INMERSIONES MÍNIMAS Y APLICACIONES ARMÓNICAS

Christian Figueroa[1]

Resumen

La teoría de las superficies mínimas y en general las inmersiones mínimas es un tema muy atrayente en el que se realiza un intenso trabajo de investigación dentro de la Geometría Diferencial.
Desde los inicios de esta teoría se pudo notar la relación entre la propiedad de minimalidad y las aplicaciones armónicas. En los inicios E. Beltrami establece que una superficie en $\mathbb{R}^3$ es mínima si sus componentes son funciones armónicas. Hasta llegar a nuestros días donde Eells-Sampson establece que una inmersion isométrica es mínima si tal aplicación es armónica.

Palabras Clave: *Superficies mínimas, aplicaciones armónicas, problema variacional.*

1. *Sección Matemática, Departamento de Ciencias, PUCP.*

1. Superficies Mínimas

La historia de las superficies mínimas comienza con el siguiente problema propuesto por Lagrange en 1760 *Dada una curva cerrada C (sin autointersecciones) encontrar una superficie de área mínima que tenga a esta curva como frontera.* Lagrange presentó este problema como un ejemplo de aplicación de lo que se conoce ahora como Cálculo de variaciones. En particular, incluyó el siguiente caso.

Dada una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable, sabemos que el gráfico de la función f

$$S = \{(x, y, z) : z = f(x, y)\}$$

es una superficie regular en $\mathbb{R}^3$. Si efectuamos la siguiente variación normal

$$S_t(x, y) = (x, y, f(x, y) + th(x, y))$$

donde h es diferenciable en Ω y $h|_{\partial\Omega} = 0$. Luego el área de S_t sobre $\bar{\Omega}$ esta dado por

$$A(t) = \iint_{\bar{\Omega}} w(t)\, dxdy$$

donde $w(t) = \sqrt{\det(g_{ij}(t))}$. Por lo tanto, para que S tenga el área mínima, primero tiene que ser punto crítico de $A(t)$, es decir

$$A'(0) = -\iint \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_x}{w}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_y}{w}\right)\right] hdxdy = 0$$

Como h es arbitrario, tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_x}{w}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_y}{w}\right) = 0$$

Es claro las funciones afines $f(x, y) = ax + by + c$ son soluciones triviales de esta ecuación. Años mas tarde, Meusnier obtuvo dos soluciones no triviales de esta ecuación: El catenoide, que resulta de girar la catenaria

$y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ alrededor del eje x y el helicoide, que es una superficie reglada.

Por mucho tiempo estas fueron los únicos ejemplos conocidos de superficies mínimas. Hasta que Scherk obtuvo un nuevo ejemplo, introduciendo la condición de que las variables podían ser separables. Es decir, busco soluciones de la forma, $f(x,y) = g(x) + h(y)$. En este caso, la solución está dado por

$$f(x,y) = \frac{1}{a}\left[\ln(\cos ax) - \ln(\cos ay)\right] = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{\cos ax}{\cos ay}\right)$$

Definición 1. *Sea $(M,<,>)$ una variedad riemanniana. Decimos que una función $f : M \to R$ es armónica si*

$$\triangle f = 0$$

donde $\triangle f = div\,(gradf)$.

En coordenadas locales,

$$\triangle = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(g^{ij}\sqrt{g}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

donde $g = \det(g_{ij})$.

El punto crucial entre las superficies mínimas y las funciones armónicas está dado en el siguiente teorema.

Teorema 2. *Sea $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada, tal que*

$$< \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u > = < \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v > = \lambda(u,v); \qquad < \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v >= 0$$

Entonces

$$\triangle\mathbf{x} = 2H\lambda N$$

donde N es la normal unitaria a la superficie parametrizada. En particular, si la inmersión es mínima entonces , $\mathbf{x}$ es una aplicación armónica.

Prueba. Ver [4] $\square$

El helicoide parametrizado de la siguiente manera

$$\mathbf{x}(u,v) = (a \operatorname{senh} v \cos u,\ a \operatorname{senh} v \operatorname{sen} u,\ au)$$

satisface las condiciones del teorema.

