LA K-TEORÍA BIVARIANTE PARA C-ÁLGEBRAS

Christian Valqui[1]

Octubre, 2007

Resumen

En esta exposición revisaremos brevemente la historia de la K-teoría para llegar a la KK-teoría y finalmente a la kk-teoría, que describiremos un poco más detalladamente usando extensiones, en particular para el caso de c-álgebras.

Palabras Clave: *Extensión universal, álgebras localmente convexas*

1. *Sección Matemática, Departamento de Ciencias, PUCP.*

Prefacio

Estas articulo corresponde a una charla dada en el Congreso Internacional de Matemáticas PUCP el 2007.

1 Breve Historia de la K-teoría y la KK-teoría

La K-teoría para espacios topológicos fue introducida alrededor del año 1960. Para un espacio topológico X se define $V(X)$ como el conjunto de clases de isomorfismo de fibrados vectoriales sobre X. Con la suma de Whitney se convierte en un semigrupo abeliano. El grupo envolvente de $V(X)$ es $K^0(X)$, la K-teoría topológica de X en grado 0.

La K-teoría tuvo varias aplicaciones en topología algebraica, una de las más notables fue la solución del problema de campos vectoriales sobre esferas, obteniéndose que de las esferas S^n solamente S^1, S^3 y S^7 admiten campos vectoriales tangentes nunca nulos. Esto es equivalente a que el fibrado tangente sea trivial o también a que la esfera sea un H-espacio.

Una herramienta esencial en la topología algebraica es analizar álgebras en lugar de espacios topológicos, reemplazando un espacio X por el álgebra de funciones $C(X)$.

La K-teoría se pudo generalizar a la categoría de álgebras gracias al teorema de Serre-Swan, que establece para un espacio compacto X:

$$K^0(X) \cong K_0(C(X)).$$

Aquí para cada algebra A el grupo $K_0(A)$ es el grupo envolvente del semigrupo abeliano de módulos proyectivos finitamente generados sobre A. La imagen estándar de esta K-teoría se obtiene identificando tales módulos proyectivos con las imagenes de idempotentes en $M_\infty(A)$. Bajo esa identificación los fibrados vectoriales corresponden al semigrupo

$$V(A) = \{idempotentes\ en\ M_\infty(A)\}/\sim$$

Pro Mathematica, 21, 41-42 (2007), 13-24, ISSN 1012-3938

donde dos idempotentes son equivalentes si se pueden transformar el uno en el otro conjugando con un invertible.

Una de las aplicaciones importantes de la K-teoría para algebras es el teorema del índice de Atiyah y Singer. ($\sim$ 1968). En este caso el uso de la K-teoría nos permite simplificar el enunciado y la demostración del teorema de Atiyah-Singer.

Este teorema se puede reformular y entonces el problema básico es encontrar una aplicación bilineal

$$\langle Ell(M), K_1(C(M))\rangle \to \mathbb{Z} \tag{1.1}$$

que nos da el índice del operador eliptico $A \in Ell(M)$. Ejemplos de operadores elípticos son los operadores diferenciales de grado con matriz asociada invertible.

Esta formulación ya insinua la existencia de una teoría dual a la K-teoría, que para casos particulares fue mostrada por Brown, Douglas y Fillmore con la teoría Ext de extensiones alrededor del 1978.

