Pro Mathematica, XIX, 37-38, (2005), 145-159

UNA APLICACIÓN DE PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA EN LA RESOLUCIÓN DE LEYES DE CONSERVACIÓN

Said Kas-Danouche[1]

Resumen

Se obtienen aproximaciones numéricas a tres leyes de conservación usando programación matemática. Para ello se aplica el algoritmo de Seneta-Steiger para obtener soluciones ℓ_1 óptimas de un sistema algebraico $nx(n-1)$.

Palabras Clave: *Ley de conservación, Problema singularmente perturbado, Ecuación de Burger*

1. *Departamento de Matemáticas, Universidad de Oriente, Venezuela*

Introducción

En el campo de las soluciones numéricas para ecuaciones diferenciales parciales, un tema muy importante, e interesante al mismo tiempo, es la aproximación numérica de leyes de conservación de la forma

$$u_t + [f(u)]_x = 0. \tag{1}$$

En general, las soluciones de interés de la ecuación (1) son discontínuas, convirtiéndola en una ecuación muy delicada.

Varios métodos numéricos han sido usados para aproximar soluciones de (1), incluyendo métodos discretos como diferencias finitas (por ejemplo, el esquema de Lax-Friedrichs [6]), métodos de Galerkin usando elementos finitos y métodos de Riemann.

En [7], se puede observar que ocurren dos tipos generales de problemas. Unos con efectos disipativos, que suavizan la solución en la vecindad del choque, y otros con efectos dispersivos, que hacen que la aproximación oscile alrededor de la solución.

Aquí, se investiga la posibilidad de aplicar programación matemática en la resolución de leyes de conservación. Se inicia considerando dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$u'(x) = 0 \qquad y \qquad \left(u^2(x)\right)' = 0,$$

muy relacionadas con las leyes de conservación.

1. Algoritmo de Seneta-Steiger

Consideremos un sistema de n ecuaciones con k incógnitas:

$$\begin{cases} m_{11}x_1 + \cdots + m_{1k}x_k = y_1 \\ m_{21}x_1 + \cdots + m_{2k}x_k = y_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ m_{n1}x_1 + \cdots + m_{nk}x_k = y_n; \end{cases} \tag{2}$$

en general, si $n > k$, no hay solución exacta para el sistema. Sin embargo, podemos minimizar el valor del vector r con

$$r_i = y_i - \sum_{j=1}^{k} m_{ij} x_j, \quad i = 1, ..., n. \tag{3}$$

El valor mínimo de r depende de la norma usada. En nuestro trabajo minimizamos con respecto a la norma 1

$$\|a\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_i|;$$

es decir, que buscamos valores para los cuales

$$\sum_{i=1}^{n} \left| y_i - \sum_{j=1}^{k} m_{ij} x_j \right| \tag{4}$$

sea mínimo. Un vector $\mathbf{x}$ que minimiza a (4) lo llamamos una solución ℓ_1-óptima de (2).

Se puede interpretar este mínimo en el caso de la aproximación de curvas como la combinación lineal de una colección fija de funciones. Así, si $f : R \longrightarrow R$ es una función dada, $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ son k funciones linealmente independientes y $t_1, \ldots, t_n \in R$ son n puntos dados tales que $y_i = f(t_i)$ y $m_{ij} = \varphi_j(t_i)$; entonces buscamos $(x_1, \ldots, x_k)$ tal que, si $\widetilde{f}(t_i) = \sum\limits_{j=1}^{k} x_j \varphi_j(t_i)$, la suma de las distancias verticales entre el valor de f y su aproximado $\widetilde{f}$ en los puntos $t_1, \ldots, t_n$ sea mínima.

El estudio de la mejor aproximación a la solución de (2) en la norma ℓ_1 tiene una historia larga. Laplace, en 1789, desarrolló un algoritmo para minimizar (2) con una sola variable independiente ($k = 1$):

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i - m_i x|$$

Gauss, en 1809, estableció el siguiente teorema que caracteriza algunas soluciones ℓ_1 óptimas:

Teorema:

Existe un r que minimiza $\sum_{i=1}^{n} |r_i|$ y que tiene k componentes nulas.

