Pro Mathematica, XIX, 37-38, (2005), 125-143

SOBRE LA ESTRUCTURA DE REGLAS DE ELECCIÓN BASADAS EN PROPIEDADES DISCRETAS

Alejandro Lugón[1]

Resumen

Dentro de la teoría de la toma de decisiones cada vez adquieren más importancia las "reglas de elección simples". Esta categoría abarca a toda regla de elección que es rápida de llevar a cabo, necesita poca información sobre las alternativas y consume poco "esfuerzo mental". Una familia de reglas de elección simples es la compuesta por aquellas que clasifican a las alternativas según un número pequeño de propiedades dicotómicas. En este artículo se estudian algunos aspectos de las relaciones de orden inducidas por estas reglas de elección.

Palabras Clave: *Elección, Racionalidad Limitada*

1. *CENTRUM CATOLICA*

Introducción

En el campo de la racionalidad limitada reciben gran atención la reglas de elección basadas en propiedades binarias. Un individuo que sigue una de estas reglas para elegir entre dos objetos no hace un estudio a fondo de estos en relación con sus gustos sino que sigue una regla de elección simple. El individuo solo recoge una número pequeño de características y ve cual objeto las cumple y cual no. Según esta información toma su decisión. Para formalizar cualquiera de estas reglas de elección se asocia a cada posible objeto un vector de ceros y unos. La dimensión del vector está determinada por el número de características consideradas, correspondiendo a cada componente del vector un uno si la característica está presente en el objeto y un cero si no lo está.

Como ejemplo podemos poner la elección de varios candidatos para un puesto de trabajo. Podemos considerar las siguientes tres características: "Tener estudios Universitarios", "Tener más de dos años de experiencia", y "Ser menor de 30 años". Como tenemos tres características cada posible postulante podrá ser asociado a un vector de dimensión 3 del conjunto $\{0,1\}^3$. Así si a un postulante le corresponde el vector $(0,1,1)$ sabremos que no tiene estudios universitarios pero tiene más de dos años de experiencia y menos de 30 años. Una regla de elección nos debe, dado un cierto conjunto de postulantes, cuál postulante escoger. Un ejemplo particular de regla de elección es la siguiente, si tenemos postulantes con y sin estudios universitarios, descartar a los que no tengan. De los que quedan, si tenemos postulantes con y sin experiencia mayor de dos años, descartar a los que no tengan. De los que quedan, si tenemos postulantes mayores y menores de 30 años, descartar a los mayores. Finalmente elegir a cualquiera de las que queden. Como veremos más adelante esta regla de elección corresponde a una conocida como "Tome el mejor"(TTB por su expresión en inglés "Take-The-Best").

Podemos estudiar las reglas de elección como una función de $2^{\{0,1\}^n}$ en $\{0,1\}^n$, que a cada posible conjunto de postulantes le asigne el postulante elegido. Estas reglas de elección inducen un orden sobre $\{0,1\}^n$. Son estos ordenes los que estudiaremos en este trabajo. Ejemplos de trabajos académicos en este campo son los de Martignon & Hoffrage [2] y Hogarth & Karelaia [5].

En la siguiente Sección se presenta las definiciones y resultados básicos. En la Sección 3 se estudia la posibilidad de representación lineal de estas reglas, el resultado principal es que esta representación es siempre posible cuando se tiene menos de 5 propiedades. Con 5 o más características existen algunos casos en los cuales esto no es posible. Este resultado proviene de la teoría de las probabilidades subjetivas donde se tiene una estructura similar a la que obtenemos aquí para un problema totalmente diferente (ver [4], [3], [7] y [6]).

En la Sección 4 se presentan un estudio de los casos para 2, 3, 4 y 5 características.

1. Preliminares

Supongamos que tenemos que elegir entre un conjunto de objetos. Cada uno de estos objetos puede tener o no una serie de características. Sea n el numero de esas características. Luego a cada objeto posible le corresponde un elemento del conjunto $S^n = \{0,1\}^n$. Por ejemplo:

$$S^2 = \{(1,1),(1,0),(0,1),(0,0)\} \equiv \{11,10,01,00\}$$

Así si a un objeto le corresponde el elemento 10 es porque posee la primera característica pero no la segunda.

En el conjunto S^n identificamos ciertos elementos:

- El correspondiente al objeto que posee solo la i-ésima característica, representado por e^i, el vector con un uno solo en la posición i ($e^i_j = 1$ si y solo si $i = j$).

- El correspondiente al objeto que posee todas las características, representado por $\overline{1}$, el vector de unos $(\overline{1}_i = 1$ para todo $i = 1, \ldots, n)$.
- El correspondiente al objeto que no posee ninguna característica, representado por $\overline{0}$, el vector de ceros $(\overline{0}_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n)$.

La importancia de las características y sus combinaciones está dada por un orden lineal (estricto) $\succ$ sobre S^n, es decir $\succ$ es una relación binaria, completa $(a \neq b \rightarrow a \succ b \vee b \succ a)$, transitiva $(a \succ b \wedge b \succ c \rightarrow a \succ c)$ y asimétrica $(a \succ b \rightarrow \neg(b \succ a))$. Si tenemos dos objetos $a, b \in S^n$, la expresión $a \succ b$ nos dice que a es mejor objeto que b.

