# BUENA FORMULACIÓN LOCAL DE UN SISTEMA ACOPLADO DE ECUACIONES DISPERSIVAS

*Juan Montealegre*[1] *Carmen Monzón*[1]
*Risley Rengifo*[1]

***Resumen***

*En este artículo estudiamos la buena formulación local del problema de valor inicial asociado a un sistema de ecuaciones de Korteweg-de Vries acopladas a través de los efectos dispersivos y no lineales.*
*Utilizando el método de regularización parabólica probamos la existencia y unicidad de solución local, y las estimaciones de Bona-Smith para demostrar la dependencia continua de la solución respecto de los datos iniciales.*

***Palabras Clave:*** *Sistema dispersivo, Buena formulación local, Regularización parabólica, Estimaciones de Bona-Smith.*

1. *Sección Matemática, Departamento de Ciencias, PUCP.*

# 1. Introducción

Cuando dos ondas solitarias se propagan en una dirección a lo largo de interfases separadas verticalmente en un fluido estratificado con velocidades de fase que difieren en una cantidad relativamente pequeña, se observa que la energía es transferida de la onda más rápida, que momentáneamente se encuentra adelantada, a la onda más lenta, temporalmente atrasada. Bajo tales condiciones, la energía es intercambiada alternativamente entre las ondas en la dirección opuesta a su propagación, dando como resultado saltos sucesivos. Con el fin de modelar esta interacción J. Gear y R. Grimshaw [4], usando las ecuaciones de Lagrange para fluidos estratificados, construyeron el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + \partial_x^3 u + \alpha \partial_x^3 v + u \partial_x u + \beta v \partial_x v + \gamma \partial_x (uv) = 0 \\ \partial_t v + \alpha \partial_x^3 u + \partial_x^3 v + \gamma u \partial_x u + v \partial_x v + \beta \partial_x (uv) = 0 \end{array} \right. , \tag{S}$$

donde $u = u(x,t)$ y $v = v(x,t)$ son funciones con valores reales, $(x,t) \in \mathbf{R} \times [0, +\infty[$ y $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ son constantes reales. El sistema tiene la estructura de dos ecuaciones de Korteweg-de Vries acopladas a través de lo términos dispersivos y los términos no lineales.

El objetivo de este artículo consiste en demostrar la buena formulación local del problema de valor inicial

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + \partial_x^3 u + \alpha \partial_x^3 v + u \partial_x u + \beta v \partial_x v + \gamma \partial_x (uv) = 0 \\ \partial_t v + \alpha \partial_x^3 u + \partial_x^3 v + \gamma u \partial_x u + v \partial_x v + \beta \partial_x (uv) = 0 \\ u(0) = \varphi \\ v(0) = \psi, \end{array} \right. \tag{P}$$

cuando $\Phi = (\varphi, \psi) \in H^s(\mathbf{R}) \times H^s(\mathbf{R})$ con $s > \frac{3}{2}$. La noción de buena formulación que será utilizada en este artículo incluye existencia, unicidad, la propiedad de persistencia (es decir, la solución describe un curva continua en $H^s(\mathbf{R}) \times H^s(\mathbf{R})$ siempre que $\Phi \in H^s(\mathbf{R}) \times H^s(\mathbf{R})$ y dependencia continua de la solución respecto al dato inicial.

Con el fin de probar la existencia, unicidad y la propiedad de persistencia de la solución local se utilizará *regularización parabólica*, es decir,

se probará la buena formulación local del problema de valor inicial regularizado

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \alpha \partial_x^3 v + u\partial_x u + \beta v \partial_x v + \gamma \partial_x (uv) - \mu \partial_x^2 u = 0 \\ \partial_t v + \alpha \partial_x^3 u + \partial_x^3 v + \gamma u \partial_x u + v \partial_x v + \beta \partial_x (uv) - \mu \partial_x^2 v = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ v(x,0) = \psi(x), \end{cases} \tag{PR}$$

y entonces será demostrado que $\lim\limits_{\mu \to 0^+} (u_\mu, v_\mu)$ existe y es la única solución del problema (P).

Como será visto, la dependencia continua de la solución local del problema (PR) respecto del dato inicial no es aplicable cuando $\mu \to 0^+$; por esta razón, para demostrar la dependencia continua de la solución del problema (P) respecto de los datos iniciales se utilizará las *estimaciones de Bona-Smith* [3]. La idea es la siguiente, si $U$ y $U_n$, $n \in \mathbf{N}$, son las soluciones de los problemas (P) con datos iniciales $\Phi$ y $\Phi_n$ respectivamente, tales que $\lim\limits_{n \to +\infty} \Phi_n = \Phi$ en $H^s(\mathbf{R}) \times H^s(\mathbf{R})$, se construirán $\Phi_\mu, \Phi_{\mu,n} \in H^\infty(\mathbf{R}) \times H^\infty(\mathbf{R})$ tales que $\lim\limits_{\mu \to 0^+} \Phi_\mu = \Phi$ y $\lim\limits_{\mu \to 0^+} \Phi_{\mu,n} = \Phi_n$ en $H^s(\mathbf{R}) \times H^s(\mathbf{R})$, siendo el segundo límite uniforme en $n$. Considerando $U_\mu$ y $U_{\mu,n}$ las soluciones de (PR) con datos iniciales $\Phi_\mu$ y $\Phi_{\mu,n}$ respectivamente, mostraremos que $\lim\limits_{\mu \to 0^+} U_{\mu,n}(t) = U_n(t)$ en $H^s(\mathbf{R}) \times H^s(\mathbf{R})$ y que la solución aproximada $U_\mu(t)$ depende continuamente de $\Phi_\mu$ en $H^s(\mathbf{R}) \times H^s(\mathbf{R})$. Entonces, la convergencia uniforme en $n$ de $\lim\limits_{\mu \to 0^+} \Phi_{\mu,n} = \Phi_n$ implicará que $\lim\limits_{\mu \to 0^+} U_{\mu,n}(t) = U(t)$ en $H^s(\mathbf{R}) \times H^s(\mathbf{R})$ y por tanto la dependencia continua.

Usamos las notaciones usuales. Por $L^p(\mathbf{R})$ representamos al espacio de (clases de) funciones definidas sobre $\mathbf{R}$ cuya $p$-ésima potencia es integrable, con la norma $\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$, $1 \leq p < +\infty$. Por $L^\infty(\mathbf{R})$ representamos al espacio de las funciones definidas sobre $\mathbf{R}$, medibles y esencialmente acotadas con la norma

$$\|f\|_{L^\infty} = \text{ínf}\,\{c > 0 : |\{x \in \mathbf{R} : |f(x)| > c\}| = 0\}.$$

# 1. Introducción

Cuando dos ondas solitarias se propagan en una dirección a lo largo de interfases separadas verticalmente en un fluido estratificado con velocidades de fase que difieren en una cantidad relativamente pequeña, se observa que la energía es transferida de la onda más rápida, que momentáneamente se encuentra adelantada, a la onda más lenta, temporalmente atrasada. Bajo tales condiciones, la energía es intercambiada alternativamente entre las ondas en la dirección opuesta a su propagación, dando como resultado saltos sucesivos. Con el fin de modelar esta interacción J. Gear y R. Grimshaw [4], usando las ecuaciones de Lagrange para fluidos estratificados, construyeron el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \alpha \partial_x^3 v + u \partial_x u + \beta v \partial_x v + \gamma \partial_x (uv) = 0 \\ \partial_t v + \alpha \partial_x^3 u + \partial_x^3 v + \gamma u \partial_x u + v \partial_x v + \beta \partial_x (uv) = 0 \end{cases}, \tag{S}$$

donde $u = u(x,t)$ y $v = v(x,t)$ son funciones con valores reales, $(x,t) \in \mathbf{R} \times [0, +\infty[$ y $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ son constantes reales. El sistema tiene la estructura de dos ecuaciones de Korteweg-de Vries acopladas a través de los términos dispersivos y los términos no lineales.

El objetivo de este artículo consiste en demostrar la buena formulación local del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \alpha \partial_x^3 v + u \partial_x u + \beta v \partial_x v + \gamma \partial_x (uv) = 0 \\ \partial_t v + \alpha \partial_x^3 u + \partial_x^3 v + \gamma u \partial_x u + v \partial_x v + \beta \partial_x (uv) = 0 \\ u(0) = \varphi \\ v(0) = \psi, \end{cases} \tag{P}$$

cuando $\Phi = (\varphi, \psi) \in H^s(\mathbf{R}) \times H^s(\mathbf{R})$ con $s > \frac{3}{2}$. La noción de buena formulación que será utilizada en este artículo incluye existencia, unicidad, la propiedad de persistencia (es decir, la solución describe una curva continua en $H^s(\mathbf{R}) \times H^s(\mathbf{R})$ siempre que $\Phi \in H^s(\mathbf{R}) \times H^s(\mathbf{R})$) y dependencia continua de la solución respecto al dato inicial.

Con el fin de probar la existencia, unicidad y la propiedad de persistencia de la solución local se utilizará *regularización parabólica*, es decir,

se probará la buena formulación local del problema de valor inicial regularizado

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \alpha \partial_x^3 v + u \partial_x u + \beta v \partial_x v + \gamma \partial_x (uv) - \mu \partial_x^2 u = 0 \\ \partial_t v + \alpha \partial_x^3 u + \partial_x^3 v + \gamma u \partial_x u + v \partial_x v + \beta \partial_x (uv) - \mu \partial_x^2 v = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ v(x,0) = \psi(x), \end{cases} \tag{PR}$$

y entonces será demostrado que $\lim\limits_{\mu \to 0^+} (u_\mu, v_\mu)$ existe y es la única solución del problema (P).

Como será visto, la dependencia continua de la solución local del problema (PR) respecto del dato inicial no es aplicable cuando $\mu \to 0^+$; por esta razón, para demostrar la dependencia continua de la solución del problema (P) respecto de los datos iniciales se utilizará las *estimaciones de Bona-Smith* [3]. La idea es la siguiente, si $U$ y $U_n$, $n \in \mathbf{N}$, son las soluciones de los problemas (P) con datos iniciales $\Phi$ y $\Phi_n$ respectivamente, tales que $\lim\limits_{n \to +\infty} \Phi_n = \Phi$ en $H^s(\mathbf{R}) \times H^s(\mathbf{R})$, se construirán $\Phi_\mu, \Phi_{\mu,n} \in H^\infty(\mathbf{R}) \times H^\infty(\mathbf{R})$ tales que $\lim\limits_{\mu \to 0^+} \Phi_\mu = \Phi$ y $\lim\limits_{\mu \to 0^+} \Phi_{\mu,n} = \Phi_n$ en $H^s(\mathbf{R}) \times H^s(\mathbf{R})$, siendo el segundo límite uniforme en $n$. Considerando $U_\mu$ y $U_{\mu,n}$ las soluciones de (PR) con datos iniciales $\Phi_\mu$ y $\Phi_{\mu,n}$ respectivamente, mostraremos que $\lim\limits_{\mu \to 0^+} U_{\mu,n}(t) = U_n(t)$ en $H^s(\mathbf{R}) \times H^s(\mathbf{R})$ y que la solución aproximada $U_\mu(t)$ depende continuamente de $\Phi_\mu$ en $H^s(\mathbf{R}) \times H^s(\mathbf{R})$. Entonces, la convergencia uniforme en $n$ de $\lim\limits_{\mu \to 0^+} \Phi_{\mu,n} = \Phi_n$ implicará que $\lim\limits_{\mu \to 0^+} U_{\mu,n}(t) = U(t)$ en $H^s(\mathbf{R}) \times H^s(\mathbf{R})$ y por tanto la dependencia continua.

Usamos las notaciones usuales. Por $L^p(\mathbf{R})$ representamos al espacio de (clases de) funciones definidas sobre $\mathbf{R}$ cuya $p$-ésima potencia es integrable, con la norma $\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$, $1 \leq p < +\infty$. Por $L^\infty(\mathbf{R})$ representamos al espacio de las funciones definidas sobre $\mathbf{R}$, medibles y esencialmente acotadas con la norma

$$\|f\|_{L^\infty} = \text{ínf}\{c > 0 : |\{x \in \mathbf{R} : |f(x)| > c\}| = 0\}.$$

se probará la buena formulación local del problema de valor inicial regularizado

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \alpha \partial_x^3 v + u \partial_x u + \beta v \partial_x v + \gamma \partial_x (uv) - \mu \partial_x^2 u = 0 \\ \partial_t v + \alpha \partial_x^3 u + \partial_x^3 v + \gamma u \partial_x u + v \partial_x v + \beta \partial_x (uv) - \mu \partial_x^2 v = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ v(x,0) = \psi(x), \end{cases} \tag{PR}$$

y entonces será demostrado que $\lim\limits_{\mu \to 0^+} (u_\mu, v_\mu)$ existe y es la única solución del problema (P).