El lector interesado en una demostración del teorema anterior puede revisar [1].

Podemos plantear el problema de encontrar una solución ℓ_1 óptima en otra forma que será de utilidad más adelante. Supongamos que M tiene p columnas independientes $p \leq k$. Sea A una matriz $(n-p) \times n$ cuyas filas son ortogonales a las columnas de M, entonces $AM = 0$.

Ahora bien, sabemos que $r = y - Mx$ por (3), entonces

$$Ar = Ay \in R^{n-p}. \tag{5}$$

El algoritmo de Seneta-Steiger [9] fue desarrollado para encontrar la solución ℓ_1-óptima de (5) cuando k es cercano a n para minimizar el costo computacional requerido. En este trabajo se usa el algoritmo de Seneta-Steiger para $k = n-1$, el cual se presenta a continuación.

Dada $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{n,n-1} \end{pmatrix}$ la matriz $n \times (n-1)$ con columnas linealmente independientes; es decir, $p = n-1$ y dado Y un vector de n componentes, encontrar el valor de x que minimiza

$$\|r\|_1 = \|Y - Mx\|_1, \qquad r = (r_1, \ldots, r_n).$$

Buscamos una solución ℓ_1-óptima; en este caso, por el Teorema de Gauss, sabemos que hay una solución con $n-1$ componentes nulas y ésta es la que buscaremos.

Supongamos que las filas $1, 2, ..., n-1$ son linealmente independientes; entonces la última fila es combinación lineal de ellas.

Así, existe $a = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, 1)$ tal que $aM = 0$.
Sea $b = aY = a_1y_1 + a_2y_2 + \cdots + a_{n-1}y_{n-1} + y_n \in R$. Así, $ar = aY = b$; pero r tiene $n-1$ componentes cero, entonces sea r_i la componente no cero; es decir,

$$ar = a_i r_i$$

y así,

$$r_i = \frac{b}{a_i}.$$

Ahora queremos seleccionar i para minimizar

$$\|r\|_1 = |r_i| \qquad con \quad r_i = \frac{b}{a_i};$$

por lo tanto, la i será aquella para la cual $|a_i|, i = 1, \ldots, n$ es máximo.
Para calcular a, resolvemos:

$$(a_1,\ldots,a_{n-1})\begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n-1,1} & \cdots & m_{n-1,n-1} \end{pmatrix} = (-m_{n1}, -m_{n2}, \ldots, m_{n,n-1})$$

o tomando la traspuesta $\widetilde{M}$, tenemos

$$\begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{n-1,1} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{1,n-1} & \cdots & m_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} m_{n1} \\ \vdots \\ m_{n,n-1} \end{pmatrix}.$$

Hallando $|a_I| = máx_i |a_i|$ se determina el valor de I tal que r_I sea no nulo. Eliminando la fila I de la matriz M y de Y obtenemos la matriz M' de tamaño $(n-1) \times (n-1)$ y el vector Y' de tamaño $n-1$ y resolvemos el sistema $M'x = Y'$ para determinar x.

2. Caso Lineal Ordinario

Se plantea el problema

$$u'(x) = 0 \quad \text{sobre } (0,1), \quad u(0) = g_0,\ u(1) = g_1 \tag{6}$$

Con $g_0 \neq g_1$ el problema no tiene solución continua, pero sí un número infinito de soluciones discontinuas. Sin embargo, al considerar el problema singularmente perturbado asociado a (6)

$$-\epsilon\,(u(x))'' + (u(x))' = 0 \text{ sobre } (0,1),\ u(0) = g_0,\ u(1) = g_1,\ g_0 \neq g_1 \tag{7}$$

se encuentra que tiene a

$$u(x,\epsilon) = \left(\frac{g_0 - g_1}{1 - \exp(\frac{1}{\epsilon})}\right)\left(\exp(\frac{x}{\epsilon}) - 1\right) + g_0,$$

como su solución. Una de las soluciones discontinuas de (6) se obtiene al tomar el límite de $u(x,\epsilon)$ cuando $\epsilon \to 0^+$; y viene dada por

$$\begin{aligned} u(x,\epsilon) &= g_0, \qquad x \in [0,1) \\ u(1,\epsilon) &= g_1 \end{aligned} \tag{8}$$

