Pro Mathematica, XIX, 37-38, (2005), 161-167

TEORÍA CUÁNTICA EUCLIDIANA Y LAS ECUACIONES ESTOCÁSTICAS

***Juvenal Castromonte Salinas*[1]**

Resumen

En el modelo del oscilador armónico se analiza la posibilidad de que se originen ecuaciones estocásticas en la mecánica cuántica. Para ello se hace extensión analítica en el tiempo real hacia el eje imaginario de la probabilidad de transición correspondiente al proceso de Ornstein - Uhlenbeck; como resultado se obtiene el producto de la función de estado básico y la función de Green de la ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico. También se estudia la posibilidad de que se originen ecuaciones estocásticas en problemas con funciones propias superiores del hamiltoniano. Se muestra que la mecánica cuántica, a diferencia de la teoría euclidiana, no puede ser interpretada en términos de procesos estocásticos.

Palabras Clave: *Estocástica, cuántica, Fokker-Planck, Oscilador armónico, Ornstein*

1. *Departamento de Física, Informática y Matemáticas, UPCH.*

Introducción

Los resultados obtenidos en [[1], [2], [3]] solo responden al estado básico de los sistemas cuánticos. Para generalizar estos resultados, se toma una solución estacionaria $Z_n(x)$ cualesquiera de la ecuación de Bloch en dirección inversa en el tiempo

$$\frac{\partial\left(e^{\lambda_n t} Z_n(x)\right)}{\partial t} = \hat{H}\left(e^{\lambda_n t} Z_n(x)\right).$$

La ecuación estocástica correspondiente será

$$\dot{x} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} ln\left(e^{\lambda_n t} Z_n(x)\right) = \dot{\varphi}$$

El análogo de la probabilidad de transición se construye por el método de cambio de variable en la integral de Wiener. Tomando en cuenta que la integración se realiza sobre trayectorias con extremos fijos, se obtiene

$$W_n(x_0, 0; x, t) = \frac{e^{\lambda_n t} Z_n(x)}{Z_n(x_0)} Z(x_0, 0; x, t)$$

resultado obtenido en la forma establecida por el teorema de factorización [[1], [2]]. Además, $W_n(x_0, 0; x, t)$ también es solución de la ecuación de Fokker-Planck

$$\frac{\partial W_n}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(W_n \frac{\partial}{\partial x} ln Z_n\right) = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 W_n}{\partial x^2}.$$

Aquí se hace notar que W_n es una función de signo no definido para $n \geq 1$, por esta razón, diremos que es un análogo de la probabilidad de transición. Esta última afirmación se puede hacer evidente con una ilustración, que en este caso es el oscilador armónico; que para $n = 1$ se tiene

$$W_1(x_0, 0; x, t) = \frac{xe^{\omega t}}{x_0} W_0(x_0, 0; x, t),$$

donde se observa que, efectivamente, W_1 cambia de signo.

1. Mecánica Cuántica Euclideana

En [2] se mostró que la mecánica cuántica, también, se puede construir a partir de una extensión analítica en el semiplano complejo derecho, incluyendo el eje imaginario. De manera que, la ecuación de Bloch se transforma en la ecuación de Schrödinger, la probabilidad de transición y su análogo se transforma en la matriz densidad que, a su vez, satisface a la ecuación de Fokker-Planck, pero con el tiempo imaginario. La extensión analítica se realiza para las soluciones de las ecuaciones de Bloch y/o Fokker-Planck, mas no así para la soluciones de la ecuación de Langevine. Para entender esta situación, analizamos la medida de Ornstein-Uhlenbeck y se busca su relación con el oscilador armónico.

Para el oscilador armónico, de [2] se tiene

$$W_0(x_0, 0; x, t) = \frac{\exp\left\{-\frac{2\hbar}{m}\frac{(x - x_0e^{-\omega t})^2}{1 - e^{-2\omega t}}2\omega\right\}}{\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{m}\left(\frac{1 - e^{-2\omega t}}{2\omega}\right)}}.$$

Luego de su extensión analítica se obtiene la matriz densidad

$$\Omega_0(x_0, 0; x, t) = \frac{\exp\left\{-\frac{2\hbar}{m}\frac{(x - x_0e^{-i\omega t})^2}{1 - e^{-2i\omega t}}2\omega\right\}}{\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{m}\left(\frac{1 - e^{-2i\omega t}}{2\omega}\right)}}.$$

Para intervalos de tiempo infinitesimales $\Omega \overset{\Delta t \to 0}{\longmapsto} \delta$, donde el argumento de la función δ es $x_j - x_{j-1}$, de manera que $\dot{x} - iwx = \dot{\varphi}$ no representa una ecuación estocástica en el caso del oscilador armónico cuántico.

