DOS TEOREMAS CLÁSICOS DE LA TEORÍA DE HOMOTOPÍA

Alexander Peña Bottcher[1]
Parcialmente financiado por el proyecto DAI-3490.

Resumen

En el presente artículo se demostrará la conmutatividad de los grupos de homotopia superior y que toda equivalencia de homotopia es una equivalencia débil. Estamos en la categoría ***Top****, por lo tanto todo morfismo entre espacios será asumido una función continua y todo producto entre espacios tendrá la topología producto.*

Palabras Clave: *Topología, Topología Algebraica, Homotopía.*

1. *Sección Matemática, Departamento de Ciencias, PUCP.*

1. Introducción

Con el presente artículo pretendemos eliminar en algo los temores o prejuicios que muchos tuvimos contra los grados superiores en topología algebraica y, en particular, en homotopía, demostrando dos resultados clásicos de la teoría de homotopía: toda equivalencia de homotopía es una equivalencia débil y los grupos de homotopía de grado superior son conmutativos.

La primera vez que se me expuso un esbozo de la demostración de la conmutatividad de los grupos de homotopía de grado superior, el profesor dibujó unas casitas en la pizarra y luego de pocos comentarios seguramente claves dio por concluida la demostración. La gran mayoría de los presentes, probablemente por nuestras propias limitaciones no entendimos mucho y algunos incluso generaron un pequeño complejo al respecto. La presente demostración tal vez muy técnica y un poco tediosa no deja lugar a dudas y cuando la descubrí me reconfortó y me dio los ánimos para seguir adelante.

La definición convencional de $\pi_n(X,x)$ es $\hom_\bullet((S^n,1),(X,x))/\sim$. La topología compacto abierta permite definir estos mismos grupos de manera recursiva en función de $\Omega^{n-1}(X,x)$ que a su vez son **H-espacios**, y usando el hecho que el grupo fundamental de todo H-espacio es conmutativo concluimos la demostración.

2. Base Conceptual

Definición 1. *Sean X, Y dos espacios topológicos*

- $f_0, f_1 : X \to Y$ *son **homotópicas**,* $(\mathrm{f}_0 \sim \mathrm{f}_1)$*, si* $\exists h : I \times X \to Y (I = [0,1])$ *(llamada **homotopía**) tal que* $\forall x \in X, h(0,x) = f_0(x)$ *y* $h(1,x) = f_1(x)$.

- $f : X \to Y$ *es una* ***equivalencia de homotopía*** *si* $\exists g : Y \to X$ *tal que* $gf \sim 1x \wedge fg \sim 1_Y$.

Nota. En el conjunto de las funciones continuas de X a Y, que denotaremos $\mathbf{hom(X,Y)_{Top}}$, $\sim$ es una relación de equivalencia compatible con la composición en Top ($\forall f_0, f_1 \in \hom(X,Y)_{Top}, \forall g_0, g_1 \in \hom(Y,Z)_{Top}$, si $f_0 \sim f_1 \wedge g_0 \sim g_1 \Rightarrow g_0 \circ f_0 \sim g_1 \circ f_1$), lo que nos permite definir la categoría $\overline{\mathbf{Top}}$, cuyos objetos son los espacios topológicos y sus morfismos son clases de equivalencia de funciones continuas.

Definición 2.

- ***Top$_\bullet$*** *es la categoría de los espacios punteados y las funciones continuas que respetan el punto base.*

- $\mathbf{hom_\bullet((X,x_0),(Y,y_0))}$ *es el conjunto de funciones continuas que respetan el punto base.*

- f_0 , $f_1 : (X,x_0) \to (Y,y_0)$ *punteadas son* ***homotópicas***, $(\mathbf{f_0 \sim f_1})$, *si* $\exists h : I \times X \to Y (I = [0,1])$ *(llamada* ***homotopía punteada****) tal que* $\forall x \in X, h(0,x) = f_0(x) \wedge h(1,x) = f_1(x) \wedge \forall t \in I, h(t,x_0) = y_0$.