Al considerar a (8) como la solución discontinua correcta, se pueden buscar métodos numéricos que la reproduzcan. Por otro lado, se sabe que para lograr una aproximación única de la solución físicamente relevante de ecuaciones hiperbólicas, un procedimiento usual es resolver una aproximación numérica del problema parabólico singularmente perturbado asociado. Considerando el caso estacionario, se puede aplicar a nuestro caso.

Haciendo una aproximación por volumen finito sobre una malla igualmente espaciada de (7) obtenemos el sistema de n ecuaciones para

$(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$:

$$\left\{\begin{array}{l} -3\epsilon g_0 + 7\epsilon u_1 - 5\epsilon u_2 + \epsilon u_3 + 2h(u_1 - g_0) = 0 \\ \vdots \\ -\epsilon u_{i-2} + \epsilon u_{i-1} + \epsilon u_i - \epsilon u_{i+1} + 2h(u_i - u_{i-1}) = 0 \qquad ,i=2,3,\ldots,n-1. \\ \vdots \\ \epsilon u_{n-3} - 5\epsilon u_{n-2} + 7\epsilon u_{n-1} - 3\epsilon g_1 + 2h(g_1 - u_{n-1}) = 0 \end{array}\right.$$

Para una explicación de cómo se obtiene el sistema anterior, ver [3]. Ahora se aplica el algoritmo de Seneta-Steiger al sistema matricial $n \times (n-1)$

$$\begin{pmatrix} 7\epsilon+2h & -5\epsilon & \epsilon & & 0 \\ \epsilon-2h & \epsilon+2h & -\epsilon & & \\ -\epsilon & \epsilon-2h & \epsilon+2h & -\epsilon & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & -\epsilon & \epsilon-2h & \epsilon+2h & -\epsilon \\ & & -\epsilon & \epsilon-2h & \epsilon+2h \\ 0 & & \epsilon & -5\epsilon & 7\epsilon-2h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \\ \vdots \\ \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3\epsilon+2h)g_0 \\ \epsilon g_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \epsilon g_1 \\ (3\epsilon-2h)g_1 \end{pmatrix}.$$

Se logra encontrar, para n=50, soluciones que coinciden con las soluciones exactas hasta un orden de 10^{-4}.

3. Caso No Lineal Ordinario

Sea la ecuación de Burgers no viscosa

$$\left(u^2(x)\right)' = 0 \quad \text{sobre } (0,1) \tag{9}$$

con las condiciones

$$u(0) = g_0,\ u(1) = g_1,\ g_0 \neq g_1. \tag{10}$$

Aquí, al igual que en el caso anterior, existe un número infinito de soluciones discontinuas. Una de esas soluciones es el límite cuando $\epsilon \to 0^+$ de la solución del problema singularmente perturbado asociado a (9) y (10)

$$-\epsilon\,(u(x))'' + \left(u^2(x)\right)' = 0 \quad \text{sobre } (0,1), \qquad u(0) = g_0,\ u(1) = g_1 \quad (11)$$

cuya solución es

$$u(x,\epsilon) = -a \tanh\left(\frac{a(x+C)}{\epsilon}\right), \quad \textit{con} \quad a = \sqrt{g_0^2 - \epsilon u'(0)}.$$

