Pro Mathematica, XIX, 37-38, (2005), 169-177

TRES MANERAS DE CALCULAR LA DEFLEXIÓN DE UN CUERPO QUE CAE SOBRE UN PLANETA EN ROTACIÓN

Hugo Medina Guzmán[1]

Resumen

Se estudia la caída de un cuerpo desde cierta altura sobre la superficie de la tierra hasta el suelo. Mediante mediciones de precisión se demuestra que la caída no es directa, sino que, debido a la rotación de la tierra en torno a su propio eje, hay una pequeña deflexión hacia el este de todos los cuerpos que caen. La finalidad de este trabajo es la de analizar este efecto haciendo uso del cálculo vectorial y empleando tres métodos distintos.

Palabras Clave: *Aplicación del cálculo vectorial en la enseñanza de Física.*

1. *Sección Física, Departamento de Ciencias, PUCP.*

Si se deja caer un cuerpo desde una altura h sobre la superficie de la Tierra, se considera habitualmente que cae en dirección vertical hacia abajo, hasta el suelo. Sin embargo, las mediciones de precisión demuestran que no es así, sino que, debido a la rotación de la Tierra en torno a su propio eje, hay una pequeña deflexión hacia el este de todos los cuerpos que caen. La finalidad de esta sección es la de analizar este efecto.

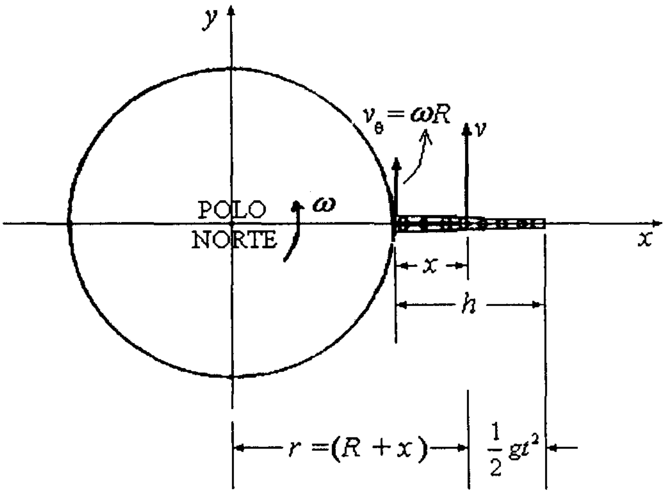
Físicamente, esta desviación hacia el este de un cuerpo que cae se puede considerar como un producto de fuerzas ficticias que intervienen en virtud del hecho de que la Tierra es un sistema de referencia acelerado. O sea, por la rotación de la Tierra sobre su eje, todos y cada uno de los puntos de su superficie sufren una aceleración centrípeta dirigida radialmente hacia el interior, de tal modo que todos los orígenes fijos con respecto a la superficie de la Tierra están acelerados. La fuerza ficticia que se asocia a esta aceleración recibe el nombre de fuerza de *Coriolis.*

Desde lo alto de una torre de altura h que se encuentra en la línea ecuatorial se deja caer una piedra. Vamos a calcular la desviación que sufre la piedra al caer.

1. Visto desde fuera de la Tierra (Sistema S)[3]

La figura muestra la Tierra vista desde el espacio sobre el polo norte. Cuando se suelta la piedra además de la caída por la aceleración de la gravedad, tiene un movimiento transversal con una velocidad dependiente de la distancia r al centro,

$$v = \omega r,$$



donde

$$r = R + x \quad \text{y} \quad x = h - \frac{1}{2}\, gt^2.$$

Luego

$$v = \omega \left(R + h - \frac{1}{2}\, gt^2 \right).$$

El espacio recorrido por la piedra es

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^t v\, dt \\ &= \int_0^t \omega \left(R + h - \frac{1}{2} gt^2 \right) dt \\ &= \omega \left[(R + h)t - \frac{1}{6} gt^3 \right]. \end{aligned}$$

Pero la parte inferior de la tierra en ese tiempo se ha desplazado

$$S_2 = \omega R t$$

La diferencia de recorrido en ese tiempo es

$$\begin{aligned} d &= S_2 - S_1 \\ &= \omega\left[\left((R+h)t - \frac{1}{6}gt^3\right)\right] - \omega Rt \\ &= \omega\left(h - \frac{1}{6}gt^2\right)t. \end{aligned}$$