Como será visto, la dependencia continua de la solución local del problema (PR) respecto del dato inicial no es aplicable cuando $\mu \to 0^+$; por esta razón, para demostrar la dependencia continua de la solución del problema (P) respecto de los datos iniciales se utilizará las *estimaciones de Bona-Smith* [3]. La idea es la siguiente, si $U$ y $U_n$, $n \in \mathbf{N}$, son las soluciones de los problemas (P) con datos iniciales $\Phi$ y $\Phi_n$ respectivamente, tales que $\lim\limits_{n \to +\infty} \Phi_n = \Phi$ en $H^s(\mathbf{R}) \times H^s(\mathbf{R})$, se construirán $\Phi_\mu, \Phi_{\mu,n} \in H^\infty(\mathbf{R}) \times H^\infty(\mathbf{R})$ tales que $\lim\limits_{\mu \to 0^+} \Phi_\mu = \Phi$ y $\lim\limits_{\mu \to 0^+} \Phi_{\mu,n} = \Phi_n$ en $H^s(\mathbf{R}) \times H^s(\mathbf{R})$, siendo el segundo límite uniforme en $n$. Considerando $U_\mu$ y $U_{\mu,n}$ las soluciones de (PR) con datos iniciales $\Phi_\mu$ y $\Phi_{\mu,n}$ respectivamente, mostraremos que $\lim\limits_{\mu \to 0^+} U_{\mu,n}(t) = U_n(t)$ en $H^s(\mathbf{R}) \times H^s(\mathbf{R})$ y que la solución aproximada $U_\mu(t)$ depende continuamente de $\Phi_\mu$ en $H^s(\mathbf{R}) \times H^s(\mathbf{R})$. Entonces, la convergencia uniforme en $n$ de $\lim\limits_{\mu \to 0^+} \Phi_{\mu,n} = \Phi_n$ implicará que $\lim\limits_{\mu \to 0^+} U_{\mu,n}(t) = U(t)$ en $H^s(\mathbf{R}) \times H^s(\mathbf{R})$ y por tanto la dependencia continua.

Usamos las notaciones usuales. Por $L^p(\mathbf{R})$ representamos al espacio de (clases de) funciones definidas sobre $\mathbf{R}$ cuya $p$-ésima potencia es integrable, con la norma $\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$, $1 \le p < +\infty$. Por $L^\infty(\mathbf{R})$ representamos al espacio de las funciones definidas sobre $\mathbf{R}$, medibles y esencialmente acotadas con la norma

$$\|f\|_{L^\infty} = \text{ínf}\,\{c > 0 : |\{x \in \mathbf{R} : |f(x)| > c\}| = 0\}.$$

Para cada $s \in \mathbf{R}$, el espacio de Sobolev de orden $s$ definido como la compleción del espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ con respecto a la norma

$$\|f\|_s = \left(\int_{\mathbf{R}} \left(1+|\xi|^2\right)^s \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 dx\right)^{1/2}.$$

La transformada de Fourier de $f$ es definida como

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{-ix\xi} f(x)\, dx$$

y la transformada de Fourier inversa de $f$ es dada por

$$\check{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{i\xi x} f(\xi)\, d\xi.$$

Para $s$ un número real, representamos por $\mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ al espacio de Hilbert $H^s(\mathbf{R}) \times H^s(\mathbf{R})$ con el producto interno $\langle (u_1, v_1), (u_2, v_2)\rangle_{\mathbf{H}^s} = \langle u_1, u_2\rangle_s + \langle v_1, v_2\rangle_s$ y la norma $\|(u,v)\|_{\mathbf{H}^s} = \left(\|u\|_s^2 + \|v\|_s^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Por $J^s = \left(1-\partial_x^2\right)^{s/2}$ y $D^s = \left(-\partial_x^2\right)^{s/2}$ representamos a los potenciales de Bessel y Riesz de orden $-s$ respectivamente. Si $A$ y $B$ son dos operadores, entonces el conmutador es dado por $[A,B] = AB - BA$. Así $[J^s, f]\, g = J^s(fg) - fJ^s g$ en la cual $f$ es considerado como un operador de multiplicación.

Distintas constantes positivas serán representadas por $C$, ellas pueden variar de línea a línea, siendo su dependencia de otros parámetros mostrada cuando sea conveniente.

# 2. El Problema Lineal Regularizado

Consideremos el problema lineal asociado con (PR)

$$\begin{cases} \partial_t U(t) + A_\mu U(t) = 0, & x \in \mathbf{R},\ t > 0 \\ U(0) = \Phi, \end{cases} \tag{LR}$$

donde $U = (u, v)$, $A_\mu$ es el operador definido por

$$\begin{cases} \mathcal{D}(A_\mu) = \mathbf{H}^{s+3}(\mathbf{R}), \, s \geq 0 \\ A_\mu(u, v) = \left(\partial_x^3 u + \alpha\partial_x^3 v - \mu\partial_x^2 u, \alpha\partial_x^3 u + \partial_x^3 v - \mu\partial_x^2 v\right). \end{cases} \tag{1}$$

y $\Phi = (\varphi, \psi)$. En esta sección demostraremos el teorema 2, que asegura la existencia de una solución única para el problema (LR) y la validez de la desigualdad (4), lo que es fundamental para el desarrollo de la sección 3.

**Proposición 1.** *El operador* $-A_\mu$ *es disipativo maximal en* $\mathbf{H}^s(\mathbf{R})$, $s \geq 0$.

**Prueba.** Si $U \in \mathbf{H}^{s+3}(\mathbf{R})$, entonces por definición de $-A_\mu$ y propiedades de la norma y el producto interno en $\mathbf{H}^s(\mathbf{R})$, tenemos

$$\|-A_\mu U\|_{\mathbf{H}^s}^2 \leq \left[(\alpha+1)^2 + \mu^2\right] \|U\|_{\mathbf{H}^{s+3}}^2$$

Entonces $-A_\mu U \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$.

Además, $\langle -A_\mu U, U\rangle_{\mathbf{H}^s} = -\mu \|\partial_x U\|_{\mathbf{H}^s}^2 \leq 0$, luego por [9, proposición 3.1], $-A_\mu$ es disipativo en $\mathbf{H}^s(\mathbf{R})$.

Por último, el operador $I + A_\mu$ es sobreyectivo, es decir, para cada $V \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ existe $U \in \mathbf{H}^{s+3}(\mathbf{R})$ tal que $(I + A_\mu)U = V$. En efecto, dado $V = (u, v) \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ definimos $U = (f, g)$ por

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\left(1 + \mu\xi^2 - i\xi^3\right)\widehat{u}(\xi) + i\alpha\xi^3\widehat{v}(\xi)}{\left(1 + \mu\xi^2 - i\xi^3\right)^2 + \alpha^2\xi^6}$$

y

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{\left(1 + \mu\xi^2 - i\xi^3\right)\widehat{v}(\xi) + i\alpha\xi^3\widehat{u}(\xi)}{\left(1 + \mu\xi^2 - i\xi^3\right)^2 + \alpha^2\xi^6},$$

y no es difícil ver que $U \in \mathbf{H}^{s+3}(\mathbf{R})$, por lo tanto, $U$ es disipativo maximal. $\square$

**Teorema 2.** *Si $\mu > 0$, el operador $-A_\mu$ es el generador de un semigrupo de contracciones $\{W_\mu(t)\}_{t\geq 0}$ en $\mathbf{H}^s(\mathbf{R})$, $s \geq 0$, tal que*

$$W_\mu(t)\Phi = \begin{pmatrix} \left(E_\mu^+(t) + E_\mu^-(t)\right)\varphi + \left(E_\mu^+(t) - E_\mu^-(t)\right)\psi \\ \left(E_\mu^+(t) - E_\mu^-(t)\right)\varphi + \left(E_\mu^+(t) + E_\mu^-(t)\right)\psi \end{pmatrix} \tag{2}$$

*en donde $E_\mu^\pm(t)$ son los multiplicadores de Fourier definidos por*

$$\widehat{E_\mu^\pm(t)\varphi}(\xi) = \frac{e^{\lambda_\mu^\pm(\xi)t}}{2}\widehat{\varphi}(\xi) \quad \text{con } \lambda_\mu^\pm(\xi) = -\mu\xi^2 + i\xi^3(1\pm\alpha), \tag{3}$$

*y para cada $t \geq 0$ se tiene que $W_\mu(t) \in \mathcal{L}(\mathbf{H}^s(\mathbf{R}), \mathbf{H}^{s+r}(\mathbf{R}))$ con*

$$\|W_\mu(t)\Phi\|_{\mathbf{H}^{s+r}} \leq K_r\sqrt{1 + \frac{1}{(2\mu t)^r}}\,\|\Phi\|_{\mathbf{H}^s} \tag{4}$$

*para todo $r \geq 0$ y $\Phi \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$. Además, cualquiera sea $\Phi \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ la función*

$$W_\mu(\cdot)\Phi : \mathbf{R}_0^+ \to \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$$

*es la única solución del problema de valor inicial $(LR)$ en*

$$C([0,+\infty[\,, \mathbf{H}^s(\mathbf{R})) \cap C^1\left([0,+\infty[\,, \mathbf{H}^{s-3}(\mathbf{R})\right).$$

**Prueba.** La primera afirmación y la última son consecuencias de la proposición 1, el Teorema de Lumer-Phillips y la definición de semigrupo. Para obtener (2) y (3) es suficiente tomar la transformada de Fourier en la variable espacial, resolver el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que resulta y usar propiedades de semigrupos de operadores. A continuación será probada la desigualdad (4). Tenemos

$$\begin{aligned} \|W_\mu(t)\Phi\|_{\mathbf{H}^{s+r}}^2 &= \left\|\left(E_\mu^+(t) + E_\mu^-(t)\right)\varphi + \left(E_\mu^+(t) - E_\mu^-(t)\right)\psi\right\|_{s+r}^2 \\ &\quad + \left\|\left(E_\mu^+(t) - E_\mu^-(t)\right)\varphi + \left(E_\mu^+(t) + E_\mu^-(t)\right)\psi\right\|_{s+r}^2 \\ &= I_1 + I_2, \end{aligned} \tag{5}$$

en donde

$$I_1 = \left\|\left(E_\mu^+(t) + E_\mu^-(t)\right)\varphi + \left(E_\mu^+(t) - E_\mu^-(t)\right)\psi\right\|_{s+r}^2$$

y

$$I_2 = \left\| \left(E_\mu^+(t) - E_\mu^-(t)\right)\varphi + \left(E_\mu^+(t) + E_\mu^-(t)\right)\psi \right\|_{s+r}^2 .$$

Como $\lambda_\mu^\pm = -\mu\xi^2 + i\xi^3(1\pm\alpha)$, por la desigualdad triangular y las desigualdades $(a+b)^2 \le 2\left(a^2+b^2\right)$ y $c_1\left(1+\xi^{2r}\right) \le \left(1+\xi^2\right)^r \le c_2\left(1+\xi^{2r}\right)$ resulta

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 \;\; &\le \;\; C\int_{\mathbf{R}} e^{-2\mu\xi^2 t}\left(1+\xi^2\right)^s \left(\left|\widehat{\varphi}(\xi)\right|^2 + \left|\widehat{\psi}(\xi)\right|^2\right) d\xi \\ &\quad + C\int_{\mathbf{R}} \xi^{2r} e^{-2\mu\xi^2 t}\left(1+\xi^2\right)^s \left(\left|\widehat{\varphi}(\xi)\right|^2 + \left|\widehat{\psi}(\xi)\right|^2\right) d\xi. \end{aligned} \tag{6}$$

La primera integral del segundo miembro de (6) es acotada por $\sup\limits_{\xi\in\mathbf{R}} e^{-2\mu\xi^2 t}\left\|\Phi\right\|_{\mathbf{H}^s}^2$ y la segunda integral, usando la desigualdad

$$\xi^{2r}e^{-2\xi^2\mu t} \le 2^{-r}r^r e^{-r}(\mu t)^{-r},$$

es acotada por $2^{-r}r^re^{-r}(\mu t)^{-r}\left\|\Phi\right\|_{\mathbf{H}^s}^2$. Entonces, en (5) tenemos

$$\left\|W_\mu(t)\Phi\right\|_{\mathbf{H}^{s+r}}^2 \le K_r^2\left[1 + (2\mu t)^{-r}\right]\left\|\Phi\right\|_{\mathbf{H}^s}^2$$

en donde

$$K_r^2 = \text{máx}\left\{C\sup_{\xi\in\mathbf{R}} e^{-2\mu\xi^2 t}, Cr^re^{-r}\right\},$$

como se quería demostrar. □

# 3. Teoría Local del Sistema Regularizado

En esta sección demostraremos que el problema de valor inicial (PR) es localmente bien formulado en $\mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ si $s > \frac{3}{2}$. Para esto consideramos el problema de valor inicial (PR) en la forma

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t U + A_\mu U + F(U) = 0 \\ U(0) = \Phi, \end{array}\right. \tag{PR}$$

donde $U = (u, v)$,

$$F(U) = (u\partial_x u + \beta v \partial_x v + \gamma \partial_x (uv), \gamma u \partial_x u + v \partial_x v + \beta \partial_x (uv)) \tag{7}$$

o también

$$F(U) = \partial_x \left( \frac{u^2}{2} + \frac{\beta v^2}{2} + \gamma uv, \frac{\gamma u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \beta uv \right) \tag{8}$$

y $\Phi = (\varphi, \psi)$.