- *Al igual que en la Nota 1, podemos definir la categoría* $\overline{\mathbf{Top_\bullet}}$, *de los espacios punteados y las clases de homotopía puntead de funciones continuas punteadas.*

- *Dos lazos* δ_0, δ_1 *que empiezan y terminan en* x_0 $(\delta : I \to X/\delta(0) = \delta(1) = x_0)$ *son* ***homotópicos***, $(\delta_0 \sim \delta_1)$, *si* $\exists h : I \times I \to X$ *(llamada* ***homotopía entre lazos****) tal que*

$$\begin{aligned}\forall t \in I, h(0,t) &= \delta_0(t) \wedge\ h(1,t) = \delta_1(t)\ \wedge \\ \forall t \in I, h(t,0) &= x_0 \quad \wedge\ h(t,1) = x_0\end{aligned}$$

- $\Omega(\mathbf{X}, \mathbf{x_0})$ *es el conjunto de los lazos que empiezan y terminan en* x_0
- $\pi_1(X, x_0) := \Omega(X, x_0)/\sim$

De manera más general podemos definir:

1. $\mathbf{\Omega(X, x, y)}$ (caminos de x a y) y $\pi(\mathbf{X}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) := \Omega(X, x, y)/\sim$.
2. $\pi(\mathbf{X})$ la categoría cuyos objetos son los puntos de X, y donde $Fl_{\pi(X)}(x, y) := \pi(X, x, y)$. Así, obtenemos un functor: $\pi : Top \to gr$ (categoría de los pequeños grupoides).

Definición 3. *Sea X un espacio topológico.*

- *X es **cuasi-compacto** si todo cubrimiento abierto admite un subcubrimiento finito.*
- *X es **compacto** si es cuasi-compacto y Hausdorff.*
- *La **topología compacto-abierta** en* $\hom(X, Y)_{Top}$ *es la generada por los abiertos $N_{K,U} := \{f \in [X, Y]/f(K) \subset U\}$, donde K cuasi-compacto de X y U abierto de Y. El esapcio así obtenido es denotado* $\underline{\mathbf{hom}}(X, Y)$.
- $\underline{\mathbf{hom}}_{\bullet}((X, x_0), (Y, y_0))$ *es* $hom_{\bullet}((X, x_0), (Y, y_0))_{Top_{\bullet}}$ *con la topología compacto-abierta.*

Nota.

1. (a) Si Y localmente cuasi-compacto, existe una biyección $\hom(X \times Y, Z) \approx \hom(X, \underline{\hom}(Y, Z))$.

   (b) Si X, Y localmente cuasi-compacto, existe un homeomorfismo $\underline{\hom}(X \times Y, Z) \simeq \underline{\hom}(X, \underline{\hom}(Y, Z))$.

2. Sean X, Y, Z espacios punteados

   (a) Si Y localmente cuasi-compacto, existe una biyección $\hom_\bullet(X \wedge Y, Z) \approx \hom_\bullet(X, \underline{\hom}_\bullet(Y, Z))$.

   (b) Si X, Y localmente cuasi-compacto, existe un homeomorfismo $\underline{\hom}_\bullet(X \wedge Y, Z) \backsimeq \underline{\hom}_\bullet(X, \underline{\hom}_\bullet(Y, Z))$.

   donde $(X, x) \wedge (Y, y) = X \times Y/(X \times \{y\} \cup \{x\} \times Y)$ (**producto somital**, smash product).

Definición 4. *Sean X, Y en Top, $f : X \to Y$ y $x \in X$.*

1. *$\pi_0(X)$ es el conjunto de las componentes conexas por arcos de X. $\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ es la aplicación que asocia a la c.c.p.a. de $x \in X$ la c.c.p.a. de $f(x) \in Y$.*

2. $\mathbf{\Omega(f)} : \Omega(X, x) \to \Omega(Y, f(x)); \alpha \mapsto f \circ \alpha.$

3. $\pi_1(\mathbf{f}) : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x)); \overline{\alpha} \mapsto \overline{f \circ \alpha}.$

Proposición 5.

1. *Dotando a $\Omega(X, x)$ de la topología inducida por $\underline{\hom}(I, X)$ y escogiendo como punto base el camino constante igual a x, tenemos un functor*
$$\Omega : Top_\bullet \to Top_\bullet$$

2. *π_1 es un functor de $Top_\bullet \to Gr$.*

Definición 6.

$$\boxed{\pi_{\mathbf{n}}(\mathbf{X}, \mathbf{x}) := \pi_{\mathbf{1}}(\mathbf{\Omega}^{\mathbf{n}-1}(\mathbf{X}, \mathbf{x})) \cdot (\mathbf{\Omega}^{\mathbf{0}} := \mathbf{1}_{\mathbf{Top}_\bullet})}$$

Nota.