$$Ext(X) \ni E \ :\ 0 \to \mathcal{K} \to E \to C(X) \to 0$$

es un grupo abeliano con la suma en M_2. La aplicación bilineal (1.1) se generaliza a

$$\langle Ext(X), K(X)\rangle \to \mathbb{Z}. \tag{1.2}$$

La introducción de la KK-teoría (Kasparov, $\sim$ 1980), una K-teoría bivariante para algebras C*, fue un paso importante en el desarrollo de la K-teoría. Esta teoría viene equipada con un producto

$$KK(A,B) \times KK(B,C) \to KK(A,C)$$

que hace de KK una categoría (que tiene como objetos las algebras C*). Para el caso particular $A = C = \mathbb{C}$ se tiene

$$KK(\mathbb{C},B) \times KK(B,\mathbb{C}) \to KK(\mathbb{C},\mathbb{C}).$$

Como además se tiene $KK(\mathbb{C}, B) = K_*(B)$, $KK(B, \mathbb{C}) = K^*(B)$ y $KK(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = \mathbb{Z}$, esto se puede escribir

$$K_*(B) \times K^*(B) \to \mathbb{Z}.$$

Como además hay una flecha natural $Ext(X) \to K^1(C(X))$, este producto generaliza todos los teoremas previos del tipo Atiyah-Singer para $B = C(X)$ y posibilita enunciar y demostrar muchos más de ese tipo.

Otra aplicación de la K-teoría para álgebras fue la clasificación de algebras AF (aproximadamente finitas) en 1977 por Elliott. Este resultado marcó el inicio de un extenso programa de clasificación de álgebras C* que usa las más avanzadas herramientas matemáticas. Un hito en este programa es la clasificación de las algebras puramente infinitas, separables, nucleares unitales (PISUN) a traves de la KK-teoría, lograda por Kirchberg y Phillips entre 1994 y 1997.

Otras aplicaciones de la KK-teoría son demostraciones de la conjetura de Novikov en ciertos casos. Esta conjetura fue la motivación inicial de Kasparov para introducir la KK-teoría y a grandes rasgos dice que ciertas signaturas son invariantes por homotopías.

Además la KK-teoría permite formular la conjetura de Baum Connes, que es una conjetura fuerte que dio lugar a un extenso programa de investigación. Su validez implica una serie de conjeturas en areas cercanas. Esta conjetura sobre la K-teoría del álgebra de un grupo se puede demostrar para algunos grupos construyendo elementos invertibles en $KK(C(T^*(X)), \mathbb{C})$.

2 Los Ingredientes de la Teoría Bivariante kk

La desventaja de la KK-teoría es el alto grado de complejidad, sobre todo en la construcción del producto. En el año 1987 Cuntz da en [2] una descripción más funtorial de KK que simplifica sobre todo la construcción del producto. En [3] en el año 1997 usando esta descripción construye la *kk*-teoría, que es una K-teoría bivariante para m-algebras, una clase grande de álgebras que incluye a las álgebras C*. Las m-álgebras son álgebras topológicas con la topología dada por seminormas submultiplicativas.

La misma construcción de [3] funciona para c-álgebras. En las c-álgebras, la multiplicación es aun conjuntamente continua, pero las seminormas no tienen que ser necesariamente submultiplicativas.

Los ingredientes principales son los siguientes:

1. Una noción de homotopía, en este caso la difeotopía. Dos homomorfismos de A a B son difeotópicos, si existe una familia $F_t : A \to B$ tal que $a \to F_t(a)$ es C^∞, para todo a.

2. $\mathcal{K}$ que es una compleción de las matrices infinitas $M_\infty(\mathbb{C})$ respecto a las normas que inducen el decrecimiento exponencial de los coeficientes en las matrices que converjan en ellas.

Proposición 2.1 *El conjunto $\langle A, B \otimes \mathcal{K} \rangle$ de clases de difeotopía de morfismos es un semigrupo abeliano con*

$$[f] + [g] = \left[\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \right] \in \langle A, M_2(K \otimes B) \rangle \cong \langle A, K \otimes B \rangle$$