Ahora, se considera el caso de las soluciones estacionarias de orden superior de la ecuación de Bloch en dirección contraria al tiempo, con ayuda de las cuales se construye la superposición de N de estas soluciones estacionarias

$$\sum_{n=0}^{N} H_n\left(x_0\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right) e^{\frac{\lambda_n t}{\hbar}} H_n\left(x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right).$$

Esta superposición responde al análogo de probabilidad de transición

$$W_{(N)}(x_0, 0; x, t) = \frac{\sum_{n=0}^{N} H_n\left(x_0\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right) e^{\frac{\lambda_n t}{\hbar}} H_n\left(x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right)}{\sum_{n=0}^{N} H_n^2\left(x_0\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right)} \times$$

$$\times \frac{\exp\left\{-\frac{2\hbar}{m}\frac{(x - x_0 e^{-\omega t})^2}{1 - e^{-2\omega t}} 2\omega\right\}}{\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{m}\left(\frac{1 - e^{-2\omega t}}{2\omega}\right)}}.$$

De la extensión analítica, de la última expresión, se obtiene la matriz densidad

$$\Omega_{(N)}(x_0,0;x,t) = \frac{\sum\limits_{n=0}^{N} H_n\left(x_0\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right) e^{i\frac{\lambda_n t}{\hbar}} H_n\left(x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right)}{\sum\limits_{n=0}^{N} H_n^2\left(x_0\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right)} \times \\ \times \frac{\exp\left\{-\frac{2\hbar}{m}\frac{(x-x_0e^{-i\omega t})^2}{1-e^{-2i\omega t}}2\omega\right\}}{\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{m}\left(\frac{1-e^{-2i\omega t}}{2\omega}\right)}}. \tag{1}$$

En este caso, tampoco se originan ecuaciones estocásticas, la causa es la misma que en el caso del estado básico.

Pero si el número de términos en la última expresión se incrementa indefinidamente, es decir, $N \longrightarrow \infty$, entonces

$$\Omega(x_0,0;x,t) = \frac{\psi^*(x_0,0;x,t)}{\psi^*(x_0,0;x_0,0)}\psi(x_0,0;x,t), \tag{2}$$

donde $\psi^*(x_0,0;x,t)$ y $\psi(x_0,0;x,t)$ son respectivamente, soluciones fundamentales conjugada y "directa"de la ecuación de Schrödinger.

Además, la ecuación (2) puede ser representada a través de integrales por trayectorias. Para el caso del oscilador armónico se tiene

$$\Omega(x_0,0;x,t) = \int_C \exp\left\{i\frac{m}{2\hbar}\int_0^t\left(x-\frac{1}{m}\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 d\tau\right\} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{1}{2m}\int_0^t\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}d\tau\right\}\prod_{\tau=0}^{t}\frac{dx(\tau)}{\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{m}id\tau}}. \tag{3}$$

Aquí pareciera que $\dot{x} - \frac{1}{m}\frac{\partial S}{\partial x} = \dot{\varphi}$ es una ecuación estocástica en teoría cuántica. Pero, esto no es así, toda vez que de (2) se tiene que la matriz densidad es idénticamente nula. Sin embargo, la ecuación (3) es una ecuación estocástica en una aproximación cuasi-clásica.

Estos resultados muestran que a cada hamiltoniano le corresponde un conjunto de ecuaciones estocásticas, cada una de las cuales genera una solución estacionaria (con el mismo hamiltoniano) de la ecuación de Bloch, pero con el tiempo en sentido contrario.

Referencias

[1] BEYLINSON, A.A. *About Proc. International Congress Of Mathematics.* Warsaw, August, (1983).

[2] CASTROMONTE, J. *Acerca de Ecuaciones Estocásticas en la Teoría Cuántica no Relativista.* PRO MATHEMATICA, Vol. XVII, No 34 (2003).

[3] GLIMM, J. and JAFFE, A. *Quantum Physics: A Functional Integral Point of View.* Springer-Verlag, Berlin And Heidelberg Gmbh & Co. KG. (1992).

Abstract

In the harmonic oscillator model, is analyzed the possibility that it is originated stochastic equations in the quantum mechanics. For it is made analytic extension in the real time toward the imaginary axis the probability of transition corresponding to the process Ornstein - Uhlenbeck; as result is obtained the product of the function of the basic state and the Green's function of the Schrödinger's equation for the harmonic oscillator. The possibility is also studied that they originate stochastic equations in problems with superior eigen functions. It is shown that the quantum mechanics, contrary to the Euclidean quantum theory, it cannot be interpreted in terms stochastic processes.

Key words: Stochastic, Quantum, Fokker-Planck, Harmonic Oscillator, Ornstein

Juvenal Castromonte Salinas
Departamento de Física, Informática y Matemáticas
Universidad Peruana Cayetano Heredia
`juvenal@upch.edu.pe`