\partial}{\partial x} - a\frac{\partial}{\partial z}; \quad D_2 = y\frac{\partial}{\partial y} - b\frac{\partial}{\partial z}$$

como en el Lema 1. Sean λ y μ los autovalores de D_1 y D_2 dados por $\lambda = -\dfrac{\partial a}{\partial z}(0,0,0)$ y $\mu = -\dfrac{\partial b}{\partial z}(0,0,0)$. Por la Proposición 2 podemos escribir

$$a = \sum_{i,j,k} a_{ijk}x^i y^j z^k, \quad b = \sum_{i,j,k} b_{ijk}x^i y^j z^k$$

donde

$$(a_{ijk}, b_{ijk}) \neq (0,0) \text{ implica } i + \lambda(k-1) = j + \mu(k-1) = 0. \quad (4)$$

Ahora analicemos los posibles valores de λ y μ:

1) $\lambda\mu \neq 0$, $\lambda, \mu \notin \mathbb{Q}^- \cup \mathbb{N}^+$. De (4) tenemos

$$D_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + \lambda z\frac{\partial}{\partial z}, \quad D_2 = y\frac{\partial}{\partial y} + \mu z\frac{\partial}{\partial z}.$$

y del Lema 1 $\mathcal{F}_p$ es generado por

$$\omega = xyz\left(-\lambda\frac{dx}{x} - \mu,\frac{dy}{y} + \frac{dz}{z}\right).$$

Observe que necesariamente debe cumplirse $\lambda, \mu, -\frac{\lambda}{\mu} \notin \mathbb{Q}^+$. En caso contrario, la foliación es dicrítica (considere explosiones con centro en los ejes).

2) $\lambda\mu \neq 0$, $\lambda \notin \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{N}^+$, $\mu = m \in \mathbb{N}^+$ esta foliación es dicrítica por la observación anterior.

3) $\lambda\mu \neq 0$ $\lambda \notin \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{N}^+$, $\mu = -\frac{p}{q}$, donde p y q son primos relativos. Este caso es análogo al caso 1.

4) $\lambda\mu \neq 0$ $\lambda = p, \mu = q \in \mathbb{N}^+$, de (4) tenemos

$$D_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + (pz + a_{0qp}z^p y^q)\frac{\partial}{\partial z}, \quad D_2 = y\frac{\partial}{\partial y} + (qz + b_{pq0}z^p y^q)\frac{\partial}{\partial z}$$

Si $a_{0qp} = b_{pq0} = 0$ tenemos una singularidad dicrítica. Si $a_{0qp} \neq b_{pq0} = 0$, explotando el eje x obtenemos una singularidad dicrítica. Si $a_{0qp}b_{pq0} \neq 0$, mediante el cambio de coordenada $x \to a_{0qp}^{\frac{1}{p}}x$ podemos suponer que $a_{0qp} = 1$. Si $b_{pq0} \in \mathbb{Q}^+$, haciendo explosiones con centro el eje z obtenemos de nuevo una singularidad dicrítica.

5) $\lambda\mu \neq 0$, $\lambda = -\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^-$, $\mu = m \in \mathbb{N}^+$, este caso es dicrítico análogo al caso 2.

6) $\lambda\mu \neq 0$, $\lambda = -\frac{p}{r} \in \mathbb{Q}^-$, $\mu = -\frac{q}{r} \in \mathbb{N}^+$ donde $mcd(p,q,r) = 1$. De (4) existen $\alpha, \beta \in \mathbb{C}[[t]]$, con $\nu(\alpha), \nu(\beta) \geq 1$ tal que:

$$D_1 = x\frac{\partial}{\partial x} - z\left(\frac{p}{r} + \alpha(x^p y^q z^r)\right)\frac{\partial}{\partial z},$$

$$D_2 = y\frac{\partial}{\partial y} - z\left(\frac{q}{r} + \beta(x^p y^q z^r)\right)\frac{\partial}{\partial z}.$$

Luego, $\mathcal{F}$ es generada por la 1-forma

$$\omega = xyz\left((p + r\alpha(x^p y^q z^r))\frac{dx}{x} + (q + r\beta(x^p y^q z^r))\frac{dy}{y} + r\frac{dz}{z}\right).$$

7) $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$, $\mu \notin \mathbb{Q} - \mathbb{N}^+$. Este caso es análogo al caso 1, pero como $\lambda = 0$ implica $\nu_p(\mathcal{F}) = 0$, este caso no es tomado en cuenta.

8) $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$, $\mu = m \in \mathbb{N}^+$. De (4) tenemos que

$$D_1 = x\frac{\partial}{\partial x} - \alpha y^m \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_2 = y\frac{\partial}{\partial y} + (mz + \beta y^m)\frac{\partial}{\partial z}.$$

Luego la 1-forma que genera $\mathcal{F}$ es:

$$\omega = xy\left(\alpha y^m \frac{dx}{x} - (mz + \beta y^m)\frac{dy}{y} + dz\right).$$

Observe que $\alpha \neq 0$ de lo contrario $\nu_p(\mathcal{F}) = 1$. Si $\beta = 0$ tenemos, haciendo explosiones con centro el eje x, una singularidad dicrítica. Luego $\alpha\beta \neq 0$.