Ahora bien, si $g_0 > g_1$, la solución de (9) y (10) tiene un choque de compresión y viene dada por

$$\begin{cases} u(x) = g_0 \quad \textit{para } 0 \le x < 1, \quad u(1) = g_1, & \textit{si } |g_0| > |g_1| \\ \\ u(x) = g_0 \quad \textit{para } 0 \le x < 0{,}5, & \\ u(0{,}5) = 0 & \textit{si } -g_0 = g_1 \\ u(x) = g_1 \quad \textit{para } 0{,}5 < x \le 1, & \\ \\ u(0) = g_0 \quad u(x) = g_1 \quad \textit{para } 0 \le x < 1, & \textit{si } |g_0| < |g_1|. \end{cases}$$

Similarmente al caso anterior, haciendo una aproximación por volumen finito sobre una malla igualmente espaciada de (11), obtenemos el sistema de n ecuaciones no lineales para $(u_1, \ldots, u_{n-1})$:

$$F(u)=\begin{pmatrix} -3\epsilon g_0 + 7\epsilon u_1 - 5\epsilon u_2 + \epsilon u_3 + 2h(u_1^2 - g_0^2) \\ \vdots \\ -\epsilon u_{i-2} + \epsilon u_{i-1} + \epsilon u_i - \epsilon u_{i+1} + 2h(u_i^2 - u_{i-1}^2) \\ \vdots \\ \epsilon u_{n-3} - 5\epsilon u_{n-2} + 7\epsilon u_{n-1} - 3\epsilon g_1 + 2h(g_1^2 - u_{n-1}^2) \end{pmatrix} = 0,\ i=2,\ldots,n-1.$$

Si se utiliza el método de Newton para encontrar la solución del sistema iterativamente, se obtiene la expresión

$$DF(u^s)[u^{s+1}] = DF(u^s)[u^s] - F(u^s), \quad \text{donde} \quad DF(u^s) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right)\Bigg|_{u=u^s}. \tag{12}$$

En este caso, $DF(u^s)$ es la matriz $n \times (n-1)$ dada por

$$DF(u^s) = \begin{pmatrix} 7\epsilon+4hu_1 & -5\epsilon & \epsilon & & 0 \\ \epsilon-4hu_1 & \epsilon+4hu_2 & -\epsilon & & \\ -\epsilon & \epsilon-4hu_2 & \epsilon+4hu_3 & -\epsilon & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & -\epsilon & \epsilon-4hu_{n-3} & \epsilon+4hu_{n-2} & -\epsilon \\ & & -\epsilon & \epsilon-4hu_{n-2} & \epsilon+4hu_{n-1} \\ 0 & & \epsilon & -5\epsilon & 7\epsilon-4hu_{n-1} \end{pmatrix}$$

y

$$DF(u^s)[u^s] - F(u^s) = \begin{pmatrix} 2h\,(u_1^s)^2 + 3\epsilon g_0 + 2hg_0^2 \\ \epsilon g_0 - 2h\,(u_1^s)^2 + 2h\,(u_2^s)^2 \\ 2h\,(u_3^s)^2 - 2h\,(u_2^s)^2 \\ \vdots \\ 2h\,(u_k^s)^2 - 2h\left(u_{k-1}^s\right)^2 \\ \vdots \\ 2h\left(u_{n-2}^s\right)^2 - 2h\left(u_{n-3}^s\right)^2 \\ \epsilon g_1 - 2h\left(u_{n-2}^s\right)^2 + 2h\left(u_{n-1}^s\right)^2 \\ -2hg_1^2 + 3\epsilon g_1 - 2h\left(u_{n-1}^s\right)^2 \end{pmatrix}_{nx1}.$$

Para resolver el sistema (12), Lavery [5] utilizó en cada iteración el algoritmo de Seneta-Steiger. Así, considerando

$$u^0 = (u_i^0) \quad con \quad u_i^0 = g_1 + (1 - x_i)(g_0 - g_1),$$

para n = 50 y los casos con discontinuidades compresivas, es decir, $g_0 > g_1$, se obtienen aproximaciones que coinciden muy bien con la soluciones exactas.