A continuación estableceremos algunas propiedades que puede tener este orden.

Independencia (I): Un orden $\succ$ es independiente si $\forall a, b \in S^n$ y $\forall i = 1, \ldots, n$ tales que $a \succ b$ y $a_i = b_i$ se cumple $a + (1 - 2a_i)e^i \succ b + (1 - 2b_i)e^i$.

La propiedad Independencia corresponde a la idea que las características comunes de los objetos no afectan su orden. Si el objeto a es mejor que b y ambos tienen (o no) la característica i entonces los objetos que corresponde a a y b sin (con) esa característica guardan la misma relación que a y b:

$$101 \succ 001 \Leftrightarrow 111 \succ 011 \Leftrightarrow 100 \succ 000$$

Monotonicidad (M): Un orden $\succ$ es monótono si $\forall a \in S^n$ y $\forall i = 1, \ldots, n$ tal que $a_i = 0$ se cumple $a + e^i \succ a$.

La propiedad de Monotonicidad corresponde a la idea que todas las propiedades son positivas. Entre dos objetos que solo se diferencian en que uno tiene una propiedad que el otro no tiene, el mejor es aquel que si posee la propiedad:

$$101 \succ 001 \wedge 101 \succ 100$$

Orden Correcto (OC): Un orden $\succ$ posee el orden correcto si es monótono y si $\forall a \in S^n$ tal que para $i < j$: $a_i = 0$ y $a_j = 1$ se cumple que $a + e^i - e^j \succ a$.

La propiedad de Orden Correcto corresponde a la idea que las propiedades están ordenadas de mejor a peor. Por ejemplo si dos objetos poseen solo una característica, aquel que posee la característica con índice más bajo es la mejor:

$$100 \succ 010 \succ 001$$

De las interpretaciones de las propiedades podemos inferir que M y OC no son "esenciales". La monotonicidad depende de la definición de la propiedad y OC depende del orden en que tomemos las propiedades como demostraremos en la Proposición 2. Antes de ver dicho resultado establezcamos la forma que adoptan las propiedades M y OC si asumimos que el orden es Independiente:

Proposición 1 *Si un orden es Independiente tenemos las siguientes definiciones equivalentes:*

- *Monotonicidad (M):Un orden Independiente $\succ$ es monótono $\forall i = 1, \ldots, n$ $e^i \succ \overline{0}$*
- *Orden Correcto (OC): Un orden Independiente $\succ$ posee el Orden Correcto si es monótono y si $\forall i, j$ con $i < j$: $e^i \succ e^j$.*

Demostración. Notemos que $e^i \succ \overline{0}$ y $i < j \rightarrow e^i \succ e^j$ son casos particulares de las definiciones originales. La independencia garantiza el otro sentido de la equivalencia. Dada la independencia $e^i \succ \overline{0} \leftrightarrow a + e^i \succ a + \overline{0} = a$ y $(a - e^j) + e^i \succ (a - e^j) + e^j = a$. $\square$

En este trabajo solo estudiaremos órdenes independientes, por lo tanto a partir de este momento usaremos las expresiones dadas en la proposición anterior para la monotonicidad y orden correcto. Podemos entonces como estas dos propiedades son no esenciales en el siguiente resultado.

Proposición 2 *Si un orden es Independiente, existe una redefinición de los atributos y una permutación de estos, tal que el orden resultante satisface M y OC.*

Demostración. La demostración es directa usando la proposición 1:

Si un orden Independiente no es monótono entonces existe $i = 1, \ldots, n$ tal que $\overline{0} \succ e^i$. En este caso podemos definir la característica i de manera inversa a la actual , lo cual corresponde a cambiar los ceros por unos y los unos por ceros de la posición i de todos los objetos. De esta manera $\overline{0}$ se convierte en e^i y e^i se convierte en $\overline{0}$ y ahora tendríamos $e^i \succ \overline{0}$. Repitiendo este proceso para todos los casos necesarios obtendríamos al final un orden monótono.

Si un orden Independiente no posee el Orden Correcto entonces para ciertos $i < j$ tenemos $e^j \succ e^i$. Si permutamos la característica i con la j tenemos que e^j se convierte en e^i y e^i se convierte en e^j y por lo tanto luego de la permutación $e^i \succ e^j$. Repitiendo este proceso para todos los casos necesarios obtendríamos al final un orden que posee el Orden Correcto. □

Veamos esto para el caso más sencillo. Con $n = 2$ tenemos $S^2 = \{00, 01, 10, 11\}$. Con lo cual existen 24 órdenes posibles:

$11 \succ 10 \succ 01 \succ 00$	I,M,OC	$11 \succ 00 \succ 10 \succ 01$		$01 \succ 00 \succ 11 \succ 10$	I
$10 \succ 11 \succ 01 \succ 00$		$00 \succ 11 \succ 10 \succ 01$		$00 \succ 01 \succ 11 \succ 10$	
$11 \succ 01 \succ 10 \succ 00$	I,M	$10 \succ 00 \succ 11 \succ 01$	I	$00 \succ 01 \succ 10 \succ 11$	I
$01 \succ 11 \succ 10 \succ 00$		$00 \succ 10 \succ 11 \succ 01$		$01 \succ 00 \succ 10 \succ 11$	
$01 \succ 10 \succ 11 \succ 00$		$11 \succ 01 \succ 00 \succ 10$		$00 \succ 10 \succ 01 \succ 11$	I
$10 \succ 01 \succ 11 \succ 00$		$01 \succ 11 \succ 00 \succ 10$	I	$10 \succ 00 \succ 01 \succ 11$	
$11 \succ 10 \succ 00 \succ 01$		$00 \succ 11 \succ 01 \succ 10$		$01 \succ 10 \succ 00 \succ 11$	
$10 \succ 11 \succ 00 \succ 01$	I	$11 \succ 00 \succ 01 \succ 10$		$10 \succ 01 \succ 00 \succ 11$	

al lado de cada posible orden hemos puesto las propiedades que cumplen. Es fácil ver que una permutación y/o redefinición de la propiedad adecuada convierte a cada orden que cumple I en el primer orden, que cumple I,M y OC. También es fácil ver si un orden no cumple I, entonces no puede ser transformado en el primero.

El caso visto, para $n = 2$, parece sugerir que M y OC implican I, el siguiente ejemplo nos hace ver que esto no es correcto para todo n:

$$\begin{aligned} 1111 &\succ 1110 \succ 1101 \succ 1100 \succ 1011 \succ 1010 \succ 1001 \succ 1000 \succ \\ &\succ 0111 \succ 0110 \succ 0101 \succ 0011 \succ 0100 \succ 0010 \succ 0001 \succ 0000 \end{aligned}$$

este orden es Monótono y satisface la propiedad de Orden Correcto pero no es Independiente: $1100 \succ 1011$ y $0011 \succ 0100$.

Otra hecho observable en el caso $n = 2$ es que tenemos solo un orden que cumple las tres propiedades, para n mayores esta unicidad no se cumple. Por ejemplo, para $n = 3$ tenemos dos ordenes con las tres propiedades:

$$111 \succ 110 \succ 101 \succ 100 \succ 011 \succ 010 \succ 001 \succ 000$$
$$111 \succ 110 \succ 101 \succ 011 \succ 100 \succ 010 \succ 001 \succ 000$$

Estos órdenes se diferencian en la forma de ordenar 011 y 100. Adelantando un poco la terminología, podemos decir que en el segundo orden las características 2 y 3 compensan a la característica 1 ($011 \succ 100$), lo que no se cumple en el primer orden ($100 \succ 011$). Definiendo:

Compensación: Un orden $\succ$ sobre S^n, es no compensado si para todo $i = 1, \dots, n$: $e^i \succ \sum_{j=i+1}^{n} \gamma_j e^j$ con $\gamma_j \in \{0, 1\}$.

Es decir que la característica i define a un objeto mejor que cualquier otro que tenga solo características de índice mayor a i:

$$1000 \succ 0111 \wedge 0100 \succ 0011$$

Para cualquier n existe solo un orden que cumple I,M,OC y es no compensado. Este orden recibe el nombre de TTB ("Take-The-Best") y corresponde a ordenar los objetos con el orden de los números binarios ($>$).

Definición 3 *Dado n definimos el orden TTB sobre S^n de la siguiente manera: $a \succ b \leftrightarrow a > b$.*

En términos de regla de elección el orden TTB corresponde al proceso de examinar los objetos de acuerdo a la primera característica y desechar aquellos que no la cumplen, pasar luego a examinar la segunda y seguir así hasta tener solo un objeto. Del conjunto particular del que teníamos que elegir este es el mejor.

La siguiente proposición nos muestra que en realidad la Monotonicidad y el Orden Correcto son propiedades redundantes en la definición de TTB.

Proposición 4 *Si un orden es Independiente y No Compensado entonces es Monótono y posee el Orden Correcto.*

Demostración. La demostración es directa usando la proposición 1. □

Con este resultado podemos enunciar la siguiente caracterización del orden TTB:

Proposición 5 *TTB es el único orden Independiente y no compensado.*

Demostración. Que el orden TTB es independiente y no compensado es directo. Supongamos ahora que un orden Independiente y No Compensado no es TTB. Es decir que para ciertos $a, b \in S^n$ tenemos que $a > b$ y $b \succ a$. Definimos $i = \text{máx}\{k | a_k = 1, b_k = 0\}$, como $a > b$ si $k < i$ entonces $a_k = b_k$. Con este i definimos a su vez: $\overline{a}$ tal que $\overline{a}_k = 0$ si $k < i$ y $\overline{a}_k = a_k$ si $k \geq i$ y de manera similar $\overline{b}$. Por independencia $b \succ a$ implica $\overline{b} \succ \overline{a}$ y por monotonicidad $\overline{a} = e^i$ o $\overline{a} \succ e^i$. Por lo tanto $\overline{b} \succ e^i$, lo cual contradice el hecho que $\succ$ es No Compensado ya que para $k \leq i$ tenemos que $\overline{b}_k = 0$. □

Para terminar con esta sección presentamos una propiedad que sirve para encontrar órdenes independientes. Si observamos los ejemplos dados hasta ahora podremos observar que la suma de los elementos en las posiciones k y $2^n - k$ de un orden Independiente es siempre $\overline{1}$. Por ejemplo para $n = 3$ tenemos dos órdenes Independientes:

$$111 \succ 110 \succ 101 \succ 100 \succ 011 \succ 010 \succ 001 \succ 000$$

$$111 \succ 110 \succ 101 \succ 011 \succ 100 \succ 010 \succ 001 \succ 000$$

En ambos casos podemos calcular: $111+000 = 111$, $110+001 = 111$, $101 + 010 = 111$ y $100 + 011 = 011 + 100 = 111$.