9) $\lambda = 0$ y $\mu = -\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^-$ donde p y q son primos relativos. De (4) tenemos que existen $\alpha(t), \beta(t) \in \mathbb{C}[[t]]$, con $\nu(\alpha(t)), \nu(\beta(t)) \geq 1$ tal que

$$D_1 = x\frac{\partial}{\partial x} - z\alpha(y^q z^q)\frac{\partial}{\partial z}; \quad D_2 = y\frac{\partial}{\partial y} - z\beta(y^q z^q)\frac{\partial}{\partial z};$$

que es como en el caso 6.

10) $\lambda = \mu = 0$. También, por (4), $\alpha(t), \beta(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ con $\nu(\alpha(t)) \geq 1$ y $\nu(\beta(t)) \geq 1$ tales que

$$D_1 = x\frac{\partial}{\partial x} - z\alpha(z)\frac{\partial}{\partial z}; \quad D_2 = y\frac{\partial}{\partial y} - z\beta(z)\frac{\partial}{\partial z};$$

y nuevamente estamos en una situación análoga al caso 6.

□

Ejemplo 1. Las *foliaciones casi-ordinarias cuspidales*, son aquéllas determinadas por 1-forma del tipo

$$\omega = d(z^2 + (x^{p'}y^{q'})^d) + (x^{p'}y^{q'})^k h(x^{p'}y^{q'})dz, \quad h(0) \neq 0,$$

donde $\mathrm{mcd}(p,q) = d$, $p = dp'$, $q = dq'$ y $\widetilde{h} \in \mathcal{O}_0^1$. Todas estas foliaciones tienen una separatriz S analíticamente equivalente a la superficie casi-ordinaria

$$z^2 + (x^{p'}y^{q'})^r = 0,$$

ver Proposición 1 de [4], donde

$$r = \begin{cases} d & 2k \geq d \\ 2k & 2k < d. \end{cases}$$

Supongamos que p y q son pares, una forma de reducir las singularidades de la foliación $\mathcal{F} : \omega = 0$, se logra de la siguiente manera:

Cuando $2k \geq d$ realizamos $\frac{p+q}{2}$ explosiones. Y cuando $2k < d$ realizamos $\frac{2p'k+2q'k}{2} = p'k + q'k$ explosiones que desingularizan S y estas mismas explosiones reducen las singularidades de $\mathcal{F}$, salvo que en el caso $2k = d$ se tenga

$$h(0) = \pm 2\left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\right), \quad donde \quad t \in]0,1] \cap \mathbb{Q}.$$

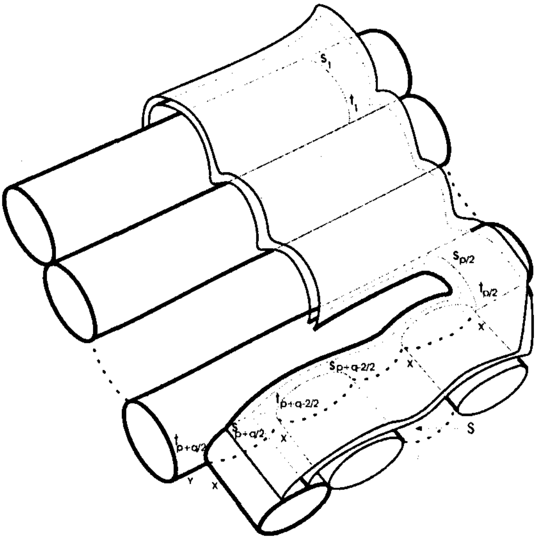

Figura 1: Reducción de las singularidades de foliaciones Casi ordinarias

Referencias

[1] C. CAMACHO; A. P. SAD: *Pontos singulares de equações diferencais analíticas.* 16° Coloquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro (1987).

[2] F. CANO: *Reduction of the singularities of codimension one singular foliations in dimension three.* Ann. Math., 160 (2004), 907-1011.

[3] F. CANO; D. CERVEAU: *Desingularization of non-dicritical holomorphic foliations and existence of separatrices.* Acta Math., 169 (1992), 1-103.

[4] P. FERNÁNDEZ; J.MOZO: *On the Quasi-ordinary cuspidal foliations in* $(\mathbb{C}^3, 0)$ A aparecer en Journal Differential Equations.

[5] J. Martinet: *Normalisation des champs holomorphes (d'apres Brujno).* Seminario de Bourbaki 1980 exp. 564. LNM 901 Springer Verlag (1982).

[6] A. Seidenberg: *Reduction of the singularities of the differentiable equation $Ady = Bdx$.* Amer. J. Math., 90 (1968), 248-269.

Abstract

In this article of diffusion, we classify the simple singularities using the Martinetś techniques [5]. Every paper is inspired in the articles: Cano-Cerveau [3], Cano [2] and Fernández-Mozo [4]

Key words: singularity, foliation, reduction of singularities

Percy Fernández Sánchez
Instituto de Matemática y Ciencias Afines, IMCA
Universidad Nacional de Ingeniería, UNI
Pontificia Universidad Católica del Perú, PUCP
`pefernan@pucp.edu.pe`