Proposición 2.2 *La extension $0 \to JA \to TA \to A \to 0$ es universal split. Eso significa que si $\mathcal{E} : 0 \to I \to E \xrightarrow{p} A \to 0$ es una extension con un split $l : A \to E$, entonces existe un morfismo de extensiones:*

$$(1) \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & JA & \longrightarrow & TA & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \gamma\big\downarrow & & \varphi_l\big\downarrow & & \big\downarrow = & & \\ 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & E & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Demostración: Notemos que $Hom_{ev}(V, FB) \cong Hom_{alg}(TV, B)$, pues T es adjunto al funtor olvido F que asigna a cada álgebra el espacio vectorial subyacente. Para el caso particular V=A y $B = E$ obtenemos $Hom_{ev}(A, E) \cong Hom_{alg}(TA, E)$, y ahora llamamos φ_l al morfismo correspondiente al split l bajo este isomorfismo. Notemos que

$$\begin{tikzcd} TA \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "\pi_A"'] & TB \arrow[d, "\pi_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

conmuta si f es un homomorfismo de álgebras. Entonces, como se tiene $\varphi_l = \pi_E \circ Tl$, obtenemos que

$$p\varphi_l = p\pi_E \circ Tl = \pi_A TpTl = \pi_A T(pl) = \pi_A.$$

Por lo tanto el cuadrado de la derecha del diagrama (1) conmuta y obtenemos entonces el morfismo buscado $\gamma : JA \to I$, poniendo $\gamma = \varphi_l|_{JA}$ ■

La aplicación γ se llama la aplicación clasificante de la extension E.

Esta aplicación clasificante es única salvo difeotopias. Si l_1 es otro split, se tiene que $l \sim l_1$. Además se tiene que para una extension trivial $\gamma \sim 0$. Una extension es trivial si existe un split que a la vez es un homomorfismo de álgebras. Esto se ve directamente, comprobando que entonces

$$l\pi_A = \pi_E Tl = \varphi_l$$

pues entonces $\varphi_l|_{JA} = l \circ \pi_A|_{JA} = 0$ (ver diagrama).

$$\begin{tikzcd} JA \arrow[r, "j"] & TA \arrow[r, "\pi_A"] \arrow[d, "\varphi_l"'] & A \arrow[dl, "l"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

También se puede probar que si $\mathcal{E} : 0 \to I \to E \xrightarrow{p} A \to 0$ es una extension con un split $l : A \to E$, y $\alpha : B \to A$ es un morfismo, existe un morfismo de extensiones:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & JB \arrow[r] \arrow[d] & TB \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & I \arrow[r] & E \arrow[r] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

3 Yoneda, n-extensiones y Definición de kk

Se tiene que si A es una c-álgebra, entonces JA tambien es una c-álgebra. Podemos repetir la construcción para JA en lugar de A, y obtenemos que $J^2A = J(JA)$ también es una c-álgebra. Asi se puede continuar y obtener para cualquier n positivo la c-álgebra J^nA.

Dada dos extensiones se puede formar el producto Yoneda de estas extensiones si el cociente de una es isomorfa al núcleo de la otra. Vamos a concatenar por ejemplo dos extensiones:

$$\mathcal{E}_1 : \qquad 0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow E_1 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

$$\mathcal{E}_2 : \qquad 0 \longrightarrow I_2 \longrightarrow E_2 \longrightarrow I_1 \longrightarrow 0$$

obteniendo

$$\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 : \qquad 0 \longrightarrow I_2 \longrightarrow E_2 \longrightarrow E_1 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

Si además tenemos

$$\mathcal{E}_3 : \qquad 0 \longrightarrow I_3 \longrightarrow E_3 \longrightarrow I_2 \longrightarrow 0$$

podemos formar $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \times \mathcal{E}_3$ que es la secuencia exacta

$$0 \longrightarrow I_3 \longrightarrow E_3 \longrightarrow E_2 \longrightarrow E_1 \longrightarrow A \longrightarrow 0\,.$$

Una n-extensión se llama split si es el producto de n extensiones linealmente split.