2. Inmersiones Mínimas

Generalizaremos la situación anterior de la siguiente manera. Sea $f : M \to N$ una inmersión isométrica, entonces en cada punto el espacio tangente se puede descomponer de la siguiente manera

$$T_{f(p)}N = T_{f(p)}M \oplus \left(T_{f(p)}M\right)^{\perp}$$

Sea $\bar{\nabla}$ la conexión riemanniana de $\bar{M}$, entonces

$$\nabla_X Y = \bar{\nabla}_{df(X)} df\,(Y)$$

es la conexión riemanniana de M,

Definición 3. *La segunda forma fundamental de la inmersión, f es una forma vectorial bilineal simétrica $B : T_pM \times T_pM \to \left(T_{f(p)}M\right)^{\perp}$ dada por*

$$B\,(X,Y) = \left(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}\right)^{\perp}$$

donde $\bar{X}, \bar{Y}$ son extensiones de $x,\ y \in T_pM$ a campos vectoriales tangentes a $f\,(M)$

Para cada $\eta \in \left(T_{f(p)}M\right)^{\perp}$ tenemos asociado un operador S_η en $T_{f(p)}M$, a la forma bilineal B, dado por

$$\langle B\,(x,y)\,,\eta\rangle = \langle S_\eta\,(x)\,,y\rangle = \langle x, S_\eta\,(y)\rangle$$

Es claro que este operador es autoadjunto. Sea $\{\eta_1, \ldots, \eta_k\}$ una base ortonormal de $\left(T_{f(p)}M\right)^{\perp}$, entonces podemos definir el vector curvatura media de la inmersión f

$$H = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(trS_{\eta_i}\right)\eta_i \tag{1}$$

Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base ortonormal de $T_{f(p)}M$, entonces

$$tr\left(S_{\eta_i}\right) = \sum_{r=1}^{n}\left\langle S_{\eta_i}\left(e_r\right), e_r\right\rangle = \left\langle B\left(e_r, e_r\right), \eta_i\right\rangle$$

Reemplazando en (1), obtenemos otra forma de representar al vector curvatura media

$$H = \frac{1}{k}\sum_{r=1}^{n} B\left(e_r, e_r\right) \tag{2}$$

Decimos que la inmersión $f; M \to \bar{M}$ es mínima y $f(M)$ es una subvariedad inmersa mínima de $\bar{M}$ si $H = 0$.

Veamos algunos ejemplos de inmersiones mínimas

1. Sea $\gamma : I \to \bar{M}$ una geodésica y como γ' es un campo paralelo en $\bar{M}$ a lo largo de γ, entonces $B(\gamma', \gamma') = 0$, luego γ es una inmersión mínima y $\gamma(I)$ es una subvariedad mínima.

2. Si $\dim(M) = 2$ y $\bar{M} = R^3$ regresamos al caso de supeficies mínimas descritas anteriormente.

Es posible describir las inmersiones mínimas como puntos críticos del siguiente problema variacional: Sea $f : M \to \bar{M}$ una inmersión donde M es una variedad compacta con frontera ∂M (puede ocurrir que $\partial M = \emptyset$).

Una variación de f es una aplicación $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \to \bar{M}$, C^{∞} tal que

a) Cada aplicación f_t es una inmersión

b) $f_0 = f$

c) $f_t|_{\partial M} = f|_{\partial M}$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

Sea $E(p) = \frac{\partial F}{\partial t}(0, p)$ el campo variacional de $\bar{M}$ perpendicular a M y $A(t)$ el volumen de la subvariedad inmersa $f_t(M)$ en $\bar{M}$, entonces,

$$A(t) = \int_M dv_t \tag{3}$$

donde v_t es el elemento de volumen de la inmersión f_t.

Teorema 4.

$$A'(0) = -\int_M \langle H, E \rangle \, dv$$

donde dv es el elemento de volumen de f.

Prueba. En efecto, si derivamos la ecuación (3) con respecto de t obtenemos

$$A'(t) = \int_M \frac{d}{dt}(dv_t)$$

Sea $\{E_i\}_{i=1,\ldots,n}$ un referencial geodésico en p, es decir

a) $\{E_i\}_{i=1,\ldots,n}$ es ortonormal en una vecindad de p, en la métrica inducida por f.

b) $(\nabla_{E_i} E_j)_p = 0$.