Esto se puede generalizar para cualquier valor de n. Para ser precisos enunciemos la:

Simetría Un orden en S^n es **simétrico** si para todo $k = 1, \ldots, 2^{n-1}$ la suma de los elementos en las posiciones k y $2^n - k + 1$ es siempre $\overline{1}$.

Probaremos que todo orden Independiente es Simétrico. Para esto demostraremos primero el Lema:

Lema 6 *Si un orden es Independiente, entonces* $\forall a, b \in S^n$*:*

$$a \succ b \iff \overline{1} - b \succ \overline{1} - a$$

Demostración. Sean $x, y \in S^n$ tales que $\forall i = 1, \ldots, n$: $x_i = 1 \iff a_i = b_i = 1$ y $y_i = 1 \iff a_i = b_i = 0$. Aplicando la propiedad de Independencia tenemos que:

$$a \succ b \iff a - x + y \succ b - x + y$$

Y como vemos en la siguiente tabla: $\overline{1} - b = a - x + y$ y $\overline{1} - a = b - x + y$:

a_i	b_i	x_i	y_i	$(a - x + y)_i$	$(\overline{1} - b)_i$
1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1

□

Usaremos este lema para demostrar la proposición que nos interesa:

Proposición 7 *Si un orden es independiente entonces es simétrico.*

Demostración. Sea $a \in S^n$ el elemento en la k-ésima posición del orden $\succ$, esto es que existen exactamente $k-1$ elementos de S^n mejores según $\succ$ que a. Usando el Lema anterior tenemos que existen exactamente $k-1$ elementos de S^n peores según $\succ$ que $\overline{1} - a$. Esto a su vez nos dice que $\overline{1} - a$ está en la $2^n - k + 1$ posición del orden $\succ$. □

El siguiente ejemplo muestra que ser Simétrico no implica ser Independiente. Tomemos $n = 3$ y el orden

$$010 \succ 001 \succ 111 \succ 100 \succ 011 \succ 000 \succ 110 \succ 101$$

Es fácil ver que es simétrico pero no independiente: $010 \succ 011$ y $111 \succ 110$. A pesar de esto, para la búsqueda de órdenes independientes la simetría es de mucha ayuda, ya que reduce enormemente el número de órdenes a estudiar. Por ejemplo, para $n = 3$ tenemos $2^3 = 8$ objetos y $8! = 40,320$ órdenes pero solo $8!! = 8 * 6 * 4 * 2 = 384$ órdenes simétricos. Esto equivale a examinar solo 1 de cada 105 órdenes. Para $n = 4$ se debe examinar solo 1 de cada 2×10^6 y para $n = 5$ solo 1 de cada 2×10^17.

2. Representación Lineal

En trabajos previos sobre reglas de elección, como Hogarth & Karelaia [5], para trabajar con distintos órdenes independientes se usa su representación lineal. Esta consiste en dar un peso a cada característica y asignar a cada objeto la suma de los pesos de las características que posee. Los pesos deben ser tales que el orden de los objetos corresponde al orden de las sumas obtenidas. Formalmente:

Definición 8 *Un orden $\succ$ sobre S^n es representado por la función lineal con vector característico $\alpha \in \mathbb{R}^n$ si:*

$$a \succ b \iff \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i > \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$$

Dado que los objetos tienen características discretas y $\alpha \in \mathbb{R}^n$ es fácil ver que la representación si existe no es única en ningún sentido. La pregunta que surge es entonces si todo orden independiente es representable por una función lineal. Este problema es similar al de las probabilidades subjetivas estudiado en Kraft, Pratt & Seidenberg [4] y en Fishburn [3]. Que un orden lineal es representable por una función es un problema trivial, aquí la dificultad reside en la exigencia de linealidad a dicha función. Si el espacio de cada característica fuera suficientemente "rico"(por ejemplo un continuo) el problema tiene respuesta positiva, la independencia de las preferencias garantiza la representación lineal, ver por ejemplo Debreu [1] y Bouyssou & Pirlot [7]. En nuestro caso el espacio de cada característica ($\{0,1\}$) no tiene suficiente estructura y la representación lineal no siempre es posible para $n > 4$. Con $n \geq 5$ para que un orden pueda ser representado por una función lineal debe cumplir una serie de propiedades conocidas como "condiciones de cancelación". En Fishburn [3] se pueden encontrar todos los resultados aplicables a nuestro caso.

En la siguiente sección se presenta un estudio exhaustivo para los casos con $n = 2, 3, 4, 5$.

En lo que queda de esta sección presentaremos un resultado bien conocido en la Proposición 9 y luego veremos un resultado interesante sobre el problema de "actualizar" una función lineal cuando aumentamos una característica más a los objetos.