1. $\pi_1(X, x) \approx \pi_0(\Omega(X, x))$.

2. $\Omega^n(X,x) \simeq \underline{\hom}_\bullet((S^n,1),(X,x))$.
   $\pi_n(X,x) \simeq \hom_\bullet((S^n,1),(X,x))/\sim \leftarrow$ homotopía punteada.

3. $\Omega^n(X,x) \backsimeq \{\varphi \in \underline{\hom}(I^n,X)/\varphi|_{\partial I^n} = x\}$
   $\backsimeq \{\varphi \in \underline{\hom}(B^n,X)/\varphi|_{S^{n-1}} = x\}$ y su punto base corresponde a la aplicación constante igual a x.

3. Demostración del Primer Resultado

Proposición 7. *Si x_0, x_1 son puntos de un espacio topológico X, tales que existe un camino γ de x_0 a x_1 y $n \geq 1$ entonces:*
Existe un isomorfismo $C^n_{\bar\gamma} : \pi_n(X,x_0) \to \pi_n(X,x_1)$ donde $\bar\gamma$ es la clase de equivalencia de los caminos de x_0 a x_1 homotópicos a γ, y se cumple:

1.

$$\begin{array}{rlcll} C^n : & \pi(X) & \to & Gr & \textit{es un functor} \\ & x & \mapsto & \pi_n(X,x) & \\ & a & \mapsto & C^n_a & \end{array}$$

2. Si $f, g : X \to Y, h : I \times X \to Y$ una homotopía de f a g, $x \in X$ y $\gamma(t) = h(t,x)$ entonces

$$\begin{tikzcd} \pi_n(X,x) \arrow[r, "\pi_n(f)"] \arrow[dr, "\pi_n(g)"'] & \pi_n(Y,f(x)) \arrow[d, "C^n_{\bar\gamma}"] \\ & \pi_n(Y,g(x)) \end{tikzcd}$$

conmuta.

3. $\forall f : X \to Y,$

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X,x_0) \arrow[r, "C^n_{\bar{\gamma}}"'] \arrow[d, "\pi_n(f,x_0)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \pi_n(X,x_1) \arrow[d, "\pi_n(f,x_1)"] \\
\pi_n(Y,f(x_0)) \arrow[r, "C^n_{\overline{f\circ\gamma}}"] & \pi_n(Y,f(x)).
\end{tikzcd}$$

Definición 8. $f : X \to Y$ *es una* ***equivalencia débil*** *si*

1. $\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ *es biyectiva.*

2. $\pi_n(f,x) : \pi_n(X,x) \to \pi_n(Y,f(x))$ *es isomorfismo,* $\forall n \geq 1, \forall x \in X.$

Teorema 9. *Si* $f : X \to Y$ *equivalencia de homotopía* $\Rightarrow f$ *equivalencia débil.*

Demostración.

$$\begin{array}{rcl}
\exists g \;/\; fg & \sim & 1_Y \;\wedge\; gf \sim 1_X \\
n = 0 & : & \Rightarrow \forall x, y \exists \text{ caminos de } x \text{ a } g(f(x)) \text{ y de } y \text{ a } f(g(y)) \\
 & & \Rightarrow \pi_0(f) \text{ es inyectiva y } \pi_0(f) \text{ es suryectiva.} \\
n \geq 0 & : & (\text{Prop. } 7)\ \exists \gamma \in \Omega(X, x, gf(x))/
\end{array}$$

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X,x) \arrow[r, "\pi_n(1_X)", "\simeq"'] \arrow[dr, "\pi_n(gf)"'] & \pi_n(X,x) \arrow[d, "\simeq"', "C^n_{\bar{\gamma}}"] \\
 & \pi_n(X, g(f(x)))
\end{tikzcd}
\qquad \textit{conmuta}$$

$\Rightarrow \pi_n(gf)$ es un isomorfismo .... †

análogamente $\pi_n(fg)$ es un isomorfismo ... ‡

$\Rightarrow$ (*por* †) $\pi_n(g)$ suryectiva y (‡)$\pi_n(g)$ inyectiva

$\Rightarrow$ (*por* †) $\pi_n(f)$ es un isomorfismo.