Notemos que si $\mu > 0$ es fijo y $U$ es solución de (PR), entonces por la fórmula de Duhamel

$$U(t) = W_\mu(t)\Phi - \int_0^t W_\mu(t-\tau) F(U(\tau))\, d\tau. \tag{EI}$$

Por lo tanto, toda solución de (PR) es solución de (EI). Nos interesa saber si, recíprocamente, toda solución de (EI) es solución de (PR), para esto, aplicaremos el teorema del punto fijo de Banach.

Supongamos que $\Phi \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ con $s > \frac{3}{2}$ y $\Phi \neq 0$. Para $T \geq 0$ cualquiera, definimos el conjunto $\mathcal{E}_s(T)$ formado por las funciones $U \in C([0,T], \mathbf{H}^s(\mathbf{R}))$ tales que

$$\|U(t) - W_\mu(t)\Phi\|_{\mathbf{H}^s} \leq \|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}, 0 < t \leq T$$

con la métrica

$$d(U,V) = \sup_{0 \leq t \leq T} \|U(t) - V(t)\|_{\mathbf{H}^s}, \quad \text{para } U, V \in \mathcal{E}_s(T).$$

Es claro que $(\mathcal{E}_s(T), d)$ es un espacio métrico completo.

Para $\Phi \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ fijo, definimos la aplicación $\Theta$ por

$$\Theta U(t) = W_\mu(t)\Phi - \int_0^t W_\mu(t-\tau) F(U(\tau))\, d\tau, \quad t \in [0,T], \tag{9}$$

cualquiera sea $U \in \mathcal{E}_s(T)$. En la proposición 3 estudiaremos las propiedades de la aplicación $\Theta$ definida sobre $\mathcal{E}_s(T)$.

**Teorema 3.** *Si* $\mu > 0$ *y* $\Phi \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ *con* $s > \frac{3}{2}$, *existe* $T_\mu(\|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}, s, \mu) \in [0,T]$ *tal que* $\Theta : \mathcal{E}_s(T_\mu) \to \mathcal{E}_s(T_\mu)$ *es una contracción.*

**Prueba.** Es obvio que cualquiera sea $T > 0$, la aplicación $\Theta$ está bien definida por (9).

Veamos la continuidad de $\Theta U$. Para $t_0 \in ]0,T]$ supongamos que $t < t_0$, por la continuidad fuerte del semigrupo $\{W_\mu(t)\}_{t\geq 0}$ tenemos

$$\begin{aligned}
&\|\Theta U(t) - \Theta U(t_0)\|_{\mathbf{H}^s} \\
&\quad \leq \|W_\mu(t)\Phi - W_\mu(t_0)\Phi\|_{\mathbf{H}^s} \\
&\qquad + \int_0^t \|[W_\mu(t-\tau) - W_\mu(t_0-\tau)]\,F(U(\tau))\|_{\mathbf{H}^s}\,d\tau \\
&\qquad + |t-t_0| \sup_{[0,t_0]} \|W_\mu(t_0-\tau)\,F(U(\tau))\|_{\mathbf{H}^s}\,. \qquad (10)
\end{aligned}$$

El primer sumando del segundo miembro de (10) converge a cero cuando $t \to t_0^-$ debido a la continuidad de la aplicación $W_\mu(\cdot)\Phi$. Lo mismo sucede con el segundo sumando por la misma razón y el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. El último sumando converge trivialmente a cero cuando $t \to t_0^-$. Esto nos demuestra la continuidad por la izquierda de $t_0$. La continuidad a la derecha de $t_0$, se sigue de manera análoga, y de ahí la continuidad en $t_0$.

Veamos ahora que existe $T_1 = T_1(\|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}, s, \mu) \in [0,T]$ tal que $\Theta$ definida sobre $\mathcal{E}_s(T_1)$ tiene rango $\mathcal{R}(\Theta)$ contenido en $\mathcal{E}_s(T_1)$. Sean $T > 0$ y $U \in \mathcal{E}_s(T)$, entonces para $0 \leq t \leq T$, usando el teorema 2 y cambiando la variable tenemos

$$\|\Theta U(t) - W_\mu(t)\Phi\|_{\mathbf{H}^s} \leq C\,\|\Phi\|^2_{\mathbf{H}^s} \int_0^{2\mu t} \sqrt{1+\frac{1}{\tau}}\,d\tau, \qquad (11)$$

en donde $C = C(s,\mu)$. Observamos que

$$\int_0^{2\mu t} \sqrt{1+\frac{1}{\tau}}\,d\tau \leq 2\left[\mu t + \sqrt{2\mu t}\right],$$

entonces

$$\lim_{t\to 0^+} C\left\|\Phi\right\|_{\mathbf{H}^s}\int_0^{2\mu t}\sqrt{1+\frac{1}{\tau}}\,d\tau=0,$$

implica que existe $T_1 = T_1\left(\left\|\Phi\right\|_{\mathbf{H}^s}, s, \mu\right) \in \left]0, T\right]$ tal que

$$C\left\|\Phi\right\|_{\mathbf{H}^s}\int_0^{2\mu T_1}\sqrt{1+\frac{1}{2\mu\tau}}\,d\tau\leq 1$$

siempre que $0 < t < T_1$

Así en la desigualdad (11), para $0 < t < T_1$ tenemos

$$\left\|\Theta U\left(t\right)-W_\mu\left(t\right)\Phi\right\|_{\mathbf{H}^s}\leq\left\|\Phi\right\|_{\mathbf{H}^s}.$$

es decir, $\Theta U\left(t\right) \in \mathcal{E}_s\left(T_1\right)$. Por tanto, existe $T_1 = T_1\left(\left\|\Phi\right\|_{\mathbf{H}^s}, s, \mu\right) \in \left[0, T\right]$ tal que $\mathcal{R}\left(\Theta\right) \subseteq \mathcal{E}_s\left(T_1\right)$.

Ahora demostraremos que existe $T_\mu = T_\mu\left(\left\|\Phi\right\|_{\mathbf{H}^s}, s, \mu\right) \in \left[0, T_1\right]$ tal que $\Theta : \mathcal{E}_s\left(T_\mu\right) \to \mathcal{E}_s\left(T_\mu\right)$ es una contracción. En efecto, si $U = \left(u_1, v_1\right), V = \left(u_2, v_2\right) \in \mathcal{E}_s\left(T_1\right)$ entonces

$$\left\|\Theta U\left(t\right)-\Theta V\left(t\right)\right\|_{\mathbf{H}^s}\leq\int_0^t\left\|W_\mu\left(t-\tau\right)\left[F\left(U\left(\tau\right)\right)-F\left(V\left(\tau\right)\right)\right]\right\|_{\mathbf{H}^s}d\tau.$$

Por el teorema 2 tenemos,

$$\left\|\Theta U\left(t\right)-\Theta V\left(t\right)\right\|_{\mathbf{H}^s}\leq C\left\|\Phi\right\|_{\mathbf{H}^s}\int_0^{2\mu t}\sqrt{1+\frac{1}{\tau}}\,d\tau\,d\left(U,V\right).$$

Donde $C = C\left(s, \mu\right)$. Tomando el supremo en $\left[0, T_1\right]$ obtenemos

$$d\left(\Theta U,\Theta V\right)\leq C\left\|\Phi\right\|_{\mathbf{H}^s}\int_0^{2\mu T_1}\sqrt{1+\frac{1}{\tau}}\,d\tau\,d\left(U,V\right).$$

Como

$$C\left\|\Phi\right\|_{\mathbf{H}^s}\int_0^{2\mu T_1}\sqrt{1+\frac{1}{\tau}}\,d\tau\to 0\text{ cuando }T_1\to 0^+,$$

se sigue la existencia de $T_\mu = T_\mu(\|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}, s, \mu) \in ]0, T_1]$ tal que

$$0 < \lambda = C\|\Phi\|_{\mathbf{H}^s} \int_0^{2\mu T_\mu} \sqrt{1 + \frac{1}{\tau}}\, d\tau < 1$$

Así, concluimos que

$$d(\Theta U, \Theta V) \leq \lambda d(U, V) \text{ con } 0 < \lambda < 1,$$

y nos permite afirmar que $\Theta$ es una contracción. □

En la demostración del siguiente teorema utilizaremos el teorema del punto fijo de Banach para mostrar la existencia de solución de la ecuación integral (EI) y un argumento de T. Kato y H. Fujita [7] para mostrar la unicidad de la solución.

**Teorema 4.** *Si $\mu > 0$ y $\Phi \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$, $s > \frac{3}{2}$, entonces existen $T_\mu = T_\mu(\|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}, s, \mu) > 0$ y una función*

$$U_\mu \in C([0, T_\mu], \mathbf{H}^s(\mathbf{R}))$$

*única solución real de la ecuación integral (EI).*

**Prueba.** Por la proposición 3 las hipótesis del teorema del punto fijo de Banach se cumplen, entonces existe una única $U_\mu \in \mathcal{E}_s(T_\mu) \subset C([0, T_\mu], \mathbf{H}^s(\mathbf{R}))$ tal que $\Theta U_\mu = U_\mu$, es decir,

$$\Theta U_\mu(t) = W_\mu(t)\Phi - \int_0^t W_\mu(t-\tau) F(U(\tau))\, d\tau = U_\mu(t)$$

para todo $t \in [0, T_\mu]$.

Para la unicidad, sean $U$ y $V$ dos soluciones en $C([0, T_\mu], \mathbf{H}^s(\mathbf{R}))$ de la ecuación integral (EI). Para $t \in [0, T_\mu]$ cualquiera, tenemos

$$\|U(t) - V(t)\|_{\mathbf{H}^s} \leq \kappa(t) \sup_{\tau \in [0,t]} \|U(\tau) - V(\tau)\|_{\mathbf{H}^s},$$

donde $\kappa(t) = \frac{2C\|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}}{\mu}\left[\mu t + \sqrt{2\mu t}\right]$. Como $\kappa$ es continua, creciente en $[0, +\infty[$, $\kappa(0) = 0$ y $\lim\limits_{t \to +\infty} \kappa(t) = +\infty$, existe $T^* > 0$ tal que $\kappa(T^*) = \frac{1}{2}$.

se sigue la existencia de $T_\mu = T_\mu\left(\|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}, s, \mu\right) \in \left]0, T_1\right]$ tal que

$$0 < \lambda = C\|\Phi\|_{\mathbf{H}^s} \int_0^{2\mu T_\mu} \sqrt{1 + \frac{1}{\tau}}\, d\tau < 1$$

Así, concluimos que

$$d(\Theta U, \Theta V) \leq \lambda d(U, V) \text{ con } 0 < \lambda < 1,$$

y nos permite afirmar que $\Theta$ es una contracción. □

En la demostración del siguiente teorema utilizaremos el teorema del punto fijo de Banach para mostrar la existencia de solución de la ecuación integral (EI) y un argumento de T. Kato y H. Fujita [7] para mostrar la unicidad de la solución.

**Teorema 4.** *Si $\mu > 0$ y $\Phi \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$, $s > \frac{3}{2}$, entonces existen $T_\mu = T_\mu\left(\|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}, s, \mu\right) > 0$ y una función*

$$U_\mu \in C\left([0, T_\mu], \mathbf{H}^s(\mathbf{R})\right)$$

*única solución real de la ecuación integral (EI).*

**Prueba.** Por la proposición 3 las hipótesis del teorema del punto fijo de Banach se cumplen, entonces existe una única $U_\mu \in \mathcal{E}_s(T_\mu) \subset C\left([0, T_\mu], \mathbf{H}^s(\mathbf{R})\right)$ tal que $\Theta U_\mu = U_\mu$, es decir,

$$\Theta U_\mu(t) = W_\mu(t)\Phi - \int_0^t W_\mu(t - \tau) F(U(\tau))\, d\tau = U_\mu(t)$$

para todo $t \in [0, T_\mu]$.