4. Ley Escalar de Conservación

En vista de que el método funciona para los dos casos ordinarios anteriores, ahora se quiere aplicar a la ecuación diferencial parcial hiperbólica

$$u_t + (\frac{1}{2}u^2)_x = 0, \tag{13}$$

con la condición inicial $u(x,0) = u_0(x)$ y las condiciones de frontera $u(0,t) = g_0(t)$, $u(1,t) = g_1(t)$, considerando la ecuación singularmente perturbada

$$u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x = \epsilon u_{xx} \tag{14}$$

con las mismas condiciones tanto inicial como de frontera.

En este caso, la solución exacta se propaga constantemente a lo largo de las características definidas por $\frac{dx}{dt} = u(x,t)$ [6].

En general, las soluciones contienen discontinuidades $a(t)$ que satisfacen la condición de salto

$$a'(t) = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} = \frac{u_+^2 - u_-^2}{u_+ - u_-}$$

y la condición de entropía

$$u_- > u_+,$$

donde u_+ y u_-son los valores a la derecha y a la izquierda de la discontinuidad, respectivamente.

Joseph, K. T. y Sachdev, P. L. [2] investigaron la ecuación (14) con datos iniciales y de frontera tipo Riemann. La resolvieron exactamente y estudiaron los límites asintóticos cuando t tiende a infinito o cuando el coeficiente de viscosidad, en este caso digamos ε, tiende a cero. Luego, en [8] se investigó la ecuación de Burgers generalizada con amortiguamiento lineal encontrando una forma asintótica de las soluciones periódicas.

En este trabajo se resuelve (14) numéricamente para obtener una aproximación de la solución de (13). Para aproximar u_t y $(\frac{1}{2}u^2)_x - \epsilon u_{xx}$ se utiliza

$$u_t \approx \frac{1}{2}\left[\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} + \frac{u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j}}{k}\right]$$

y

$$(\frac{1}{2}u^2)_x - \epsilon u_{xx} \approx \frac{1}{2}\left[\delta_{i,j} + \delta_{i,j+1}\right];$$

donde $\delta_{i,j}$ es el esquema de volumen finito aplicado en t_j, dado por

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} -3\epsilon g_0(t_j)+7\epsilon u_{1,j}-5\epsilon u_{2,j}+\epsilon u_{3,j}+2h\left(u_{1,j}^2-g_0^2(t_j)\right) \\ \vdots \\ -\epsilon u_{k-2,j}+\epsilon u_{k-1,j}+\epsilon u_{k,j}-\epsilon u_{k+1,j}+2h(u_{k,j}^2-u_{k-1,j}^2) \\ \vdots \\ \epsilon u_{n-3,j}-5\epsilon u_{n-2,j}+7\epsilon u_{n-1,j}-3\epsilon g_1(t_j)+2h\left(g_1^2(t_j)-u_{n-1,j}^2\right) \end{pmatrix}, k=2,\ldots,n-1.$$

En este caso se obtiene el sistema no lineal de n ecuaciones con $n-1$ incógnitas

$$f_1 : \left(2h^2 + 7\epsilon k + hku_{1,j+1}\right) u_{1,j+1} - 5\epsilon ku_{2,j+1} + \epsilon ku_{3,j+1} - bp_{1,j} = 0$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} f_i : {} & -\epsilon ku_{i-2,j+1} + \left(2h^2 + \epsilon k - hku_{i-1,j+1}\right) u_{i-1,j+1} + \\ & + \left(2h^2 + \epsilon k + hku_{i,j+1}\right) u_{i,j+1} - \epsilon ku_{i+1,j+1} - bp_{i,j} = 0 \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} f_n : {} & \epsilon ku_{n-3,j+1} - 5\epsilon ku_{n-2,j+1} + \left(2h^2 + 7\epsilon k - hku_{n-1,j+1}\right) u_{n-1,j+1} - \\ & - bp_{n,j} = 0, \end{aligned}$$