Proposición 9 *1. Un orden $\succ$ sobre S^n representable por una función lineal es Independiente.*

2. Un orden $\succ$ sobre S^n representable por una función lineal α es Monótono si y solo si la representación lineal es positiva ($\forall i = 1, \ldots, n : \alpha_i > 0$).

3. Un orden $\succ$ sobre S^n representable por una función lineal α posee el Orden Correcto si y solo $\alpha_n > \alpha_{n-1} > \ldots > \alpha_1 > 0$.

Demostración.

1. Sean $a, b \in S^n$ y $i \in \{1, \ldots, n\}$ tales que $a \succ b$ y $a_i = b_i$. Por representabilidad, $\alpha \cdot a > \alpha \cdot b$ y como $a_i = b_i$ tenemos que $\alpha_i(1 - 2a_i) = \alpha_i(1 - 2b_i)$. Luego $\alpha \cdot a + \alpha_i(1 - 2a_i) > \alpha \cdot b + \alpha_i(1 - 2b_i)$ que es lo mismo que: $\alpha \cdot (a + (1 - 2a_i)e^i) > \alpha \cdot (b + (1 - 2b_i)e^i)$. Aplicando nuevamente la representación lineal tenemos $a + (1 - 2a_i)e^i \succ b + (1 - 2b_i)e^i$, con lo que hemos probado la Independencia.

2. Si el orden es representable entonces es independiente, luego la monotonicidad equivale a $\forall i = 1, \ldots, n : e^i \succ \overline{0}$. Por representabilidad esto es equivalente a $\alpha_i > 0$.

3. Igual que antes ser representable implica independencia, luego poseer Orden Correcto equivale a $i < j \to e^i \succ e^j$. Por representabilidad esto equivale a $i < j \to \alpha_i > \alpha_j$. □

Para terminar esta sección veamos un aspecto interesante de la representación lineal. Supongamos que tenemos un orden para n características $\succ$ y consideramos una característica adicional. Esto equivale a diferenciar más los objetos y nos duplica el número de estos que podemos tener. Supongamos que para el orden original teníamos una representación lineal α y queremos construir una representación α' para el nuevo orden. Una primera intuición nos indica que bastaría con encontrar el α'_i correspondiente a la nueva característica i. El siguiente ejemplo nos indica que esto no siempre es posible.

Sea el orden en S^3:

$$111 \succ 110 \succ 101 \succ 100 \succ 011 \succ 010 \succ 001 \succ 000$$

representable por la función $\alpha = (4, 2, 1)$. Supongamos ahora que tomamos en cuenta una cuarta característica, con lo cual el espacio de objetos es ahora S^4, que pasa a ser la primera para tener el orden

$$\begin{aligned}1111 \succ\ & 1110 \succ 1101 \succ 1100 \succ 1011 \succ 1010 \succ 0111 \succ 0110 \succ \\ \succ\ & 1001 \succ 1000 \succ 0101 \succ 0100 \succ 0011 \succ 0010 \succ 0001 \succ 0000\end{aligned}$$

Es fácil ver que la proyección de este orden sobre sus tres últimas componentes coincide con el orden inicial, con lo cual el orden sigue siendo independiente. El problema es ahora encontrar v tal que $\alpha' = (v, 4, 2, 1)$ represente al nuevo orden. Como vemos dicho v no existe:

$$\begin{aligned}1010 \succ 0111 \quad &\leftrightarrow v + 2 > 7 \quad \leftrightarrow v > 5 \\ 0110 \succ 1001 \quad &\leftrightarrow 6 > v + 1 \quad \leftrightarrow 5 > v\end{aligned}$$

Sin embargo el orden en S^4 es representable por
$\alpha'' = (8, 6, 4, 1)$.

3. Examen Completo de los Casos $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ y $n = 5$

La presente sección presenta los resultados del estudio, por medio de rutinas del MATLAB[1] para los casos $n = 4$ y $n = 5$, de los órdenes y sus propiedades para cada caso.

3.1. n = 2

Para dos características, n=2, tenemos $S^2 = \{00, 01, 10, 11\}$.

[1]Los programas usados pueden obtenerse solicitándolos al autor.

Para estos 4 posibles objetos: tenemos 24 órdenes posibles:

11≻10≻01≻00	I,M,OC	11≻00≻10≻01		01≻00≻11≻10	I
10≻11≻01≻00		00≻11≻10≻01		00≻01≻11≻10	
11≻01≻10≻00	I,M	10≻00≻11≻01	I	00≻01≻10≻11	I
01≻11≻10≻00		00≻10≻11≻01		01≻00≻10≻11	
01≻10≻11≻00		11≻01≻00≻10		00≻10≻01≻11	I
10≻01≻11≻00		01≻11≻00≻10	I	10≻00≻01≻11	
11≻10≻00≻01		00≻11≻01≻10		01≻10≻00≻11	
10≻11≻00≻01	I	11≻00≻01≻10		10≻01≻00≻11	

Tenemos 8 órdenes Independientes, es fácil encontrar una representación lineal para cada uno de ellos. Estas representaciones corresponden a las 8 regiones del plano $\mathbb{R}^2$ determinadas por los dos ejes y las dos diagonales ($\alpha_1 = \alpha_2$ y $\alpha_1 = -\alpha_2$). Siendo las de los órdenes monótonos las dos del cuadrante positivo ($\alpha_1 > 0$ y $\alpha_2 > 0$) y la del orden con el orden correcto la región con $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$. Con dos características la no compensación se reduce a la monotonicidad, luego solo el único orden I, M y OC corresponde a TTB. También es de notar que en este caso Independencia y simetría son equivalentes.