Como t es el tiempo de caída $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$, se tiene

$$d = \omega\left[h - \frac{1}{6}g\left(\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^2\right]\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{2}{3}\omega h\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

2. Visto por un Observador en la Tierra (Sistema S)[1]

La velocidad y la aceleración son respectivamente

$$\vec{v'} = \vec{v} - \vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$\vec{a'} = \vec{a} - 2\vec{\omega}\times\vec{v'} - \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r},$$

donde

$$\vec{\omega} = \omega\hat{k}, \qquad \vec{r} = (R+h-x)\hat{r}, \qquad \vec{v} = -gt\hat{r}.$$

Así, la velocidad $\vec{v'}$

$$\begin{aligned} \vec{v'} &= -gt\hat{r} - \omega\hat{k}\times(R+h-x)\hat{r} \\ &= -gt\hat{r} - \omega(R+h-x)\hat{\theta}, \end{aligned}$$

y la aceleración $\vec{a'}$

$$\begin{aligned}\vec{a'} &= -g\hat{r} - 2\omega\hat{k} \times \left[-gt\hat{r} - \omega(R+h-x)\hat{\theta}\right] - \omega\hat{k} \times \omega\hat{k} \times (R+h-x)\hat{r} \\ &= \left[-g - \omega^2\left(R+h-\frac{1}{2}gt^2\right)\right]\hat{r} + 2\omega gt\hat{\theta}.\end{aligned}$$

La aceleración radial es

$$a_r = -g - \omega^2\left(R+h-\frac{1}{2}gt^2\right).$$

Como $\omega^2\left(R+h-\frac{1}{2}gt^2\right) \ll g$ se tiene $a_r = -g$.

Por otra parte, la aceleración transversal es

$$a_\theta = 2\omega gt$$

y la velocidad transversal es

$$v_\theta = \int_0^t a_\theta dt = \omega gt^2.$$

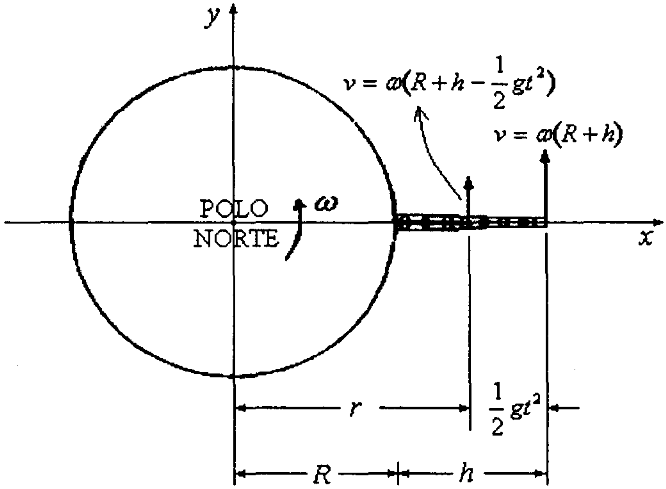
Entonces, el desplazamiento transversal es

$$d = \int_0^t v_\theta dt = \int_0^t \omega gt^2 dt = \frac{1}{3}\omega gt^3.$$

Siendo $a_r = -g$ y la altura de caída h, el tiempo de caída es $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, el desplazamiento transversal es finalmente

$$d = \frac{1}{3}\omega g\left(\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^3 = \frac{2}{3}\omega h\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

3. Cálculo por la Conservación del Momento Angular[2]



De modo equivalente, se puede derivar que esta desviación se debe al hecho de que la trayectoria de una partícula en el campo terrestre debe ser de índole tal que conserve su momento angular. Así pues, conforme su distancia radial r del centro de la Tierra se va haciendo menor se desprende de $L = mrv_\theta$ que la componente tangencial de velocidad v_θ de la partícula tiene que aumentar.

A continuación, vamos a adoptar este último punto de vista y a mostrar la forma en que se puede explicar esta deflexión hacia el este, mediante la utilización de la conservación del momento angular.