Para la unicidad, sean $U$ y $V$ dos soluciones en $C\left([0, T_\mu], \mathbf{H}^s(\mathbf{R})\right)$ de la ecuación integral (EI). Para $t \in [0, T_\mu]$ cualquiera, tenemos

$$\|U(t) - V(t)\|_{\mathbf{H}^s} \leq \kappa(t) \sup_{\tau \in [0,t]} \|U(\tau) - V(\tau)\|_{\mathbf{H}^s},$$

donde $\kappa(t) = \frac{2C\|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}}{\mu}\left[\mu t + \sqrt{2\mu t}\right]$. Como $\kappa$ es continua, creciente en $[0, +\infty[$, $\kappa(0) = 0$ y $\lim\limits_{t \to +\infty} \kappa(t) = +\infty$, existe $T^* > 0$ tal que $\kappa(T^*) = \frac{1}{2}$.

Sea $\overline{T}_1 = \text{mín}\{T_\mu, T^*\}$, entonces $\kappa(t) \leq \kappa(\overline{T}_1) \leq k(T^*) = \frac{1}{2}$ y para $t \in [0, \overline{T}_1]$ tenemos

$$\|U(t) - V(t)\|_{\mathbf{H}^s} \leq \frac{1}{2} \sup_{\tau \in [0, \overline{T}_1]} \|U(\tau) - V(\tau)\|_{\mathbf{H}^s},$$

y tomando el supremo sobre $[0, \overline{T}_1]$, obtenemos

$$\sup_{t \in [0, \overline{T}_1]} \|U(t) - V(t)\|_{\mathbf{H}^s} \leq \frac{1}{2} \sup_{\tau \in [0, \overline{T}_1]} \|U(\tau) - V(\tau)\|_{\mathbf{H}^s}. \tag{12}$$

Por tanto, $\sup_{t \in [0, \overline{T}_1]} \|U(t) - V(t)\|_{\mathbf{H}^s} \leq 0$ y así $U = V$ en $[0, \overline{T}_1]$.

Si $\overline{T}_1 = T_\mu$ obtenemos la unicidad, pero si $\overline{T}_1 = T^*$ definiendo $\overline{T}_2 = \text{mín}\{T_\mu, 2T^*\}$ sigue que $\overline{T}_1 < \overline{T}_2$. Entonces, para $t \in [\overline{T}_1, \overline{T}_2]$ sigue que

$$\|U(t) - V(t)\|_{\mathbf{H}^s} \leq \kappa(\overline{T}_2 - \overline{T}_1) \sup_{\tau \in [0, \overline{T}_2]} \|U(\tau) - V(\tau)\|_{\mathbf{H}^s}. \tag{13}$$

Como $\overline{T}_2 \leq 2T^*$, $\overline{T}_1 = T^*$, tenemos

$$\kappa(\overline{T}_2 - \overline{T}_1) \leq \kappa T^*.$$

Luego de (13) resulta

$$\|U(t) - V(t)\| \leq \frac{1}{2} \sup_{\tau \in [0, \overline{T}_2]} \|U(\tau) - V(\tau)\|_{\mathbf{H}^s}.$$

Tomando el supremo en $[0, \overline{T}_2]$ obtenemos (12) en $[0, \overline{T}_2]$, luego $U = V$ en $[0, \overline{T}_2]$. Si $\overline{T}_2 = T_\mu$ obtenemos la unicidad, en caso contrario repetimos el proceso para $\overline{T}_3 = \text{mín}\{T_\mu, 3T^*\}$. Como $[0, \overline{T}_\mu]$ es acotado, existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $T_\mu \leq nT^*$, de ahí que $U = V$ en $[0, \overline{T}_\mu]$ concluyendo así la demostración. $\square$

Como consecuencia de la propiedad regularizante del semigrupo $\{W_\mu(t)\}_{t \geq 0}$ demostrada en el teorema 2, probaremos que la solución de la ecuación integral (EI), encontrada en el teorema 4, es más regular que el dato inicial, es decir, si $\Phi \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ con $s > \frac{3}{2}$, entonces $U_\mu : ]0, T_\mu] \to \mathbf{H}^{s+r}(\mathbf{R})$ es continua para todo $r \geq 0$.

**Teorema 5.** *Sean $\mu > 0$ y $\Phi \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$, $s > \frac{3}{2}$. La función $U_\mu$ obtenida en el teorema 4 satisface*

$$U_\mu \in C\left(]0, T_\mu], \mathbf{H}^{s+r}(\mathbf{R})\right)$$

*para todo $r \geq 0$.*

**Prueba.** Sea $t \in ]0, T_\mu]$ y consideremos la ecuación integral

$$U_\mu(t) = W_\mu(t)\,\Phi - \int_0^t W_\mu(t-\tau)\, F(U_\mu(\tau))\, d\tau \equiv W_\mu(t)\,\Phi + G(t). \tag{14}$$

Del teorema 2 se deduce que $W_\mu(\cdot)\,\Phi \in C(]0, T_\mu], \mathbf{H}^{s+r}(\mathbf{R}))$ para todo $r \geq 0$.

Supongamos que $0 \leq r < 1$. Entonces,

$$\|G(t)\|_{\mathbf{H}^{s+r}} \leq C \sup_{0 \leq \tau \leq T_\mu} \|U_\mu(\tau)\|^2_{\mathbf{H}^s} \int_0^{2\mu t} \sqrt{1 + \frac{1}{\tau^{r+1}}}\, d\tau.$$

Entonces, porque $\frac{r+1}{2} \in [0, 1[$, la integral $\int_0^{2\mu t} \sqrt{1 + \frac{1}{\tau^{r+1}}}\, d\tau$ es convergente, en consecuencia $G(t) \in \mathbf{H}^{s+r}(\mathbf{R})$ para cualquier $r \in [0, 1[$.

Ahora mostremos que $G \in C(]0, T_\mu], \mathbf{H}^{s+r}(\mathbf{R}))$ si $r \in [0, 1[$. En efecto, consideremos $t \in ]0, T_\mu]$ y $h > 0$ tal que $t+h$ pertenece al intervalo $]0, T_\mu]$, entonces

$$\begin{aligned} &\|G(t+h) - G(t)\|_{\mathbf{H}^{s+r}} \\ &\leq \int_t^{t+h} \|W_\mu(t+h-\tau)\, F(U_\mu(\tau))\|_{\mathbf{H}^{s+r}}\, d\tau \\ &\quad + \int_0^t \|[W_\mu(t+h-\tau) - W_\mu(t-\tau)]\, F(U_\mu(\tau))\|_{\mathbf{H}^{s+r}}\, d\tau. \end{aligned} \tag{15}$$

Sustituyendo $s-1$ por $s$ y $r+1$ por $r$ en (4) y cambiando la variable, tenemos,

$$\int_t^{t+h} \|W_\mu (t+h-\tau) F(U_\mu(\tau))\|_{\mathbf{H}^{s+r}} dt$$
$$\leq C \sup_{\tau\in ]0,T_\mu]} \|U_\mu(\tau)\|^2_{\mathbf{H}^s} \int_0^{2\mu h} \sqrt{1+\frac{1}{\tau^{r+1}}} d\tau.$$

Como

$$\int_0^{2\mu h} \sqrt{1+\frac{1}{\tau^{r+1}}} d\tau \to 0 \text{ cuando } h \to 0^+$$

porque $\frac{r+1}{2} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$, obtenemos

$$\int_t^{t+h} \|W_\mu (t+h-\tau) F(U_\mu(\tau))\|_{\mathbf{H}^{s+r}} d\tau \longrightarrow 0 \text{ cuando } h \to 0^+.$$

Por otro lado, la continuidad de $t \in [0,+\infty[ \mapsto W_\mu(t)\Phi \in \mathbf{H}^{s+r}(\mathbf{R})$ para todo $r \geq 0$, la desigualdad (4), $\sqrt{1+\frac{1}{(\cdot)^{r+1}}} \in L^1(]0,2\mu t], \mathbf{R})$ y el Teorema de la Convergencia Dominada, implican

$$\int_0^t \|[W_\mu(t+h-\tau) - W_\mu(t-\tau)] F(U_\mu(\tau))\|_{\mathbf{H}^{s+r}} d\tau \to 0 \text{ si } h \to 0^+.$$

Así en (15) tenemos que

$$\|G(t+h) - G(t)\|_{\mathbf{H}^{s+r}} \to 0 \text{ cuando } h \to 0^+,$$

con lo que demostramos que $G$ es continua por la derecha de $t$. De la misma forma se demuestra la continuidad por la izquierda de $t$.

Así, de (14), probamos que $U_\mu \in C(]0,T_\mu], \mathbf{H}^{s+r}(\mathbf{R}))$ si $0 \leq r < 1$.

Usando lo probado y con el mismo procedimiento, demostramos que $G \in C\left(]0,T_\mu], \mathbf{H}^{s+2r}(\mathbf{R})\right)$ y con esto $U_\mu \in C\left(]0,T_\mu], \mathbf{H}^{s+2r}(\mathbf{R})\right)$. Un argumento inductivo prueba que para cada $n \in \mathbf{N}$ se cumple que $G \in C(]0,T_\mu], \mathbf{H}^{s+nr}(\mathbf{R}))$ con lo que el teorema queda probado. □

El teorema 5 es fundamental para demostrar que el intervalo de existencia de la solución del sistema regularizado es independiente de $\mu$.

## Existencia y Unicidad de Solución Local del Problema (PR)

Probaremos que el problema de valor inicial regularizado (PR) es bien formulado locamente. Para esto primero demostraremos que la función $U_\mu$ del teorema 4 es la única solución del problema regularizado en $\mathbf{H}^{s-3}(\mathbf{R})$. La prueba está basada en el trabajo de R. Iório [5].

**Teorema 6.** *Sean $\mu > 0$ y $\Phi \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$, $s > \frac{3}{2}$, entonces la función $U_\mu$ del teorema 4 satisface*

$$U_\mu \in C\left([0, T_\mu], \mathbf{H}^s(\mathbf{R})\right) \cap C^1\left([0, T_\mu], \mathbf{H}^{s-3}(\mathbf{R})\right)$$

*y es la única solución de (PR). Además, para todo $r \geq 0$*

$$U_\mu \in C\left(]0, T_\mu], \mathbf{H}^{s+r}(\mathbf{R})\right) \cap C^1\left([0, T_\mu], \mathbf{H}^{s+r-3}(\mathbf{R})\right)$$

**Prueba.** Veamos la existencia de una solución. Del teorema 2 y la teoría de semigrupos tenemos,

$$\partial_t W_\mu(t)\,\Phi = -A_\mu W_\mu(t)\,\Phi,$$

para $t > 0$ en $\mathbf{H}^{s-3}(\mathbf{R})$. Para $\mu > 0$ , consideramos

$$G(t) = \int_0^t W_\mu(t-\tau)\,F(U_\mu(\tau))\,d\tau \tag{16}$$

Para $0 \leq t < T_\mu$ y $h > 0$ tal que $t + h \in ]0, T_\mu]$ se sigue,

$$\begin{aligned} \frac{G(t+h) - G(t)}{h} &= \frac{W_\mu(h) - I}{h} \int_0^t W_\mu(t-\tau)\,F(U_\mu(\tau))\,d\tau \\ &\quad + W_\mu(t+h-c_h)\,F(U_\mu(c_h)). \end{aligned}$$

Donde se ha usado que $W_\mu(h) - I$ es un operador lineal y el teorema del valor medio para integrales de Bochner en el intervalo $[t, t+h]$ con $c_h \in [t, t+h]$.