□

La recíproca es falsa.

4. Demostración del Segundo Resultado

Definición 10. *Un **H-espacio** es un espacio punteado (X, x_0) junto con una operación $\mu : (X \times X, (x_0, x_0)) \to (X, x_0)$ $(\mu(x_0, x_0) = x_0)$ continua, y tal que*

$$\begin{array}{rccc} \mu_1 : & (X, x_0) & \to & (X, x_0) \\ & x & \mapsto & \mu(x, x_0) \end{array} \quad \wedge \quad \begin{array}{rccc} \mu_2 : & (X, x_0) & \to & (X, x_0) \\ & x & \mapsto & \mu(x_0, x) \end{array}$$

son $\mu_1 \sim Id_X \sim \mu_2$ como morfismos punteados.

Proposición 11. *Si $((X, x_0), \mu)$ es un H-espacio entonces $\pi_1(X, x_0)$ es conmutativo.*

Demostración.

$$\text{Sea } \psi \;:\; \begin{array}{ccc} \pi_1(X \times X, (e, e)) & \to & \pi_1(X, e) \times \pi_1(X, e) \\ \overline{\delta} & \mapsto & (\overline{\delta}_1, \overline{\delta}_2) \end{array}$$

$$\text{donde } \delta \;:\; \begin{array}{ccc} I & \to & X \times X \\ t & \to & (\delta_1(t), \delta_2(t)) \end{array}$$

Tenemos los morfismos de grupos

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X \times X, (e, e)) \arrow[r, "\sim", "\psi"'] \arrow[d, "\pi_1(\mu(e,e))"'] & \pi_1(X, e) \times \pi_1(X, e) \arrow[dl, dashed, "\varphi := \pi_1(\mu(e,e)) \circ \psi^{-1}"] \\ \pi_1(X, e) & \end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow \qquad \varphi((a,a')\cdot(b,b')) = \varphi(a,a')\cdot\varphi(b,b')$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{tikzcd}
\varphi(ab,a'b') \arrow[rr, equal] \arrow[d, equal] & & (a*a')\cdot(b*b') \arrow[dll, equal, "\oplus"] \\
(a\cdot b)*(a'b') & &
\end{tikzcd}$$

donde $u * v := \varphi(u,v)$

además $a\cdot 1_e = a = 1_e \cdot a$

$a * 1_e = a = 1_3 * a \ \ldots \otimes$

$$\ulcorner \ \underline{\varphi(\bar{\alpha},\bar{\varepsilon}_e) \overset{?}{=} \bar{\alpha}} \quad \Leftrightarrow \quad \pi_1(\mu)(\overline{(\alpha,\varepsilon_e)}) = \bar{\alpha}$$

$$\overline{\mu\circ(a,\varepsilon_e)} = \bar{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \mu\circ(\alpha,\varepsilon_e) \sim \alpha$$

buscamos $H : I\times I \to x$

pero tenemos $\mu_1 = \mu\circ(1_x, e) \overset{h}{\sim} 1_x$

$$\begin{array}{rcl}
\Rightarrow h_1 I\times X \to X/h(0,x) & = & \mu_1(x) = \mu(x,e) \\
h(1,x) & = & x \\
h(t,e) & = & e \ \forall t\in I
\end{array}$$

Sea $H(t,s) := h(t,\alpha(s))$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl}
H(0,s) & = & \mu(\alpha(s),e) = \mu\circ(\alpha,\varepsilon_e)(s) \\
H(1,s) & = & \alpha(s) \\
H(t,0) & = & H(t,1) = \varphi(t,e) = e \ \forall t\in I
\end{array}\right.$$

$\mu_2 \sim 1_x$ se tiene $\varphi(\bar{\varepsilon}_e,\bar{\alpha}) = \bar{\alpha} \lrcorner$

$\Rightarrow$ de $(\otimes \wedge \oplus, E_x g)\varphi(\bar{\alpha},\bar{\beta}) = \bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}$

esta operación es conmutativa y asociativa $\lrcorner$

Nota. Si (X,e,μ) H-espacio $\Rightarrow \overline{\mu\circ(\alpha,\beta)} = \overline{\alpha\perp\beta}$