Recuerde que un referencial geodésico se construye a partir de una base ortonormal en T_pM, y trasladando paralelamente a lo largo de los rayos geodésicos que salen de p.

Si $\{w_i\}_{i=1,\ldots,n}$ es la base dual de $\{E_i\}_{i=1,\ldots,n}$, la métrica g_t, inducida por f_t, puede ser escrita de la siguiente manera

$$ds_t^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(t) \, w_i \otimes w_j$$

donde $g_{ij}(t) = \langle df_t(E_i), df_t(E_j)\rangle$. Luego

$$dv_t = \sqrt{g(t)}w_1 \wedge \ldots \wedge w_n = \sqrt{g(t)}dv_0$$

donde $g(t) = \det(g_{ij}(t))$. Por lo tanto, derivando con respecto de t y evaluando en $t = 0$.

$$\frac{d}{dt}(dv_t)_{t=0} = \frac{1}{2}g'(0)\,dv_0$$

Pero, debido a un resultado del Algebra Lineal, tenemos

$$g'(0) = tr\left(g'_{ij}(0)\right)$$

Ahora, bastara calcular la expresión del lado derecho de la igualdad anterior. Para esto, extendemos $\{E_i\}_{i=1,\ldots,n}$ sobre $(-\varepsilon, \varepsilon) \times U$, donde U es una vecindad de p. Usando la interpretación geométrica del corchete, tenemos que $\left[\frac{\partial}{\partial t}, E_i\right] = 0$. Sean $E, \tilde{E}_1, \ldots, \tilde{E}_n$ las imagenes de los campos anteriores mediante dF. Entonces

$$g_{kk}(t) = \langle dF(E_k), dF(E_k)\rangle = \left\langle \tilde{E}_k, \tilde{E}_k\right\rangle$$

en $F(t,p)$. Y por lo tanto

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}g_{kk}(t) &= E\left\langle \tilde{E}_k, \tilde{E}_k\right\rangle \\ &= 2\left\langle \bar{\nabla}_E\tilde{E}_k, \tilde{E}_k\right\rangle \\ &= 2\left\langle \bar{\nabla}_{\tilde{E}_k}E, \tilde{E}_k\right\rangle\end{aligned}$$

en la última igualdad usamos la simetría de la conexión riemanniana $\bar{\nabla}$. Usando, ahora, la compatibilidad de la conexión con respecto a la métrica y el hecho de que $\langle E, E_k\rangle = 0$, obtenemos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}g_{kk}(t) = -\left\langle E, \bar{\nabla}_{\tilde{E}_k}\tilde{E}_k\right\rangle = -\langle E, B(E_k, E_k)\rangle$$

Reemplazando en (2), y evaluando en $(0,p)$, obtenemos

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{d}{dt}g_{kk}(0) = -\langle E, H\rangle$$

$\square$

3. Aplicaciones Armónicas

Sea $f : M \to N$ una aplicación entre dos variedades de dimensión m y n respectivamente. Definimos

$$f^{-1}(TN) = \{(x, v) \in M \times TN : f(x) = \pi(v)\}$$

Es decir, construimos un fibrado vectorial usando la aplicación f y el fibrado tangente $\pi : TN \to N$. Las secciones de este fibrado son llamados campos vectoriales a lo largo de f.

En cada punto de $x \in M$, el diferencial

$$df_x : T_xM \to T_{f(x)}N$$

es una transformación lineal, el cual puede ser interpretado como un elemento del espacio vectorial $T_x^*M \otimes T_{f(x)}N$, ver ([5]). Por lo tanto podemos ver df como una sección del fibrado

$$\pi : T^*M \otimes f^{-1}(TN) \to M$$

Recordemos la siguiente

Definición 5. *Una conexión lineal en un fibrado vectorial $\pi : V \to M$ es una aplicación bilineal ∇ en el espacio de las secciones*

$$\nabla : C(TM) \times C(V) \to C(V)$$

tal que para cada función diferenciable h, se cumple que:

1) $\nabla_{hX}\sigma = h\nabla_X\sigma$

2) $\nabla_X h\sigma = X(h)\sigma + h\nabla_X\sigma$

$\nabla_X\sigma$ se llama la derivada covariante de una sección σ en la dirección del campo X.