Como $-A_\mu$ es el generador del semigrupo $\{W_\mu(t)\}_{t\geq 0}$ tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+} \frac{W_\mu(h)-I}{h} \int_0^t W_\mu(t-\tau) F(U_\mu(\tau))\, d\tau \\ = -A_\mu \int_0^t W_\mu(t-\tau) F(U_\mu(\tau))\, d\tau.\end{aligned}$$

Además, $c_h \in [t, t+h]$ implica que $c_h \to t$, cuando $h \to 0^+$, por lo tanto

$$\lim_{h\to 0^+} W_\mu(t+h-c_h) F(U_\mu(c_h)) = W_\mu(0) F(U_\mu(t)) = F(U_\mu(t)).$$

Así, obtenemos

$$\partial_t^+ G(t) = -A_\mu G(t) + F(U_\mu(t))$$

Análogamente, para $h < 0$ conseguimos $\partial_t^- G(t) = -A_\mu G(t) + F(U_\mu(t))$. Así $\partial_t G(t) = \partial_t^+ G(t) = \partial_t^- G(t)$ y

$$\partial_t U_\mu(t) = -A_\mu U_\mu(t) - F(U_\mu(t)).$$

Como $U_\mu \in C([0, T_\mu], \mathbf{H}^s(\mathbf{R}))$ es solución del problema (PR), $-A_\mu \in \mathcal{L}(\mathbf{H}^{\,s}(\mathbf{R}), \mathbf{H}^{\,s-3}(\mathbf{R}))$ y

$$-F(U_\mu) \in C\left([0, T_\mu], \mathbf{H}^{s-1}(\mathbf{R})\right) \subseteq C\left([0, T_\mu], \mathbf{H}^{s-3}(\mathbf{R})\right),$$

sigue que $\partial_t U_\mu \in C\left([0, T_\mu], \mathbf{H}^{s-3}(\mathbf{R})\right)$.

Para la unicidad, sea

$$V \in C([0, T_\mu], \mathbf{H}^s(\mathbf{R})) \cap C^1\left([0, T_\mu], \mathbf{H}^{s-3}(\mathbf{R})\right)$$

otra solución de (PR), entonces la función $V$ satisface

$$\partial_t V(t) + A_\mu V(t) + F(V(t)) = 0,\ 0 \leq t \leq T_\mu \tag{17}$$

en $\mathbf{H}^{s-3}(\mathbf{R})$. Aplicando a continuación $W_\mu(t-\tau)$ a $V(t)$ y usando (17) para $0 \leq t \leq T_\mu$, obtenemos

$$\partial_\tau W_\mu(t-\tau) V(\tau) = -W_\mu(t-\tau) F(V(\tau)).$$

Integrando desde 0 hasta $t$ y teniendo en cuenta que $V(0) = \Phi$, tenemos

$$V(t) = W_{\mu}(t)\,\Phi - \int_0^t W_{\mu}(t-\tau)\,F(V(\tau))\,d\tau \tag{18}$$

en $\mathbf{H}^{s-3}(\mathbf{R})$. Entonces el teorema 2 implica, como en la demostración del teorema 5, que el segundo miembro de (18) está en $\mathbf{H}^{s}(\mathbf{R})$. Por lo tanto,

$$V \in C\left([0,T_{\mu}], \mathbf{H}^{s}(\mathbf{R})\right) \cap C^{1}\left([0,T_{\mu}], \mathbf{H}^{s-3}(\mathbf{R})\right)$$

es solución de la ecuación integral (EI). Entonces la unicidad establecida en el teorema 4 implica que $V = U_{\mu}$ en $[0,T_{\mu}]$ completando la demostración de unicidad.

La última afirmación sigue inmediatamente del teorema 5. □

Establecemos a continuación un resultado esencial para probar la existencia de solución local del problema de valor inicial (P). La existencia de un intervalo $[0,T]$ independiente de $\mu$, en donde todas las soluciones $U_{\mu}$ pueden ser definidas. Esto será esencial para probar la existencia del límite de las $U_{\mu}$ cuando $\mu \to 0^{+}$, el cual, como veremos será la solución buscada de (P).

**Teorema 7.** *Sean $\mu > 0$, $\Phi \in \mathbf{H}^{s}(\mathbf{R})$ con $s > \frac{3}{2}$ y $U_{\mu}$ la solución del problema de valor inicial (PR) encontrada en el teorema 6. Entonces, existe $T = T\left(\|\Phi\|_{\mathbf{H}^{s}}, s\right) > 0$ tal que $U_{\mu}$ se puede extender al intervalo $[0,T]$. Además, existe $\rho \in C([0,T], \mathbf{R})$ tal que*

$$\begin{cases} \|U_{\mu}(t)\|_{\mathbf{H}^{s}}^{2} \leq \rho(t), \quad 0 \leq t \leq T \\ \sup\limits_{[0,T]} \rho(t) \leq C\left(\|\Phi\|_{\mathbf{H}^{s}}, s, T\right) \end{cases}, \tag{19}$$

*donde $\rho$ satisface*

$$\begin{cases} \rho'(t) = 2C_{s}\rho^{\frac{3}{2}}(t), \quad t > 0 \\ \rho(0) = \|\Phi\|_{\mathbf{H}^{s}}^{2}. \end{cases} \tag{20}$$

*También, si $\Phi \in \mathbf{H}^{s+r}(\mathbf{R})$ para $r \geq 0$, entonces para cada $\mu > 0$ se tiene*

$$\sup_{[0,T]} \|U_\mu(t)\|^2_{\mathbf{H}^{s+r}} \leq C\left(\|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}, s, T\right) \tag{21}$$

*en donde $C(\cdot,\cdot,\cdot)$ es creciente en cada uno de sus argumentos.*

**Prueba.** Sea $U_\mu \in C\left([0,T_\mu], \mathbf{H}^s(\mathbf{R})\right) \cap C^1\left([0,T_\mu], \mathbf{H}^{s-3}(\mathbf{R})\right)$ la solución de (PR) dada por el teorema 6. Tenemos

$$\partial_t \|U_\mu\|^2_{\mathbf{H}^s} = 2\left\langle U_\mu, -A_\mu U_\mu\right\rangle_{\mathbf{H}^s} + 2\left\langle U_\mu, -F(U_\mu)\right\rangle_{\mathbf{H}^s}.$$

De la proposición 1 y de la teoría de semigrupos sabemos que

$$\left\langle U_\mu, -A_\mu U_\mu\right\rangle_{\mathbf{H}^s} \leq 0,$$

por lo tanto

$$\partial_t \|U_\mu\|^2_{\mathbf{H}^s} \leq 2\left\langle U_\mu, -F(U_\mu)\right\rangle_{\mathbf{H}^s} \leq 2\left|\left\langle U_\mu, -F(U_\mu)\right\rangle_{\mathbf{H}^s}\right|. \tag{22}$$

Si $U_\mu = (u,v)$, entonces por (7) tenemos

$$\begin{aligned} -\left\langle U_\mu, -F(U_\mu)\right\rangle_{\mathbf{H}^s} &= \left\langle u, u\partial_x u\right\rangle_s + \beta\left\langle u, v\partial_x v\right\rangle_s + \gamma\left\langle u, \partial_x(uv)\right\rangle_s \\ &\quad + \gamma\left\langle v, u\partial_x u\right\rangle_s + \left\langle v, v\partial_x v\right\rangle_s + \beta\left\langle v, \partial_x(uv)\right\rangle_s. \end{aligned} \tag{23}$$

Como $[J^s, f]\,g = J^s(fg) - fJ^s g$, entonces

$$\left\langle u, v\partial_x v\right\rangle_s = \left\langle J^s u, [J^s, v]\,\partial_x v\right\rangle_{L^2} + \left\langle J^s u, vJ^s\partial_x v\right\rangle_{L^2}, \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \left\langle u, \partial_x(uv)\right\rangle_s &= \left\langle J^s u, [J^s, u]\,\partial_x v\right\rangle_{L^2} + \left\langle J^s u, uJ^s\partial_x v\right\rangle_{L^2} \\ &\quad + \left\langle J^s u, [J^s, v]\,\partial_x u\right\rangle_{L^2} + \left\langle J^s u, vJ^s\partial_x u\right\rangle_{L^2}, \end{aligned} \tag{25}$$

$$\left\langle v, u\partial_x u\right\rangle_s = \left\langle J^s v, [J^s, u]\,\partial_x u\right\rangle_{L^2} + \left\langle J^s v, uJ^s\partial_x u\right\rangle_{L^2}, \tag{26}$$

y

$$\begin{aligned} \left\langle v, \partial_x(uv)\right\rangle_s &= \left\langle J^s v, [J^s, u]\,\partial_x v\right\rangle_{L^2} + \left\langle J^s v, uJ^s\partial_x v\right\rangle_{L^2} \\ &\quad + \left\langle J^s v, [J^s, v]\,\partial_x u\right\rangle_{L^2} + \left\langle J^s v, vJ^s\partial_x u\right\rangle_{L^2}. \end{aligned} \tag{27}$$

Así, reemplazando (24), (25), (26) y (27) en (23), asociando factores en el producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}$, usando integración por partes, la conmutatividad de la derivada con el potencial de Bessel y estimando el segundo miembro tenemos

$$\left|\langle U_\mu, -F(U_\mu)\rangle_{\mathbf{H}^s}\right| \leq C_s \|U_\mu\|^3_{\mathbf{H}^s}\,. \tag{28}$$

Luego de (22) y (28) resulta

$$\partial_t \|U_\mu\|^2_{\mathbf{H}^s} \leq 2C_s \|U_\mu\|^3_{\mathbf{H}^s} = 2\zeta\left(\|U_\mu\|^2_{\mathbf{H}^s}\right) \tag{29}$$

donde $\zeta(y) = C_s y^{3/2}$, para $y \geq 0$.

Consideremos $\rho^{1/2}(t) = \frac{\|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}}{1-tC_s\|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}}$, definida en el intervalo $[0,T^*[$ con $T^* = \frac{1}{C_s\|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}}$, la solución maximal del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \rho'(t) = 2\zeta(\rho(t))\,, & t > 0 \\ \rho(0) = \|\Phi\|^2_s\,. \end{cases} \tag{30}$$

Entonces de (29), (30) y de la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias, tenemos que,

$$\|U_\mu\|^2_{\mathbf{H}^s} \leq \rho(t)\,,\;\; t \in [0,T^*[\,\cap\,[0,T_\mu]\,.$$

Así, para $\mu > 0$, $U_\mu$ se puede extender (si fuera necesario) a un intervalo $[0,T]$. Esto prueba (19) como queríamos.

La desigualdad (21) se obtiene con los mismos argumentos anteriores escribiendo $s+r$ en vez de $s$. □

## Dependencia Continua de la Solución Local del Problema (PR) Respecto al Dato Inicial

Terminamos esta sección mostrando que $U_\mu$ depende continuamente de $\Phi \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$, $s > \frac{3}{2}$, en el sentido que la aplicación

$$\Phi \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R}) \longmapsto U_\mu \in C([0,T], \mathbf{H}^s(\mathbf{R}))$$

es continua.

**Teorema 8.** *Sean* $\mu > 0$, $\Phi \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ *con* $s > \frac{3}{2}$ *y* $U_\mu \in C([0,T], \mathbf{H}^s(\mathbf{R}))$ *la solución del problema de valor inicial (PR) que satisface (19). Si* $\{\Phi^n\}_{n\geq 1}$ *es una sucesión en* $\mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ *convergente a* $\Phi$ *en* $\mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ *y* $\{U_\mu^n\}_{n\geq 1}$ *es una sucesión en* $C([0,T_n], \mathbf{H}^s(\mathbf{R}))$ *de soluciones de (PR) con* $U_\mu^n(0) = \Phi_n$*, entonces para todo* $\overline{T} \in ]0,T[$ *se cumple que para* $n$ *suficientemente grande* $U_\mu^n$ *está definida en* $[0,\overline{T}]$ *y*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{[0,\overline{T}]} \left\| U_\mu^n(t) - U_\mu(t) \right\|_{\mathbf{H}^s} = 0.$$

**Prueba.** Del teorema 7, para todo $n$ tenemos

$$\left\| U_\mu^n(t) \right\|_{\mathbf{H}^s}^2 \leq \rho_n(t) \qquad t \in [0,T_n]. \tag{31}$$

donde $\rho_n$ satisface

$$\begin{cases} \rho_n'(t) = 2C_s \rho_n^{3/2}(t), & t > 0 \\ \rho_n(0) = \|\Phi_n\|_{\mathbf{H}^s}^2, \end{cases}$$

en $[0,T_n^*[$ con $T_n^* = \frac{1}{C_s\|\Phi_n\|_{\mathbf{H}^s}}$ y $T_n \in ]0,T_n^*[$. Ahora, para $\overline{T} \in ]0,T[$ consideremos $\varepsilon = \varepsilon\left(\overline{T}, \|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}\right) > 0$ tal que

$$\varepsilon + \|\Phi\|_{\mathbf{H}^s} = \left(\frac{T}{\overline{\overline{T}}}\right) \|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}, \tag{32}$$

entonces, existe $N_0 = N(\varepsilon)$ tal que $\|\Phi_n - \Phi\|_{\mathbf{H}^s} < \varepsilon$ para $n \geq N_0$. Entonces de la definición de $\rho_n$ tenemos para $n \geq N_0$,

$$\rho_n^{1/2}(t) \leq \frac{\varepsilon + \|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}}{1 - C_s t\left(\varepsilon + \|\Phi_n\|_{\mathbf{H}^s}\right)} \equiv \rho_{\overline{T}}(t), \text{ para } t \in [0,\overline{T}]$$

pues de (32)

$$C_s t\left(\varepsilon + \|\Phi_n\|_{\mathbf{H}^s}\right) \leq C_s\left(\varepsilon + \|\Phi_n\|_{\mathbf{H}^s}\right)\overline{T} \leq C_s \|\Phi_n\|_{\mathbf{H}^s} T < 1,$$

donde la última desigualdad sigue de la elección de $T$. De este modo tenemos,

$$\sup_{[0,\overline{T}]} \rho_n(t) \leq C\left(s, \overline{T}, \|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}\right). \tag{33}$$

Así, $U_\mu^n(t)$ puede ser extendida a $[0,\overline{T}]$, satisfaciendo (31).