Si $\mathcal{E} : \ 0 \to I \to E_n \to \cdots \to E_1 \to A \to 0$ es una n-extensión linealmente split, entonces construimos una aplicación clasificante $\gamma_{\mathcal{E}} : J^nA \to I$. Para esto consideremos los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I_1 \arrow[r] & E_1 \arrow[r] & A \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & JA \arrow[r] \arrow[u, "\gamma_1"] & TA \arrow[r] \arrow[u] & A \arrow[r] \arrow[u, "="] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I_2 \arrow[r] & E_2 \arrow[r] & I \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & J^2A \arrow[r] \arrow[u, "\gamma_2"] & TJA \arrow[r] \arrow[u] & JA \arrow[r] \arrow[u, "\gamma_1"] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I_{n-1} \arrow[r] & E_{n-1} \arrow[r] & I_{n-2} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & J^{n-1}A \arrow[r] \arrow[u, "\gamma_{n-1}"] & TJ^{n-2}A \arrow[r] \arrow[u] & J^{n-2}A \arrow[r] \arrow[u, "\gamma_{n-2}"] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I_n \arrow[r] & E_n \arrow[r] & I_{n-1} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & J^nA \arrow[r] \arrow[u, "\gamma_n"] & TJ^{n-1}A \arrow[r] \arrow[u] & J^{n-1}A \arrow[r] \arrow[u, "\gamma_{n-1}"] & 0
\end{tikzcd}$$

Finalmente ponemos $\gamma_{\mathcal{E}} := \gamma_n$.

Inspirados en la teoria Ext podemos definir ahora si la *kk*-teoría.

Definición 3.1

$$kk_*(A, B) = \varinjlim_{n,\varepsilon} \langle J^{2n+*}A, K \otimes B\rangle.$$

donde $\varepsilon : J^2A \to A \otimes K$ es la aplicación clasificante de la extensión $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$

con

$$\mathcal{E}_1 : 0 \to SA \to CA \to A \to 0$$

y

$$\mathcal{E}_2 : 0 \to K \otimes A \to T_0 \otimes A \to SA \to 0,$$

donde T_0 es el álgebra reducida de Toeplitz y SA,CA son la suspensión y el cono de A respectivamente.

Una n-extensión de B con ideal $K \otimes A$ nos provee de un elemento típico $[\gamma] \in kk_*(A, B)$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \otimes B \arrow[r] & E_n \arrow[r] & \dots \arrow[r] & A \arrow[r] & 0 \\ & J^n A \arrow[u, "\gamma"] & & & & \end{tikzcd}$$

4 Propiedades de la kk-Teoría

La construcción llevada a cabo por Cuntz está diseñada para cumplir con escisión y para que el producto sea fácilmente obtenible. La propiedad de escisión para kk significa que para cada extensión linealmente split de c-álgebras $0 \to I \to A \to B \to 0$ y cualquier otra c-álgebra D se tienen dos secuencias exactas

$$\begin{tikzcd} kk_0(D,I) \arrow[r] & kk_0(D,A) \arrow[r] & kk_0(D,B) \arrow[d] \\ kk_1(D,B) \arrow[u] \arrow[r] & kk_1(D,A) \arrow[r] & kk_1(D,I) \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} kk_0(B,D) \arrow[r] & kk_0(A,D) \arrow[r] & kk_0(I,D) \arrow[d] \\ kk_1(I,D) \arrow[u] & kk_1(A,D) \arrow[l] & kk_1(B,D) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

El producto, que en la definición de Kasparov es el mayor problema técnico, aquí corresponde al producto de Yoneda de extensiones. Si se tiene un par ([f], [g]) ordenado de $kk(A, B) \times kk(B, C)$ le queremos asignar un elemento de $kk(A, C)$. No podemos componer simplemente los representantes, porque el dominio de g no coincide con el rango de f:

$$f : J^m A \to B \otimes K\,, \quad g : J^n B \to C \otimes K.$$

Aplicamos el funtor J^n al primer morfismo y $- \otimes K$ al segundo para obtener:

$$J^n f : J^n J^m A \to J^n B \otimes K\,, \qquad g \otimes K : J^n B \otimes K \to C \otimes K \otimes K \cong C \otimes K$$

Ahora si se puede componer y la composición es por definición la clase del producto.