3.2. n = 3

Para $n = 3$ tenemos $2^3! = 8! = 40,320$ órdenes, pero solo $8!! = 384$ son simétricos. De estos solo 96 son independientes y tomando en cuenta monotonicidad y orden correcto tenemos $96/(2^3 \times 3!) = 2$ órdenes simétricos esencialmente diferentes. Es decir tenemos solo dos órdenes independientes, monótonos y con orden correcto:

$$111 \succ 110 \succ 101 \succ 100 \succ 011 \succ 010 \succ 001 \succ 000$$

$$111 \succ 110 \succ 101 \succ 011 \succ 100 \succ 010 \succ 001 \succ 000$$

Estos órdenes difieren en la forma de ordenar 011 y 100, es decir uno es no compensado (el primero) y el otro si. Ambos son representables linealmente por vectores con $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$, lo que los diferencia es la relación entre α_1 y $\alpha_2 + \alpha_3$. Para el primer orden tenemos $\alpha_1 > \alpha_2 + \alpha_3$ y para el segundo $\alpha_1 < \alpha_2 + \alpha_3$.

3.3. n = 4

Para $n = 4$ tenemos $2^4! = 16! \approx 2{,}09 \times 10^{13}$ órdenes, de los cuales $16!! = 10'321,920 \approx 1{,}03 \times 10^7$ son simétricos y de estos solo $5,376$ son independientes. Tomando en cuenta monotonicidad y orden correcto tenemos $5,376/(2^4 \times 4!) = 14$ órdenes simétricos esencialmente diferentes. Estos son las 8 primeras posiciones de los 14 órdenes que cumplen I,M y OC:

$$1111 \succ 1110 \succ 1101 \succ 1100 \succ 1011 \succ 1010 \succ 1001 \succ 1000$$
$$1111 \succ 1110 \succ 1101 \succ 1100 \succ 1011 \succ 1010 \succ 1001 \succ 0111$$
$$1111 \succ 1110 \succ 1101 \succ 1100 \succ 1011 \succ 1010 \succ 0111 \succ 1001$$
$$1111 \succ 1110 \succ 1101 \succ 1100 \succ 1011 \succ 1010 \succ 0111 \succ 0110$$
$$1111 \succ 1110 \succ 1101 \succ 1100 \succ 1011 \succ 0111 \succ 1010 \succ 1001$$
$$1111 \succ 1110 \succ 1101 \succ 1100 \succ 1011 \succ 0111 \succ 1010 \succ 0110$$
$$1111 \succ 1110 \succ 1101 \succ 1011 \succ 1100 \succ 1010 \succ 1001 \succ 1000$$
$$1111 \succ 1110 \succ 1101 \succ 1011 \succ 1100 \succ 1010 \succ 1001 \succ 0111$$
$$1111 \succ 1110 \succ 1101 \succ 1011 \succ 1100 \succ 1010 \succ 0111 \succ 1001$$
$$1111 \succ 1110 \succ 1101 \succ 1011 \succ 1100 \succ 1010 \succ 0111 \succ 0110$$
$$1111 \succ 1110 \succ 1101 \succ 1011 \succ 1100 \succ 0111 \succ 1010 \succ 1001$$
$$1111 \succ 1110 \succ 1101 \succ 1011 \succ 1100 \succ 0111 \succ 1010 \succ 0110$$
$$1111 \succ 1110 \succ 1101 \succ 1011 \succ 0111 \succ 1100 \succ 1010 \succ 1001$$
$$1111 \succ 1110 \succ 1101 \succ 1011 \succ 0111 \succ 1100 \succ 1010 \succ 0110$$

los órdenes se pueden completar haciendo uso de la simetría.

Todos son linealmente representables. Damos aquí un ejemplo de representación para cada uno de ellos:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}7 & 0{,}7 & 0{,}8 & 0{,}9 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}7 & 0{,}7 & 0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}6 & 0{,}7 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}4 \end{bmatrix}$$

donde cada columna corresponde a cada orden.

Estos órdenes se pueden obtener trabajando las implicaciones de las propiedades de monotonicidad, orden correcto y simetría. Por ejemplo monotonicidad y orden correcto implican que los tres primeros elementos deben ser 1111,1110 y 1101, en ese orden. De esta manera se puede obtener las ocho primeras posiciones de los 14 órdenes siguiendo cada uno de los caminos del grafo de la Figura 1,

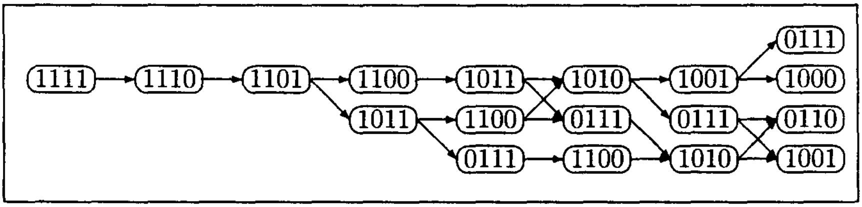

Figura 1: Grafo para n=4

y usando la simetría para obtener el orden completo.