Consideremos ahora $\overline{U} = (\overline{u},\overline{v}) = U_\mu - U_\mu^n = (u-u_n, v-v_n)$, entonces

$$\begin{aligned}
\partial_t \left\|\overline{U}(t)\right\|_{\mathbf{H}^s}^2 &\leq C\left\|\overline{U}\right\|_{\mathbf{H}^s}\left\|\partial_x\overline{U}\right\|_{\mathbf{H}^s} - \mu\left\|\partial_x\overline{U}\right\|_{\mathbf{H}^s}^2 \\
&\leq \varepsilon\left\|\overline{U}\right\|_{\mathbf{H}^s}^2 + \frac{C^2}{4\varepsilon}\left\|\partial_x\overline{U}\right\|_{\mathbf{H}^s}^2 - 2\mu\left\|\partial_x\overline{U}\right\|_{\mathbf{H}^s}^2
\end{aligned}$$

con $C = C\left(s,\overline{T},\|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}\right)$, y para deducir la última desigualdad se ha utilizado la desigualdad de Cauchy con $\varepsilon$, con $a = \left\|\overline{U}\right\|_{\mathbf{H}^s}$ y $b = C\left\|\partial_x\overline{U}\right\|_{\mathbf{H}^s}$. Eligiendo $\varepsilon = \frac{C^2}{8\mu}$ obtenemos

$$\partial_t\left\|\overline{U}(t)\right\|_{\mathbf{H}^s}^2 \leq \frac{C^2}{8\mu}\left\|\overline{U}(t)\right\|_{\mathbf{H}^s}^2.$$

Integrando desde 0 hasta $t$, sigue que

$$\left\|\overline{U}(t)\right\|_{\mathbf{H}^s}^2 \leq \left\|\overline{U}(0)\right\|_{\mathbf{H}^s}^2 + \frac{C^2}{8\mu}\int_0^t\left\|\overline{U}(\tau)\right\|_{\mathbf{H}^s}^2 d\tau.$$

Aplicando la desigualdad de Gronwall, tenemos

$$\left\|\overline{U}(t)\right\|_{\mathbf{H}^s}^2 \leq \left\|\overline{U}(0)\right\|_{\mathbf{H}^s}^2\left(1+\exp\left(\frac{C^2}{8\mu}\overline{T}\right)\right) = C_\mu\left\|\overline{U}(0)\right\|_{\mathbf{H}^s}^2$$

lo que muestra

$$\sup_{[0,\overline{T}]}\left\|U_\mu^n(t) - U_\mu(t)\right\|_{\mathbf{H}^s} \leq C_\mu\left\|\Phi_n - \Phi\right\|_{\mathbf{H}^s}.$$

Esto concluye la demostración. □

La demostración dada para el teorema 8 nos muestra que éste no es aplicable cuando $\mu \to 0^+$ pues en tal caso $C_\mu = \sqrt{1+\exp\left(\frac{C^2\overline{T}}{8\mu}\right)} \to +\infty$. Por esta razón, para tratar la dependencia continua de la solución respecto del dato inicial en el caso no regularizado, utilizaremos en nuestra prueba a los estimados de Bona-Smith.

# 4. Buena Formulación Local del Problema no Regularizado

En esta sección probaremos los resultados principales del artículo, a saber, que el problema de valor inicial (P) tiene única solución local y que dicha solución depende continuamente del dato inicial. La demostración de este resultado está basada en el artículo de R. Iório [5] para la existencia y unicidad y en las ideas de J. Bona y R. Smith [3] para la dependencia continua.

## Existencia y Unicidad de Solución Local

**Teorema 9.** *Si $\Phi \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ con $s > \frac{3}{2}$, existen $T = T(\|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}, s) > 0$ y una*

$$U \in C([0,T], \mathbf{H}^s(\mathbf{R})) \cap C^1\left([0,T], \mathbf{H}^{s-3}(\mathbf{R})\right)$$

*única solución de $(P)$. Además,*

$$\begin{cases} \|U(t)\|^2_{\mathbf{H}^s} \leq \rho(t), \quad 0 \leq t \leq T \\ \sup\limits_{[0,T]} \rho(t) \leq C(\|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}, s, T,) \end{cases}, \tag{34}$$

*$\rho$ satisface 20 y $C(\cdot,\cdot,\cdot)$ es creciente en cada uno de sus argumentos. Además, si $\Phi \in \mathbf{H}^{s+r}(\mathbf{R})$ con $r \geq 0$, entonces*

$$\sup_{[0,T]} \|U(t)\|_{\mathbf{H}^{s+r}} \leq C(\|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}, s, T) \|\Phi\|_{\mathbf{H}^{s+r}}. \tag{35}$$

**Prueba.** Si para cada $\mu > 0$, $U_\mu = (u_\mu, v_\mu)$ es la solución de (PR) con dato inicial $\Phi$ dada por los teoremas 6 y 7 en $[0,T]$, existe $U = (u,v)$ tal que

$$U(t) = \lim_{\mu \to 0^+} U_\mu(t) \text{ en } \mathbf{L}^2 \tag{36}$$

uniformemente en $t \in [0,T]$, también $\overline{U} \in C\left([0,T], \mathbf{L}^2(\mathbf{R})\right)$.

Ahora vamos a probar que

$$U(t) = w - \lim_{\mu \to 0^+} U_\mu(t) \text{ en } \mathbf{H}^s(\mathbf{R}), \tag{37}$$

uniformemente en $t \in [0,T]$. Para esto, por el teorema de representación de Riesz-Fréchet, consideremos $\Phi = (\varphi, \psi) \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ cualquiera. Entonces por la densidad de $\mathbf{H}^{2s}(\mathbf{R})$ en $\mathbf{H}^s(\mathbf{R})$, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\Phi_\varepsilon = (\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon) \in \mathbf{H}^{2s}(\mathbf{R})$ tal que $\|\Phi_\varepsilon - \Phi\|_{\mathbf{H}^s} < \varepsilon$. Sean $\mu, \nu > 0$ y $U_\mu$, $U_\nu$ como antes. Usando (19) con $C = C(\|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}, s, T)$ obtenemos

$$\left|\langle U_\mu(t) - U_\nu(t), \Phi\rangle_{\mathbf{H}^s}\right| \leq C\varepsilon + \|U_\mu - U_\nu\|_{\mathbf{L}^2} \|\Phi_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^{2s}}, \tag{38}$$

para cada $t \in [0,T]$. Como $\varepsilon$ es arbitrario de (38) y (36) obtenemos (37).

Además $U \in C_w([0,T], \mathbf{H}^s(\mathbf{R}))$, de la desigualdad (19) y puesto que $\mathbf{H}^s$ es un espacio de Banach tenemos

$$\|U(t)\|_{\mathbf{H}^s} \leq \liminf_{\mu \to 0^+} \|U_\mu(t)\|_{\mathbf{H}^s} \leq \rho^{\frac{1}{2}}(t), \quad t \in [0,T],$$

por lo que $U(t)$ satisface (34).
Además $U(t)$ satisface el problema (P) c.e.t. $[0,T]$.

Para completar la demostración de existencia debemos mostrar que $U \in C([0,T], \mathbf{H}^s(\mathbf{R}))$, pues esto y el hecho que $U$ satisface (P) c.e.t. $t \in ]0,T]$ implican que $U \in C^1\left([0,T], \mathbf{H}^{s-3}(\mathbf{R})\right)$. Para esto probaremos antes la unicidad en $C_w([0,T], \mathbf{H}^s(\mathbf{R})) \cap AC\left([0,T], \mathbf{H}^{s-3}(\mathbf{R})\right)$. En efecto , si $U, U_1 \in C_w([0,T], \mathbf{H}^s(\mathbf{R})) \cap AC\left([0,T], \mathbf{H}^{s-3}(\mathbf{R})\right)$ satisface (P) c.e.t. el intervalo $[0,T]$, definiendo $\overline{U} = (\overline{u}, \overline{v}) = U - U_1 = (u - u_1, v - v_1)$, tenemos que

$$\left\|\overline{U}(t)\right\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq C_s \int_0^t \left\|\overline{U}(\tau)\right\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau, \quad t \in [0,T]$$

de donde, utilizando la desigualdad de Gronwall, sigue que

$$\left\|\overline{U}(t)\right\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq 0, \quad t \in [0,T].$$

Luego $U(t) = U_1(t)$ en $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ para $t \in [0,T]$.

Sea ahora $\Phi = (\varphi, \psi) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}) \times \mathcal{S}(\mathbf{R})$, entonces

$$\left\langle \overline{U}, \Phi \right\rangle_{\mathbf{H}^s} \quad \leq \quad \|U - U_1\|_{\mathbf{L}^2} \|\Phi\|_{\mathbf{H}^{2s}} = 0.$$

Como $\mathcal{S}(\mathbf{R}) \times \mathcal{S}(\mathbf{R})$ es denso en $\mathbf{H}^s(\mathbf{R})$, obtenemos $U(t) = U_1(t)$ en $\mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ para $t \in [0,T]$, y en consecuencia la unicidad en la clase $C_w([0,T], \mathbf{H}^s(\mathbf{R})) \cap AC([0,T], \mathbf{H}^{s-3}(\mathbf{R}))$.

Probaremos ahora que $U \in C([0,T], \mathbf{H}^s(\mathbf{R}))$. Primero veamos que $U$ es continua a la derecha de 0 en $\mathbf{H}^s(\mathbf{R})$. En efecto, como $U \in C_w([0,T], \mathbf{H}^s(\mathbf{R}))$ es inmediato que

$$w - \lim_{t\to 0^+} U(t) = \Phi \text{ en } \mathbf{H}^s(\mathbf{R}), \tag{39}$$

y de (34)

$$\limsup_{t\to 0^+} \|U(t)\|_{\mathbf{H}^s} \leq \lim_{t\to 0^+} \rho^{\frac{1}{2}}(t) = \|\Phi\|_{\mathbf{H}^s} \tag{40}$$

y la afirmación sigue de (39) y (40).

Veamos ahora que $U$ es continua a la derecha de $\tau \in ]0,T[$. En efecto, definimos $V(x,t) = U(x,t+\tau)$ con $t \in [0,T-\tau]$, entonces $V \in C_w([0,T-\tau], \mathbf{H}^s(\mathbf{R})) \cap AC([0,T-\tau], \mathbf{H}^{s-3}(\mathbf{R}))$ y satisface

$$\begin{cases} \partial_t V(t) + AV(t) + F(V(t)) = 0, & \text{c.e.t. } t \in [0,T] \\ V(0) = U(\tau) \end{cases} \tag{41}$$

que es esencialmente el problema estudiado, cuya solución es única a la derecha de cero, así, $U$ es continua a la derecha de $\tau$.

Para la continuidad a la izquierda de $\tau \in ]0,T]$, consideremos $V(x,t) = U(-x,\tau-t)$ con $t \in [0,\tau]$. Así, $V$ satisface (41). Así, $V$ es continua a la derecha de cero y por lo tanto $U$ es continua a la izquierda de $\tau$.

De esta forma $U \in C([0,T], \mathbf{H}^s(\mathbf{R}))$, y como $U$ satisface (P) en $\mathbf{H}^{s-3}(\mathbf{R})$ entonces $U \in C^1([0,T], \mathbf{H}^{s-3}(\mathbf{R}))$.

La desigualdad (35) se obtiene de (40) y el estimado (21). $\square$

## Dependencia Continua de la Solución Local Respecto al Dato Inicial.

Como fue observado la demostración del teorema 8 muestra que éste no se puede aplicar para probar la dependencia continua de la solución local del problema respecto del dato inicial (P). Por esta razón utilizaremos a las *aproximaciones de Bona-Smith*, tal como se indicó en la introducción.