donde

$$
\begin{aligned}
bp_{1,j} &= \left(2h^2 - 7\epsilon k - hku_{1,j}\right) u_{1,j} + 5\epsilon k u_{2,j} - \epsilon k u_{3,j} + \\
&+ \left(2h^2 + 3\epsilon k + hkg_0(t_j)\right) g_0(t_j) + \left(-2h^2 + 3\epsilon k + hkg_0(t_{j+1})\right) g_0(t_{j+1})
\end{aligned}
$$

para $i = 2, ...n-1$ $\qquad\qquad \vdots$

$$
\begin{aligned}
bp_{i,j} &= \epsilon k u_{i-2,j} + \left(2h^2 - \epsilon k + hku_{i-1,j}\right) u_{i-1,j} + \\
&\quad + \left(2h^2 - \epsilon k - hku_{i,j}\right) u_{i,j} + \epsilon k u_{i+1,j}
\end{aligned}
$$

$$\vdots$$

$$
\begin{aligned}
bp_{n,j} &= -\epsilon k u_{n-3,j} + 5\epsilon k u_{n-2,j} + \left(2h^2 - 7\epsilon k + hku_{n-1,j}\right) u_{n-1,j} + \\
&+ \left(2h^2 + 3\epsilon k - hkg_1(t_j)\right) g_1(t_j) + \left(-2h^2 + 3\epsilon k - hkg_1(t_{j+1})\right) g_1(t_{j+1}).
\end{aligned}
$$

Sean para cada $j = 1, 2, ...$

$$
\mathbf{u}_j = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ \vdots \\ u_{n-1,j} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad F(\mathbf{u}_j) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{u}_j) \\ f_2(\mathbf{u}_j) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{u}_j) \end{pmatrix},
$$

usando el método de Newton para obtener la solución de manera iterativa, se tiene el sistema

$$
DF(\mathbf{u}_{j+1}^s)[\mathbf{u}_{j+1}^{s+1}] = DF(\mathbf{u}_{j+1}^s)[\mathbf{u}_{j+1}^s] - F(\mathbf{u}_{j+1}^s). \tag{15}
$$

En este problema $DF(\mathbf{u}_{j+1}^s)$ es la matriz $n \times (n-1)$ dada por:

$$
\begin{pmatrix}
2h^2+7\epsilon k+2hku_{1j+1} & -5\epsilon k & \epsilon k & 0 \\
2h^2+\epsilon k-2hku_{1j+1} & 2h^2+\epsilon k+2hku_{2j+1} & -\epsilon k & \\
-\epsilon k & & & \\
\ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\
 & & & -\epsilon k \\
-\epsilon k & 2h^2+\epsilon k-2hku_{n-2j+1} & 2h^2+\epsilon k-2hku_{n-1j+1} & \\
0 \quad \epsilon k & -5\epsilon k & 2h^2+7\epsilon k-2hku_{n-1j+1} &
\end{pmatrix}_{n\times(n-1)}
$$

y

$$DF(\mathbf{u}^s_{j+1})[\mathbf{u}^s_{j+1}] - F(\mathbf{u}^s_{j+1}) =$$

$$= \begin{pmatrix} hk\left(u^s_{1,j+1}\right)^2 + bp_{1,j} \\ -hk\left(u^s_{1,j+1}\right)^2 + hk\left(u^s_{2,j+1}\right)^2 + \epsilon k g_0(t_{j+1}) + bp_{2,j} \\ \vdots \\ -hk\left(u^s_{i-1,j+1}\right)^2 + hk\left(u^s_{i,j+1}\right)^2 + bp_{i,j} \\ \vdots \\ -hk\left(u^s_{n-2,j+1}\right)^2 + hk\left(u^s_{n-1,j+1}\right)^2 + \epsilon k g_1(t_{j+1}) + bp_{n-1,j} \\ -hk\left(u^s_{n-1,j+1}\right)^2 + bp_{n,j} \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

y

$$\mathbf{u}^{s+1}_{j+1} = \begin{pmatrix} u^{s+1}_{1,j+1} \\ u^{s+1}_{2,j+1} \\ \vdots \\ u^{s+1}_{n-1,j+1} \end{pmatrix} \qquad \text{con } s = 0, 1, 2, \ldots$$