Lema 12. $\perp$: $(\Omega(X,x)\times\Omega(X,x) \to \Omega(X,x)$ *es continua.*

$$(\alpha,\beta) \mapsto \beta\perp\alpha$$

Demostración.

$$\begin{array}{llllll}
\Omega(X,x) \hookrightarrow & \underline{Hom} & (I,X) & & & \\
\beta \perp \alpha \in N_{K,U} & \Leftrightarrow & \alpha \in & N_{K_1,U} & \wedge & \beta \in N_{K_2,U} \\
 & & \text{donde} & K_1 & = & 2(K \cap [0,\frac{1}{2}]) \\
 & & & K_2 & = & 2(K \cap [\frac{1}{2},1]) - 1
\end{array}$$

Proposición 13. $((\Omega(X,x),\varepsilon_x),\perp)$ *es un H-espacio*

Demostración:

1) $\varepsilon_x \perp \varepsilon_x = E_x$

2) Por demostrar que :

$$\begin{array}{ccc}
\Omega(X,x) & \rightarrow & \Omega(X,x) \\
\alpha & \mapsto & \alpha \perp \varepsilon_x \\
\alpha & \mapsto & \varepsilon_x \perp \alpha
\end{array}$$

son homotópicas a la identidad como morfismos punteados.

Necesitamos $H : I \times \Omega(X,x) \rightarrow \Omega(X,x)$ tal que

$$H(0,\alpha) = \alpha \perp \varepsilon_x,\ H(1,\alpha) = \alpha,\ H(u,\varepsilon_x) = \varepsilon_x \forall u \in I$$

$$\Rightarrow H(u,\alpha)(t) = \begin{cases} x \text{ si } 0 \leq t \leq \frac{(1-u)}{2} \\ \\ \alpha\left(\frac{2t}{u+1} + \frac{u-1}{u+1}\right) \text{ si } \frac{1-u}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \qquad \text{cumple}$$

Necesitamos que

$$\begin{array}{ccc}
\Omega(X,x) \times I \times I & \xrightarrow{\widetilde{H}} & X \\
(\alpha,u,t) & \mapsto & H(u,\alpha)(t)
\end{array}$$

sea continua:

Sean $F_1 = \{(u,t)/0 \le t \le \frac{(1-u)}{2}\}$
$F_2 = \{(u,t)/\frac{1-u}{2} \le t \le 1\}$ cerrados

$\Rightarrow$ $\widetilde{H}|_{\Omega(X,x)\times F_i}$ continua
$\widetilde{H}|_{\Omega(X,x)\times F_2}$ continua:
$\varphi(u,t) = \frac{2t+u-1}{u+1}$

$$\Rightarrow \begin{tikzcd} \Omega(X,x)\times F_2 \arrow[r, "1\times\varphi"] \arrow[ddr, "\widetilde{H}|_{\Omega\times F_2}"'] & \Omega(X,x)\times I \arrow[d, "\text{inclusión}"] \\ & \underline{Hom}(I,x)\times I \arrow[d, "\text{evaluación}"] \\ & X \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \widetilde{H}|_{\Omega\times F_2}$ continua
análogamente $\widetilde{H}|_{\Omega\times F_1}$ continua

$\Rightarrow$ (pues los F_i son cerrados) $\widetilde{H}$ continua

$\Rightarrow$ **H cumple**$\rfloor$

Corolario 14. *$\pi_n(X,x)$ es conmutativo $\forall n \ge 2$.*

Referencias

[1] A. Peña Bottcher, *Categorías de Modelos y Métodos Simpliciales en Topología Algebraica.* Tesis para optar el grado académico de magíster en Matemáticas, PUCP, Lima-Perú, 2005.

[2] R. M. Switzer, *Algebraic Topology-Homotopy and Homology.* Springer-Verlag, Berlín, 1975.

Abstract

In this paper we prove the commutativity of π_n for $n \leq 2$ and that all homotopy equivalence is a weak equivalence. We are in the cathegory **Top**, therefore all morfisms are assumed continuous and all spaces product will have the product topology.

Key words: Topology, Algebraic Topology, Homotopy

Alexander Peña Bottcher
Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú
apenab@pucp.edu.pe