3.4. n = 5

Para $n = 5$ tenemos $2^5 = 32$ objetos distinguibles lo cual genera $32! \approx 2{,}6 \times 10^{35}$ órdenes posibles de los cuales $32!! \approx 1{,}4 \times 10^{18}$ son simétricos. De los simétricos solo $2'096,640 \approx 2{,}1 \times 10^6$ son independientes. Si tomamos en cuenta equivalencia por monotonicidad y orden correcto nos quedamos con $2'096,640/(2^5 \times 5!) = 546$. En su trabajo

Fishburn (ver [3]) reporta 561 órdenes independientes, monótonos y con el orden correcto, aunque el mismo acota "modulo counting errors".

De los 546 órdenes solo 516 son linealmente representables, los 30 que no lo son están caracterizados en el mismo trabajo de Fishburn, aquí los damos de manera explícita. Por monotonicidad y orden correcto las tres primeras posiciones son (en orden): 11111, 11110 y 11101, las posiciones de la cuarta a la decimosexta son:

$11100 \succ 11011 \succ 11010 \succ 10111 \succ 11001 \succ 10110 \succ 01111 \succ 11000 \succ 10101 \succ 01110 \succ 10100 \succ 10011 \succ 10010$

$11100 \succ 11011 \succ 11010 \succ 10111 \succ 11001 \succ 10110 \succ 01111 \succ 11000 \succ 01110 \succ 10101 \succ 10100 \succ 10011 \succ 10010$

$11100 \succ 11011 \succ 11010 \succ 10111 \succ 10110 \succ 11001 \succ 11000 \succ 10101 \succ 10100 \succ 10011 \succ 01111 \succ 10010 \succ 10001$

$11100 \succ 11011 \succ 11010 \succ 10111 \succ 10110 \succ 11001 \succ 11000 \succ 10101 \succ 10100 \succ 01111 \succ 10011 \succ 01110 \succ 01101$

$11100 \succ 11011 \succ 11010 \succ 10111 \succ 10110 \succ 11001 \succ 11000 \succ 10101 \succ 01111 \succ 10100 \succ 10011 \succ 01110 \succ 01101$

$11100 \succ 11011 \succ 10111 \succ 11010 \succ 11001 \succ 10110 \succ 10101 \succ 11000 \succ 10100 \succ 10011 \succ 10010 \succ 01111 \succ 01110$

$11100 \succ 11011 \succ 10111 \succ 11010 \succ 11001 \succ 10110 \succ 10101 \succ 11000 \succ 10100 \succ 01111 \succ 01110 \succ 10011 \succ 10010$

$11100 \succ 11011 \succ 10111 \succ 11010 \succ 11001 \succ 10110 \succ 10101 \succ 11000 \succ 01111 \succ 10100 \succ 01110 \succ 10011 \succ 10010$

$11100 \succ 11011 \succ 10111 \succ 11010 \succ 11001 \succ 10110 \succ 10101 \succ 01111 \succ 11000 \succ 10100 \succ 10011 \succ 01110 \succ 10010$

$11100 \succ 11011 \succ 10111 \succ 11010 \succ 11001 \succ 10110 \succ 10101 \succ 01111 \succ 11000 \succ 10100 \succ 01110 \succ 10011 \succ 10010$

$11100 \succ 11011 \succ 10111 \succ 11010 \succ 11001 \succ 10110 \succ 01111 \succ 10101 \succ 11000 \succ 01110 \succ 10100 \succ 10011 \succ 10010$

$11011 \succ 11100 \succ 11010 \succ 10111 \succ 10110 \succ 11001 \succ 11000 \succ 10101 \succ 10011 \succ 10100 \succ 01111 \succ 10010 \succ 10001$

$11011 \succ 11100 \succ 11010 \succ 10111 \succ 10110 \succ 11001 \succ 11000 \succ 10101 \succ 10011 \succ 01111 \succ 10100 \succ 10010 \succ 10001$

$11011 \succ 11100 \succ 11010 \succ 10111 \succ 10110 \succ 11001 \succ 11000 \succ 10101 \succ 01111 \succ 10011 \succ 10100 \succ 01110 \succ 01101$

$11011 \succ 11100 \succ 11010 \succ 10111 \succ 10110 \succ 11001 \succ 11000 \succ 01111 \succ 10101 \succ 10011 \succ 01110 \succ 10100 \succ 01101$

$11011 \succ 11100 \succ 11010 \succ 10111 \succ 10110 \succ 11001 \succ 11000 \succ 01111 \succ 10101 \succ 01110 \succ 10011 \succ 10100 \succ 01101$

$11011 \succ 11100 \succ 11010 \succ 10111 \succ 10110 \succ 11001 \succ 11000 \succ 01111 \succ 01110 \succ 10101 \succ 10011 \succ 10100 \succ 01101$

$11011 \succ 11100 \succ 11010 \succ 10111 \succ 10110 \succ 11001 \succ 01111 \succ 11000 \succ 10101 \succ 10011 \succ 01110 \succ 10100 \succ 01101$