En la figura, sea una partícula de masa m a una altura h sobre la superficie de la Tierra en un punto que, para simplificar, consideramos que se encuentra sobre el Ecuador. Para los casos de interés físico, la altura h será por lo común muy pequeña en comparación con el radio, R de la Tierra. Si se supone que la partícula parte del reposo en relación a un punto de la superficie de la Tierra verticalmente por debajo de él entonces, inicialmente, el componente radial de la velocidad v_r de la partícula desaparece y su componente tangencial v_θ será $\omega(R+h)$, en donde ω es la velocidad angular de la Tierra. Al soltarse, debido a la atracción gravitacional de la Tierra, la partícula comienza a caer verticalmente hacia abajo y, por ende, su distancia radial r del centro de la Tierra comienza a disminuir. De $L = mrv_\theta$ se deduce que el componente tangencial de su velocidad v_θ debe aumentar este proceso y de modo tal que haga que el producto rv_θ sea constante. En términos más cuantitativos, esto quiere decir que durante su descenso hacia el suelo, la distancia radial r y la velocidad tangencial v_θ se deben relacionar por medio de

$$mrv_\theta = m\omega(R+h)^2. \tag{1}$$

Puesto que, inicialmente, la velocidad de la partícula es $\omega(R+h)$, de tal modo que su cantidad de movimiento angular L en relación al centro de la Tierra es $m\omega(R+h)^2$. Anticipándonos al hecho de que la desviación hacia el este será muy pequeña, podemos escribir para la distancia radial r del cuerpo al centro de la Tierra en cualquier instante t,

$$r = R + h - \frac{1}{2}gt^2. \tag{2}$$

Y al sustituir esto en (1) obtenemos:

$$v_\theta = \frac{\omega(R+h)^2}{R+h-\frac{1}{2}gt^2} = \frac{\omega(R_0+h)}{\left[1-\frac{1}{2}gt^2/(R+h)\right]}. \tag{3}$$

Para calcular la magnitud de la desviación hacia el este, sea v_y en el instante t, la velocidad del cuerpo que cae en la dirección hacia el este, tal y como lo ve un observador fijo con respecto a la superficie de la

Tierra. Entonces

$$\begin{aligned}
v_y &= v_o - r\omega \\
&= \frac{\omega(R_0+h)}{[1-\frac{1}{2}gt^2/(R+h)]} - \left(R+h-\frac{1}{2}gt^2\right)\omega \\
&= (R+h)\omega\left[1+\frac{\frac{1}{2}gt^2}{R+h}\right] - (R+h)\omega + \frac{1}{2}gt^2\omega \\
&= gt^2\omega.
\end{aligned}$$

En donde la segunda igualdad se obtiene de la utilización de (2) y (3) y la tercera, a continuación, mediante el hecho de que $gt^2 << (R+h)$ y el empleo del teorema binomial. Al integrar esta fórmula para v_y se obtiene, para la desviación total hacia el este y en el instante t,

$$y = \frac{1}{3}gt^3\omega.$$

Finalmente, puesto que el tiempo que necesita la partícula para caer la distancia h es de $(2hg)^{\frac{1}{2}}$ según (10-29), se desprende que la deflexión total hacia el este d, se puede expresar como sigue

$$d = \frac{2}{3}\omega h\sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{4}$$

Por ejemplo, si se deja caer una partícula desde una altura de 100 metros, su desviación hacia el este, según esta fórmula, se descubre que es (al sustituir los valores $h = 100$ metros y $\omega = 7{,}2 \times 10^{-5} rad/s$) de 2,2 cm. Esta desviación es muy pequeña y sólo se puede observar en condiciones controladas cuidadosamente.

Es importante recordar la base física para la deflexión pronosticada en (4). Conforme la partícula desciende hacia la superficie de la Tierra su velocidad tangencial v_θ debe aumentar para que el producto rv_θ sea constante. Por consiguiente, de esto se desprende que su velocidad tangencial debe sobrepasar a la del punto de la superficie que se encontraba inicial e inmediatamente por debajo, y, en esta forma, se desvía hacia el este.

Referencias

[1] A. FINN: *Física.* Addison Wesley (1992).

[2] S. GARTENHAUS: *Física.* Holt, Rinehart and Winston, Inc, (1977).

[3] H. MEDINA: *Física*, 3rd ed. Volumen 1, Lima, (1995).

Abstract

The fall of a body from a height on the earth surface to the ground. By means of measurements of precision one demonstrates that the fall is not direct, but that, due to the earth rotation around its own axis is a small deflection towards the east of all the bodies that fall. The purpose of this work is to analyze this effect doing use of the vector calculus and three different methods.

Key words: Application of vector calculus in Physics teaching.

Hugo Medina Guzmán
Sección Física, Departamento de Ciencias
Pontificia Univesidad Católica del Perú,
hmedina@pucp.edu.pe