Para construir las funciones $\varphi_\varepsilon$ con las propiedades requeridas se utiliza el siguiente teorema.

**Teorema 10.** *Sea $\eta \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ tal que $0 \leq \eta(x) \leq 1$, $\operatorname{sop}(\eta) \subset [-1,1]$ y si $\psi(x) = 1 - \eta(x)$ entonces $\psi^{(k)}(0) = 0$, para todo $k \in \mathbf{N}$.*
*Si $\varepsilon > 0$ y $\varphi \in H^s(\mathbf{R})$, $s > 0$, definimos*

$$\varphi_\varepsilon(x) = (\eta(\varepsilon\xi)\widehat{\varphi})^\vee(x), \quad x \in \mathbf{R}. \tag{42}$$

*Entonces, $\varphi_\varepsilon \in H^\infty(\mathbf{R})$ y para $0 < \varepsilon \leq 1$, $r \geq 0$, existe $c = c(s,r,\eta) > 0$ tal que*

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{s+r} \leq c\varepsilon^{-r}\|\varphi\|_s, \tag{43}$$

$$\|\varphi_\varepsilon - \varphi\|_{s-r} \leq c\varepsilon^{r}\|\varphi\|_s \tag{44}$$

*y*

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varphi_\varepsilon = \varphi \text{ en } H^s(\mathbf{R}). \tag{45}$$

*Además, si $\lim_{n\to+\infty} \varphi^n = \varphi$ en $H^s(\mathbf{R})$ entonces*

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \|\varphi_\varepsilon^n - \varphi^n\|_s = 0, \tag{46}$$

*uniformemente en $n$.*

El teorema 10, debido a J. Bona y R. Smith, fue utilizado en [3] para demostrar la dependencia continua con respecto al dato inicial de la solución local de la ecuación de Korteweg-de Vries. Sin embargo, es oportuno mencionar que posteriormente se ha usado, con el mismo fin, para otras ecuaciones dispersivas.

**Teorema 11.** *Sean $s > \frac{3}{2}$, $0 \leq \delta < \varepsilon < 1$ y $\Phi_\delta, \Phi_\varepsilon \in H^\infty(\mathbf{R})$ las aproximaciones de Bona-Smith para $\Phi$ dadas por el teorema 10. Si $U_\delta$ y $U_\varepsilon$ son las soluciones del problema de valor inicial (P) con* *datos iniciales* $\Phi_\delta$ *y* $\Phi_\varepsilon$ *respectivamente, entonces para* $\overline{T} \in [0, T]$ *existe* $C = C\left(s, \overline{T}, \|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}\right) > 0$ *tal que*

$$\sup_{[0,\overline{T}]} \|U_\delta(t) - U_\varepsilon(t)\|_{\mathbf{H}^s} \leq C\left(\varepsilon^{\frac{s\nu}{1+\nu}} + \|\Phi_\delta - \Phi_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^s}\right) \tag{47}$$

*donde* $0 \leq \nu < \frac{3}{2}$.

**Prueba.** Primero probemos que si fuera necesario, $U_\delta$ y $U_\varepsilon$ pueden extenderse a $\left[0, \overline{T}\right]$. En efecto, del teorema 9, tenemos

$$\begin{cases} \|U_\delta(t)\|^2_{\mathbf{H}^s} \leq \rho_\delta(t) & \text{si } t \in [0, T_\delta] \\ \|U_\varepsilon(t)\|^2_{\mathbf{H}^s} \leq \rho_\varepsilon(t) & \text{si } t \in [0, T_\varepsilon] \end{cases} \tag{48}$$

Si $T_\delta, T_\varepsilon < \overline{T}$, de la definición de $\rho_\delta$ y $\rho_\varepsilon$ y de la proposición 10, tenemos que

$$\begin{cases} \rho_\delta(t) \leq C\left(s, T_\delta, \|\Phi_\delta\|_{\mathbf{H}^s}\right) \leq C\left(s, \overline{T}, \|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}\right), \\ \rho_\varepsilon(t) \leq C\left(s, T_\varepsilon, \|\Phi_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^s}\right) \leq C\left(s, \overline{T}, \|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}\right). \end{cases} \tag{49}$$

Luego de (48), $U_\delta$ y $U_\varepsilon$ pueden extenderse a $\left[0, \overline{T}\right]$ satisfaciendo a (48) en ese intervalo.

Consideremos $\overline{U} = (\overline{u}, \overline{v}) = U_\varepsilon - U_\delta = (u_\varepsilon - u_\delta, v_\varepsilon - v_\delta)$, entonces $\overline{U}(0) = \Phi_\varepsilon - \Phi_\delta$ y

$$\left\|\overline{U}(t)\right\|^2_{\mathbf{L}^2} \leq \left\|\overline{U}(0)\right\|^2_{\mathbf{L}^2} + C_s \int_0^t \left\|\overline{U}(\tau)\right\|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau.$$

Usando la desigualdad de Gronwall, la igualdad (44) con $r = s$ y el hecho que $\varepsilon \leq \delta$, resulta

$$\left\|\overline{U}(t)\right\|^2_{\mathbf{L}^2} \quad \leq \quad C_s \varepsilon^{2s},$$

con $C = C\left(s, \overline{T}, \|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}\right)$. Luego,

$$\sup_{[0,\overline{T}]} \left\|\overline{U}(t)\right\|_{\mathbf{L}^2} \leq C_s \varepsilon^s. \tag{50}$$

Ahora, como $\overline{U} = (\overline{u}, \overline{v}) \in \mathbf{H}^r(\mathbf{R})$, para $r \geq 0$, usando integración por partes y la desigualdad de triangular, obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\partial_t \left\|D^s\overline{U}(t)\right\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\
&\quad \leq \left|\left\langle D^s\overline{u}, D^s\partial_x(u_\varepsilon\overline{u})\right\rangle_{L^2}\right| + \left|\left\langle D^s\overline{u}, D^s(\overline{u}\partial_x\overline{u})\right\rangle_{L^2}\right| \\
&\qquad + |\beta|\left|\left\langle D^s\overline{u}, D^s\partial_x(v_\varepsilon\overline{v})\right\rangle_{L^2}\right| + |\beta|\left|\left\langle D^s\overline{u}, D^s(\overline{v}\partial_x\overline{v})\right\rangle_{L^2}\right| \\
&\qquad + |\gamma|\left|\left\langle D^s\overline{u}, D^s\partial_x(u_\varepsilon\overline{v})\right\rangle_{L^2}\right| + |\gamma|\left|\left\langle D^s\overline{u}, D^s\partial_x(v_\delta\overline{u})\right\rangle_{L^2}\right| \\
&\qquad + |\gamma|\left|\left\langle D^s\overline{v}, D^s\partial_x(u_\varepsilon\overline{u})\right\rangle_{L^2}\right| + |\gamma|\left|\left\langle D^s\overline{v}, D^s(\overline{u}\partial_x\overline{u})\right\rangle_{L^2}\right| \\
&\qquad + \left|\left\langle D^s\overline{v}, D^s\partial_x(v_\varepsilon\overline{v})\right\rangle_{L^2}\right| + \left|\left\langle D^s\overline{v}, D^s(\overline{v}\partial_x\overline{v})\right\rangle_{L^2}\right| \\
&\qquad + |\beta|\left|\left\langle D^s\overline{v}, D^s\partial_x(v_\varepsilon\overline{u})\right\rangle_{L^2}\right| + |\beta|\left|\left\langle D^s\overline{v}, D^s\partial_x(u_\delta\overline{v})\right\rangle_{L^2}\right|. \qquad (51)
\end{aligned}
$$

Estimando cada uno de los términos del segundo miembro tenemos que

$$
\partial_t \left\|D^s\overline{U}(t)\right\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq C_s\left(\left\|\overline{U}(t)\right\|_{\mathbf{H}^s}^2 + \varepsilon^{\frac{2s\nu}{1+\nu}}\right). \qquad (52)
$$

Integrando desde 0 hasta $t$, obtenemos

$$
\left\|D^s\overline{U}(t)\right\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq \left\|\overline{U}(0)\right\|_{\mathbf{H}^s}^2 + C_s\varepsilon^{\frac{2s\nu}{1+\nu}} + C_s\int_0^t \left\|\overline{U}(\tau)\right\|_{\mathbf{H}^s}^2 d\tau.
$$

Así,

$$
\begin{aligned}
\left\|\overline{U}(t)\right\|_{\mathbf{H}^s}^2 &\leq \left\|\overline{U}(t)\right\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \left\|D^s\overline{U}(t)\right\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\
&\leq C_s\varepsilon^{\frac{2s\nu}{1+\nu}} + \left\|\Phi_\varepsilon - \Phi_\delta\right\|_{\mathbf{H}^s}^2 + C_s\int_0^t \left\|\overline{U}(\tau)\right\|_{\mathbf{H}^s}^2 d\tau.
\end{aligned}
$$

Aplicando la desigualdad de Gronwall

$$
\begin{aligned}
\left\|U_\delta(t) - U_\varepsilon(t)\right\|_{\mathbf{H}^s}^2 &\leq \left(C_s\varepsilon^{\frac{2s\nu}{1+\nu}} + \left\|\Phi_\varepsilon - \Phi_\delta\right\|_{\mathbf{H}^s}^2\right)e^t \\
&\leq C_s\left(\varepsilon^{\frac{s\nu}{1+\nu}} + \left\|\Phi_\varepsilon - \Phi_\delta\right\|_{\mathbf{H}^s}\right)^2 e^t.
\end{aligned}
$$

Al extraer la raíz cuadrada y tomar el supremo para $t \in \left[0, \overline{T}\right]$, obtenemos (47). □

Se concluye de los teoremas 10 y 11 que $\{U_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ es una familia de Cauchy en $C\left(\left[0,\overline{T}\right],\mathbf{H}^s\left(\mathbf{R}\right)\right)$, de ahí que existe $V\in C\left(\left[0,\overline{T}\right],\mathbf{H}^s\left(\mathbf{R}\right)\right)$ tal que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} U_\varepsilon = V \quad \text{en } C\left(\left[0,\overline{T}\right],\mathbf{H}^s\left(\mathbf{R}\right)\right). \tag{53}$$

Veremos a continuación que $V$ satisface el problema (P) y por lo tanto $V=U$.

**Teorema 12.** *Sean $U_\varepsilon$ y $U$ las soluciones del problema (P) en $\left[0,\overline{T}\right]$ con datos iniciales $\Phi_\varepsilon$ y $\Phi$ para $\varepsilon<1$, como en el teorema 11. Entonces $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} U_\varepsilon = U$ en $C\left(\left[0,\overline{T}\right],\mathbf{H}^s\left(\mathbf{R}\right)\right)$.*

**Prueba.** Es suficiente probar que $V$ satisface la ecuación integral asociada con el problema (P) en $\mathbf{H}^{s-3}\left(\mathbf{R}\right)$. En efecto, como $U_\varepsilon$ es solución de (P) con $U_\varepsilon(0)=\Phi_\varepsilon$ tenemos que $V(0)=\Phi$ para $t\in\left[0,\overline{T}\right]$ y

$$U_\varepsilon(t) = W_0(t)\,\Phi_\varepsilon - \int_0^t W_0(t-\tau)\,F\left(U_\varepsilon(\tau)\right)d\tau \quad \text{en } \mathbf{H}^{s-3}\left(\mathbf{R}\right), \tag{54}$$

para $\tau\in[0,t]$ una vez que $\lim_{\varepsilon\to 0^+} U_\varepsilon = V$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} W_0(t-\tau)\,F\left(U_\varepsilon(\tau)\right) = W_0(t-\tau)\,F\left(V(\tau)\right) \quad \text{en } \mathbf{H}^{s-3}\left(\mathbf{R}\right) \tag{55}$$

para $\tau\in[0,t]$.

$$\left\|W_0(t-\tau)\,F\left(U_\varepsilon(\tau)\right)\right\|_{\mathbf{H}^{s-3}} \le g(\tau)$$

para alguna $g\in L^1\left([0,t],\mathbf{R}\right)$. En efecto,

$$\left\|W_0(t-\tau)\,F\left(U_\varepsilon(\tau)\right)\right\|_{\mathbf{H}^{s-3}} \le C$$

y

$$V(t) = W_0(t)\,\Phi - \int_0^t W_0(t-\tau)\,F\left(V(\tau)\right)d\tau,$$

con la igualdad en $\mathbf{H}^{s-3}\left(\mathbf{R}\right)$. Entonces $V$ satisface el problema (P), y por la unicidad probada en el teorema 9 tenemos que $V=U$. □

Antes de demostrar la dependencia continua de $U$ respecto a $\Phi$, es necesario aún probar el siguiente resultado.