$11011 \succ 11100 \succ 10111 \succ 11010 \succ 11001 \succ 10110 \succ 10101 \succ 11000 \succ 10011 \succ 10100 \succ 10010 \succ 01111 \succ 01110$

$11011 \succ 11100 \succ 10111 \succ 11010 \succ 11001 \succ 10110 \succ 01111 \succ 10101 \succ 11000 \succ 01110 \succ 10011 \succ 10100 \succ 10010$

$11011 \succ 11100 \succ 10111 \succ 11010 \succ 10110 \succ 11001 \succ 10101 \succ 11000 \succ 10011 \succ 01111 \succ 10100 \succ 10010 \succ 10001$

$11011 \succ 11100 \succ 10111 \succ 11010 \succ 10110 \succ 11001 \succ 10101 \succ 11000 \succ 01111 \succ 10011 \succ 10100 \succ 01110 \succ 01101$

$11011 \succ 11100 \succ 10111 \succ 11010 \succ 01111 \succ 10110 \succ 11001 \succ 10101 \succ 01110 \succ 11000 \succ 10011 \succ 01101 \succ 01011$

$11011 \succ 11100 \succ 10111 \succ 11010 \succ 01111 \succ 10110 \succ 11001 \succ 10101 \succ 01110 \succ 11000 \succ 01101 \succ 10011 \succ 01011$

$11011 \succ 11100 \succ 10111 \succ 01111 \succ 11010 \succ 10110 \succ 11001 \succ 10101 \succ 01110 \succ 01101 \succ 11000 \succ 10011 \succ 01011$

$11011 \succ 10111 \succ 11100 \succ 11010 \succ 11001 \succ 10110 \succ 10101 \succ 10011 \succ 11000 \succ 10100 \succ 10010 \succ 01111 \succ 01110$

$11011 \succ 10111 \succ 11100 \succ 11010 \succ 11001 \succ 10110 \succ 10101 \succ 10011 \succ 11000 \succ 10100 \succ 01111 \succ 10010 \succ 01110$

$11011 \succ 10111 \succ 11100 \succ 11010 \succ 01111 \succ 11001 \succ 10110 \succ 01110 \succ 10101 \succ 10011 \succ 11000 \succ 01101 \succ 10100$

$11011 \succ 10111 \succ 11100 \succ 01111 \succ 11010 \succ 11001 \succ 10110 \succ 01110 \succ 10101 \succ 10011 \succ 01101 \succ 11000 \succ 10100$

$11011 \succ 10111 \succ 11100 \succ 01111 \succ 11010 \succ 11001 \succ 10110 \succ 01110 \succ 10101 \succ 01101 \succ 10011 \succ 11000 \succ 10100$

las otras posiciones, 17 a la 32, pueden ser completadas por simetría.

Por ejemplo si tomamos la primera posibilidad e intentamos asignarle una representación lineal $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ se tendrían que cumplir las desigualdades, provenientes de las relaciones $11100 \succ 11011$, $11001 \succ 10110$, $01111 \succ 11000$ y $10010 \succ 01101$:

$$\begin{aligned} \alpha_3 &> \alpha_4 + \alpha_5 \\ \alpha_2 + \alpha_5 &> \alpha_3 + \alpha_4 \\ \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 &> \alpha_1 \\ \alpha_1 + \alpha_4 &> \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 \end{aligned}$$

si sumamos las cuatro desigualdades obtenemos:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 > \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5$$

lo cual nos muestra la imposibilidad.

Referencias

[1] G. Debreu: *Topological methods in cardinal utility theory.* En Mathematical Methods in the Social Sciences, K. J. Arrow, S. Karlin, and P. Suppes, Eds. Stanford University Press, (1959).

[2] Martignon, L. & Hoffrage, U.: *Fast, frugal and fit: Simple heuristics for paired comparison.* Theory and Decision 52 (2001) 29-71.

[3] Fishburn, P.: *Finite Linear Qualitative Probability.* Journal of Mathematical Psychology 40 (1996) 64-77.

[4] Kraft, C., Pratt, J. & Seidenberg, A.: *Intuitive Probability on Finite Sets.* Annals of Mathematical Statistics 30 (1959) 408-419.

[5] Hogarth, R. & Karelaia, N. *Take-the Best and Other Simple Strategies: Why and When They Work 'Well' in Binary Choice.* UPF-DEE Working Papers Series, No. 709 (2003).

[6] CONDER, M. & SLINKO, A. *A Counterexample to Fishburn's Conjecture on Finite Linear Qualitative Probability.* Journal of Mathematical Psychology 48 (2004) 425-431.

[7] BOUYSSOU, D. & PIRLOT, M. *Conjoint Measurement Tools fot MCDM.* LAMSADE Cahiers de Recherche, No. 210 (2003).

Abstract

In the field of decision theory the so called "simple choice rules" are a subject of growing interest. These rules are fast and frugal in reference to the amount of time, information and mental effort they need to proceed. An important family of simple choice rules is the set of procedures that only take into account a small set of dichotomic properties to identify and classify the objects. This report study some aspects of the order relations induced by choices rules in this family.

Key words: Choice, Bounded Rationality

Alejandro Lugón
CENTRUM - CATOLICA
Pontificia Universidad Católica del Perú
alugon@pucp.edu.pe