Nuestro método consiste en resolver el sistema (15) usando el método de Seneta-Steiger para cada tiempo $t = t_j$, $j = 1, 2, \ldots, t_{final}$. Usaremos para $s = 0$ en el tiempo $t_{j+1}, u^0_{i,j+1} = u_{i,j}$.

Para verificar los resultados, se usaron casos cuyas soluciones exactas son conocidas. Dichos resultados se clasificaron en tres grupos. En el primero, los casos con solución exacta continua, donde el método numérico aproxima de manera excelente, para todos los experimentos realizados, la solución exacta. En el segundo grupo, los casos de choque en los que se observa una buena concordancia entre las soluciones exactas y las aproximadas cuando n no es grande, observando que a medida que n crece, dígase $n = 70$, se obtiene oscilación cerca del choque. Y por último, en el tercer grupo, los casos de rarefacción, en los cuales se obtienen soluciones aproximadas parecidas a las exactas pero cuando n no es grande, por ejemplo $n = 10$. A medida que n crece las aproximaciones presentan ciertas oscilaciones comparadas con las soluciones exactas. Esto es un indicio de que el esquema numérico aquí tiene cierta inestabilidad. Se espera seguir explorando otras vías para evitar dicha inestabilidad.

Referencias

[1] BLOOMFIELD, PETER AND STEIGER, WILLIAM. *Least absolute desviations.* Birkhäuser, Boston (1983) 1-37.

[2] JOSEPH, K. T. AND SACHDEV, P. L. *Initial boundary value problems for scalar and vector Burgers equations.* Studies in Applied Mathematics, 106 (2001) 481-505.

[3] KAS-DANOUCHE, SAID A. *Resolución de leyes de conservación por programación matemática.* Tesis de Maestría, Universidad de Oriente, (1995).

[4] LAVERY, JOHN E. *Nonoscillatory solution of the steady-state inviscid Burgers' equation by mathematical programming.* Journal of Computational Physics, 79 (1988) 436-448.

[5] LAVERY, J.E. *Solution of steady-state one-dimensional conservation laws by mathematical programming.* SIAM J.Numer.Anal., Vol.26, No.5 (1989) 1081-1089.

[6] LAX, PETER D. *Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves.* Society for Industrial and Applied Mathematics, (1973).

[7] LEVEQUE, RANDALL J. *Numerical methods for conservation laws.* Second edition, Lectures in Mathematics ETH Zurich, Birkhauser Verlag, Basel, (1992).

[8] SACHDEV, P. L., ENFLO, B. O., SRINIVASA, CH., MAYIL, B., AND POONAM GOYAL. *Large-time Asymptotics for periodic solutions of some generalized Burgers equations.* Studies in Applied Mathematics, 110 (2003) 181-204.

[9] SENETA, EUGENE AND STEIGER, W.L. *A new LAD curve-fitting algorithm: Slightly overdetermined equation systems in L_1.* Discrete Applied Mathematics, 7 (1984) 79-91.

Abstract
Numerical approximations are obtained to three consevation laws using mathematical programming. Particularly, the algorithm of Seneta-Steiger is applied to obtain ℓ_1 optimum solutions of an nx$(n-1)$ algebraic system.

Key words: Conservation Law, Singularly Perturbed Problem, Burger's Equation.

Said Kas-Danouche
Departamento de Matemáticas, Universidad de Oriente
Núcleo de Sucre, Cumaná. Venezuela
skasdano@sucre.udo.edu.ve