**Teorema 13.** *Sean* $\varepsilon > 0$, $s > \frac{3}{2}$ *y* $\lim_{n\to+\infty} \Phi_n = \Phi$ *en* $\mathbf{H}^s(\mathbf{R})$. *Entonces, dado* $\overline{T} \in ]0, T[$ *existe* $N_0 = N_0(\overline{T})$ *tal que las soluciones* $U_{\varepsilon,n}$ *y* $U_\varepsilon$ *del problema* $(P)$ *en* $[0, \overline{T}]$ *con datos iniciales* $\Phi_{\varepsilon,n}$ *y* $\Phi_\varepsilon$ *respectivamente, están definidas en* $[0, \overline{T}]$ *si* $n \geq N_0$. *Además, cada vez que* $n \geq N_0$ *se cumple que*

$$\sup_{t\in[0,\overline{T}]} \|U_{\varepsilon,n}(t) - U_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^s} \leq C_s \left(\varepsilon^{\frac{s\nu}{1+\nu}} + \|\Phi_{\varepsilon,n} - \Phi_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^s}\right). \tag{56}$$

**Prueba.** Como en el teorema 11, se puede demostrar que $U_\varepsilon$ puede ser definida en $[0, \overline{T}]$ y satisface (48) y (49). Probemos que lo mismo sucede con $U_{\varepsilon,n}$. Para esto consideremos $\zeta = \zeta\left(\overline{T}, \|\Phi_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^s}\right) > 0$ tal que

$$\zeta + \|\Phi_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^s} = \frac{T\|\Phi_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^s}}{\overline{T}}. \tag{57}$$

Como

$$\|\Phi_{\varepsilon,n} - \Phi_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^s} = \|(\Phi_n - \Phi)_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^s} \leq C\|\Phi_n - \Phi\|_{\mathbf{H}^s}, \tag{58}$$

por (42) y (43) con $r = 0$, existe $N_0 = N_0(\overline{T})$ tal que

$$\|\Phi_{\varepsilon,n} - \Phi_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^s} < \zeta \tag{59}$$

siempre que $n \geq N_0$. De esta forma, de la definición de $\rho_{\varepsilon,n}$, la desigualdad (59) y el teorema 10, para $n \geq N_0(\overline{T})$ tenemos,

$$(\rho_{\varepsilon,n}(t))^{\frac{1}{2}} = \frac{\|\Phi_{\varepsilon,n}\|_{\mathbf{H}^s}}{1 - C_s t\|\Phi_{\varepsilon,n}\|_{\mathbf{H}^s}} \leq \frac{\zeta + \|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}}{1 - C_s t(\zeta + \|\Phi\|_{\mathbf{H}^s})} = \rho_{\overline{T}}(t) \tag{60}$$

para $t \in [0, \overline{T}]$, pues de (57),

$$C_s t(\zeta + \|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}) \leq C_s\overline{T}(\zeta + \|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}) = C_s T\|\Phi\|_{\mathbf{H}^s} < 1,$$

donde la última desigualdad es consecuencia de la elección de $T$ en el teorema 9. Entonces, de (60) para $n \geq N_0\left(\overline{T}\right)$ tenemos,

$$\sup_{\left[0,\overline{T}\right]} \rho_{\varepsilon,n}(t) \leq C\left(s,\overline{T},\|\Phi_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^s}\right).$$

Luego, del teorema 9, si $n \geq N_0\left(\overline{T}\right)$ entonces $U_{\varepsilon,n}$ puede ser definida en $\left[0,\overline{T}\right]$, satisfaciendo

$$\|U_{\varepsilon,n}(t)\|_{\mathbf{H}^s}^2 \leq \rho_{\varepsilon,n}(t), \quad t \in \left[0,\overline{T}\right]. \tag{61}$$

Veamos ahora que (56) se cumple. Para esto consideremos $\overline{U} = U_\varepsilon - U_{\varepsilon,n}$ y $\Phi_{\varepsilon,n} - \Phi_\varepsilon = (\varphi_{\varepsilon,n} - \varphi_\varepsilon, \psi_{\varepsilon,n} - \psi_\varepsilon)$, tenemos

$$\left\|\overline{U}(t)\right\|_{\mathbf{L}^2} \leq C_s \left\|\overline{U}(0)\right\|_{\mathbf{L}^2}, \ t \in \left[0,\overline{T}\right]$$

por lo que

$$\sup_{\left[0,\overline{T}\right]} \|U_\varepsilon(t) - U_{\varepsilon,n}(t)\|_{\mathbf{L}^2} = \sup_{\left[0,\overline{T}\right]} \left\|\overline{U}(t)\right\|_{\mathbf{L}^2} \leq C_s \|\Phi_{\varepsilon,n} - \Phi_\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2}. \tag{62}$$

Además

$$\partial_t \left\|D^s\overline{U}(t)\right\|_{\mathbf{H}^s}^2 \leq C_s \left(\left\|\overline{U}(t)\right\|_{\mathbf{H}^s}^2 + \varepsilon^{\frac{2s\nu}{1+\nu}}\right),$$

entonces integrando desde 0 hasta $t$ y aplicando la desigualdad de Gronwall, obtenemos

$$\|U_{\varepsilon,n}(t) - U_\varepsilon(t)\|_{\mathbf{H}^s}^2 \leq C_s \left(\varepsilon^{\frac{s\nu}{1+\nu}} + \|\Phi_{\varepsilon,n} - \Phi_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^s}\right)^2, \quad t \in \left[0,\overline{T}\right].$$

Al extraer la raíz cuadrada y tomar el supremo en $\left[0,\overline{T}\right]$, la desigualdad (56) queda probada. □

Con los resultados anteriores podemos probar la dependencia continua. Para esto consideraremos las aproximaciones de Bona-Smith $\Phi_{\varepsilon,n}$ y $\Phi_\varepsilon$ asociadas a $\Phi_\varepsilon$ y $\Phi$, respectivamente, y las soluciones $U_{\varepsilon,n}$ y $U_\varepsilon$ del problema (P) con datos iniciales $\Phi_{\varepsilon,n}$ y $\Phi_\varepsilon$ respectivamente.

**Teorema 14.** *Sean $\mu > 0$, $\Phi \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ con $s > \frac{3}{2}$ y $U \in C([0,T], \mathbf{H}^s(\mathbf{R}))$ la solución del problema de valor inicial $(P)$ que satisface (19). Si $\{\Phi_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión en $\mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ convergente a $\Phi$ en $\mathbf{H}^s(\mathbf{R})$ y $\{U_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión en $C([0,T_n], \mathbf{H}^s(\mathbf{R}))$ de soluciones de $(P)$ con $U_n(0) = \Phi_n$. Entonces, para todo $\overline{T} \in ]0,T[$ existe $N_0 = N_0(\overline{T})$ tal que para $n \geq N_0$, $U_n$ está definida en $[0,\overline{T}]$ y*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{[0,\overline{T}]} \|U_n(t) - U(t)\|_{\mathbf{H}^s} = 0. \tag{63}$$

**Prueba.** Como los estimados para $\|U_n(t)\|_{\mathbf{H}^s}$ son los mismos que para $\|U_{\varepsilon,n}(t)\|_{\mathbf{H}^s}$, la existencia de $N_0 = N_0(\overline{T})$ tal que $n \geq N_0$ implica que $U_n$ está definida en $[0,\overline{T}]$, se prueba como en el teorema 13. Sea $\varepsilon \in ]0,1[$, entonces como en (47), tenemos

$$\sup_{[0,\overline{T}]} \|U_{\delta,n}(t) - U_{\varepsilon,n}(t)\|_{\mathbf{H}^s} \leq C\left(\varepsilon^{\frac{s\nu}{1+\nu}} + \|\Phi_{\delta,n} - \Phi_{\varepsilon,n}\|_{\mathbf{H}^s}\right)$$

con $0 \leq \nu < \frac{3}{2}$ y $C = C\left(s, \overline{T}, \|\Phi\|_{\mathbf{H}^s}\right)$. Por lo tanto, si $\delta \to 0^+$ obtenemos

$$\sup_{[0,\overline{T}]} \|U_n(t) - U_{\varepsilon,n}(t)\|_{\mathbf{H}^s} \leq C\left(\varepsilon^{\frac{s\nu}{1+\nu}} + \|\Phi_n - \Phi_{\varepsilon,n}\|_{\mathbf{H}^s}\right).$$

Pero de (45) tenemos que $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \Phi_{\varepsilon,n} = \Phi_n$ en $\mathbf{H}^s(\mathbf{R})$, uniformemente en $n$. Luego

$$\sup_{[0,\overline{T}]} \|U_n(t) - U_{\varepsilon,n}(t)\|_{\mathbf{H}^s} \to 0 \text{ cuando } \varepsilon \to 0^+ \tag{64}$$

uniformemente en $n$. Entonces, para $n \geq N_0$ consideremos,

$$\begin{aligned} \|U_n(t) - U(t)\|_{\mathbf{H}^s} \leq\ & \|U_n(t) - U_{\varepsilon,n}(t)\|_{\mathbf{H}^s} \\ & + \|U_{\varepsilon,n}(t) - U_\varepsilon(t)\|_{\mathbf{H}^s} + \|U_\varepsilon(t) - U(t)\|_{\mathbf{H}^s}. \end{aligned}$$

Así, de (56) y (58) sigue que

$$\begin{aligned} \|U_n(t) - U(t)\|_{\mathbf{H}^s} \leq\ & \|U_n(t) - U_{\varepsilon,n}(t)\|_{\mathbf{H}^s} \\ & + C_s\left(\varepsilon^{\frac{s\nu}{1+\nu}} + \|\Phi_{\varepsilon,n} - \Phi_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^s}\right) \\ & + \|U_\varepsilon(t) - U(t)\|_{\mathbf{H}^s}, \end{aligned}$$

tomando el límite cuando $\varepsilon \to 0^{+}$, de (64) y del teorema 12 sigue que

$$\sup_{t\in[0,\overline{T}]} \|U_n(t) - U(t)\|_{\mathbf{H}^s} \leq C_s \|\Phi_n - \Phi\|_{\mathbf{H}^s}$$

de donde obtenemos (63) inmediatamente. □

# Referencias


[1] J. Bergh, J. Lofstrom, *Interpolation Spaces.* Springer-Verlag, N. York, (1970), 139-142.

[2] J. Bona, G. Ponce, J.C. Saut, M. Tom, *A model system for strong inter action between internal solitary waves.* Comm. Math. Phys. 143 (1992).

[3] J. Bona, R. Smith, *The initial-value problem for the Korteweg-de Vries equation.* Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A **278**, 555-601, (1975).

[4] J. A. Gear y R. Grimshaw, *Weak and strong interactions between internal solitary waves.* Stud. Appl. Math., **65**, 235-258, (1984).

[5] R.J. Iório Jr. *On the Cauchy problem for the Benjamin-Ono equation.* Comm. PDE, 11, 1031-1081, (1986).

[6] R. J. Iório Jr., V. Iório, *Fourier analysis and partial differential equations.* Cambridge University Press, New York, (2001).

[7] T. Kato, H. Fujita, *On the non-stationary Navier-Stokes system.* Red. Sem. Mat. Uni. Padova, **32**, 243-260, (1962).

[8] T. Kato, G. Ponce, *Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations.* Comm. Pure Appl. Math. 41, 891-907, (1988).

[9] J. Montealegre, S. Petrozzi, *Operadores dispativos maximales.* Informe de investigación, N°2 Serie B, PUCP, (1998).

[10] W. V. Nunes, *O problema de Cauchy global para equações dispersivas com coeficientes dependentes do tempo.* Tesis de Doctorado. IMPA, Rio de Janeiro (1991).

[11] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Apllied Mathematical Sciences, 44. Springer Verlag, New York (1983).

**Abstract**

In this paper we study the local well-posedness of the initial value problem associated to a system of Korteweg-de Vries equations coupled through both dispersive and nonlinear effects.

Using the method of parabolic regularization we prove the existence of local solution and the estimates of Bona-Smith are used to prove the continuous dependence of the solution on the initials data.

**Key words:** Dispersive systems, Local well Posedness, Estimates of Bona-Smith.

Juan Montealegre Scott
Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú
jmscott@pucp.edu.pe

Carmen Monzón Monzón
Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú
crmonzon@pucp.edu.pe

Risley Rengifo Tello
Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú
rrengifo@pucp.edu.pe