Por otro lado, si a y b son métricas en los fibrados vectoriales $\xi : V \to M$ y $\eta : W \to M$, respectivamente, entonces podemos inducir una métrica en el fibrado dual de la siguiente manera: Usemos el siguiente isomorfismo entre la fibra V_x y la fibra dual V_x^*,

$$\flat : V_x \to V_x^*$$

definido por $\flat(\sigma) = \langle \sigma, \rho \rangle$ No es otra cosa, que la representación de Riez para funcionales cuando tenemos un espacio producto interno. Si denotamos por $\sharp$ a la inversa de $\flat$, entonces definimos el producto interno en la fibra dual

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \left\langle \alpha^{\sharp}, \beta^{\sharp} \right\rangle$$

con $\alpha, \beta \in V_x^*$. Análogamente podemos inducir el siguiente producto interno en el fibrado producto tensorial de $V \otimes W$ sobre M : Si $\sigma, \rho \in V_x$ y $\lambda, \mu \in W_x$, entonces

$$\langle \sigma \otimes \lambda, \rho \otimes \mu \rangle = \langle \sigma, \rho \rangle + \langle \lambda, \mu \rangle$$

Finalmente si ∇^V y ∇^W son conexiones de los fibrados V y W, podemos también definir

1) La conexión dual como

$$(\nabla_X^* \theta)(\sigma) = X(\theta(\sigma)) - \theta(\nabla_X \sigma)$$

donde $\theta \in C(V^*)$ y $\sigma \in C(V)$.

2) La conexión producto tensorial en $V \otimes W$ como

$$\nabla_X(\sigma \otimes \lambda) = \left(\nabla_X^V \sigma\right) \otimes \lambda + \sigma \otimes \left(\nabla_X^W \lambda\right)$$

3) Sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable y $W \to N$ un fibrado vectorial con conexión ∇^W, entonces podemos definir el pullback de la conexión para el fibrado vectorial $f^{-1}(W)$ de la siguiente manera: Sea $x \in M$, con $y = f(x) \in N$, $X \in T_x M$ y $\lambda \in C(N)$,

$$\nabla_X(f^* \lambda) = f^* \nabla_{df(X)}^W (\lambda)$$

donde $f^*\lambda = \lambda \circ f \in C\left(f^{-1}W\right)$.

Ahora estamos en condiciones de presentar las aplicaciones armónicas. Sean (M, g) y (N, h) dos variedades riemannianas, tales que M y N son compactas, orientables y conexas. Sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable. Entonces df se puede ver como una sección del fibrado $T^*M \otimes f^{-1}(TN)$ y denotaremos por $\|df\|$ su norma en el punto x, inducido por la métrica g y h. En coordenadas locales, $\left(x^i\right)$ e (y^r) alrededor de los puntos x y $f(x)$, tenemos

$$\|df\|^2 = g^{ij} h_{rs}(f)\, f_i^r f_j^s$$

donde $(f_i^r) = \left(\frac{\partial f^r}{\partial x^i}\right)$. Notemos que está norma no es otra cosa que la traza de la primera forma fundamental $f^*(h)$ según la métrica g.

Definición 6. *Siguiendo la notación anterior, definimos la energia de f como el siguiente número*

$$E(f) = \int_M \|df\|^2 v_g$$

Notemos que $E(f) \geq 0$ y que $E(f) = 0$ si f es una aplicación constante.

Definición 7. *Decimos que una aplicación $f : M \to N$ es armónica si es un extremo de la función energía*

Esto significa lo siguiente, si consideremos una familia de aplicaciones $f_t : M \to N$ tal que $f_0 = f$ y sea $v = \left.\frac{\partial f_t}{\partial t}\right|_{t=0}$, entonces f es armónica si $\left.\frac{d}{dt}E(f_t)\right|_{t=0} = 0$. Veamos la ecuación de Euler-Lagrange de este problema variacional.

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{dt}E(f_t)\right|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\int_M \|df_t\|^2 v_g \\ &= \frac{1}{2}\int_M \frac{\partial}{\partial t}\langle df_t, df_t\rangle v_g \\ &= \left.\int_M \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} df_t, df_t \right\rangle v_g\right|_{t=0} \end{aligned}$$

donde $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}$ es la conexión lineal en el fibrado $T^*(M \times \mathbb{R}) \otimes f^{-1}(TN)$. Es decir $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} = \nabla^1_{\frac{\partial}{\partial t}} + \nabla^2_{\frac{\partial}{\partial t}}$, donde ∇^1 y ∇^2 son las conexiones en $T^*(M \times \mathbb{R})$ y $f^{-1}(TN)$ respectivamente. Luego, dado $X \in TM$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} df_t &= \nabla^2_{\frac{\partial}{\partial t}}(df_t X) + df_t\left(\nabla^1_{\frac{\partial}{\partial t}} X\right) \\
&= \nabla^2_{\frac{\partial}{\partial t}}(df_t X) + 0 \\
&= \nabla^2_X\left(df_t \tfrac{\partial}{\partial t}\right) + df_t\left[\tfrac{\partial}{\partial t}, X\right] \\
&= \nabla^2_X\left(df_t \tfrac{\partial}{\partial t}\right)
\end{aligned}$$

Notando que ∇ y d coinciden en $\mathcal{A}^0\left(f^{-1}(TN)\right)$ (0-formas). Luego,

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} df_t &= \int_M \left\langle \nabla^2_X\left(\tfrac{\partial f}{\partial t}\right), df_t \right\rangle v_g \\
&= \int_M \langle dv, df \rangle v_g \\
&= \int_M \langle v, d^* df \rangle v_g
\end{aligned}$$

Si llamamos $\tau(f) = -d^* dv$, entonces

$$\left.\frac{d}{dt}E(f_t)\right|_{t=0} = -\int_M \langle v, \tau(f) \rangle v_g$$

Por lo tanto f es armónica si $\tau(f) = 0$.

Para finalizar, presentaremos el teorema que relaciona los conceptos de inmersión mínima y las aplicaciones armónicas, el cual fue establecido por Eells-Sampson, ver [1]:

Teorema 8. *Sea $f : (M, g) \to (N, h)$ una inmersión isométrica. Entonces*

$$\tau(f) = mH$$

donde $m = \dim M$ y H es el vector curvatura media. En particular, una inmersión isométrica es mínima si es armónica.

En particular, si $m = 2$ y $N = \mathbb{R}^3$, tenemos una inmersión isométrica descrita como en el teorema (2). Usando el teorema anterior, llegaríamos al mismo resultado

$$\triangle \mathbf{x} = 2H$$

Referencias

[1] J. Eells & J. Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds.* Amer. J. Math. (86), (1964), 109-160.

[2] Manfredo do Carmo, *Geometria Riemannian.* Projeto Euclides, (1988).

[3] H. Blaine Lawson Jr., *Lectures on Minimal submanifolds, volume 1.* Mathematics Lecture Series (9), Publish or Perish, (1980).

[4] Robert Osserman, *A survey of Minimal Surfaces.* Dover Publications, Inc. (1986).

[5] S. Kobayashi & K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry, Volume 1.* Interscience Publishers, (1963).

Abstract

The theory of the minimal surfaces and in general minimal immersions is a very attractive subject in which an intense work of investigation is made. From the beginnings of this theory the relation between the harmonic applications and this type of immersions could be noticed. Beltrami establishes that a surface in $\mathbb{R}^3$ is minimal if their components are harmonic. This situation is generalized by Eells-Sampson, who establishes that an isometric immersion is minimal if such application is harmonic.

Key words: Minimal surfaces, harmonic applications, Variational problem.

Christian Figueroa
Sección Matematica,
Departamento de Ciencias,
Pontificia Universidad Católica del Perú
cfiguer@pucp.edu.pe