Esta construcción de la kk-teoría se puede llevar a cabo indistintamente en la categoría de m-álgebras y en la categoría de c-álgebras, tomando la extensión universal de m-álgebras o la la extensión universal de c-álgebras, respectivamente. Sin embargo en la kk-teoría de m-álgebras se puede probar además que

$$kk_*^{(m)}(\mathbb{C}, A) \cong K_*(A)$$

para álgebras de Fréchet, donde la K-teoría es la de Phillips que coincide con la K-teoría usual en álgebras de Banach. En el caso de la kk-teoría de c-álgebras solamente tenemos la conjetura:

$$kk_*^{(c)}(\mathbb{C}, A) \cong K_*(A)$$

para toda m-álgebra.

Seria ya un gran progreso si se supiera que esto vale para $\mathbb{C}$, pues entonces vale para una clase C de álgebras que se puede construir desde $\mathbb{C}$ usando sumas directas, secuencias exactas y equivalencias por difeotopía. En particular esta clase incluye las variedades diferenciales (Comparar con [7, §8.2]). La expresion $K_*(A)$ es la usual si A es un álgebra de Banach, la K-teoría de Phillips si A es un álgebra de Frechet y $kk_*^m(\mathbb{C}, A)$, la K-teoría de Cuntz para m-álgebras, si A es una m-álgebra.

Una de las aplicaciones de la kk-teoría para c-álgebras es el cálculo de la K-teoría de las álgebras de Weyl, hecho por Cuntz en [4].

Definición 4.1 *W es el álgebra unital generado por dos elementos x,y con la relación* $[x,y] = 1$.

W no es una m-álgebra, por lo cual no se puede utilizar ninguna de las K-teorías anteriores, pero si una c-álgebra. Existe una extensión $0 \to S\mathbb{C} \to W' \to W \to 0$ con $W' \simeq 0$. Usando escisión se puede probar que $W \overset{kk}{\simeq} \mathbb{C}$, considerando la propiedad de escision para la extensión dada y para la extensión $0 \to S\mathbb{C} \to C\mathbb{C} \to \mathbb{C} \to 0$. Si supiéramos que $kk_*^{(c)}(\mathbb{C},\mathbb{C}) \cong K_*(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$ ya tendríamos la K-teoría de W. Cuntz y Thom definen en [5] una teoría bivariante con ayuda de un ideal J de los operadores compactos:

$$kk_J(A,B) := kk^{(c)}(A, B \otimes J).$$

Para esta teoría se cumple $kk_J(\mathbb{C},\mathbb{C}) \cong K_*(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$ y también tiene propiedades funtoriales de escisión y facilidad para construir el producto. Por lo tanto para esta teoría se puede calcular $kk_J(\mathbb{C}, W) \cong \mathbb{Z}$. Sin embargo la conjetura

$$kk_*^{(c)}(\mathbb{C}, A) \cong K_*(A)$$

permanece como problema abierto.

Referencias

[1] B. Blackadar, *K-theory for Operator Algebras.* (2. Ed) Cambridge University Press (1998)

[2] J. Cuntz, *A new look at KK-theory.* K-theory 1, 31-52 (1987)

[3] J. Cuntz, *Bivariante K-Theorie für lokalkonvexe Algebren und der Chern -Connes-Character.* Doc. Math. J. DMV 2 (1997) 213-261

[4] J. Cuntz, *Bivariant K-theory and the Weyl algebra.* K-Theory 35, no. 1-2, 93-137.(2005)

[5] J. Cuntz, A. Thom, *Algebraic K-theory and locally convex algebras.* Mathematische Annalen 334, 339-371 (2006)

[6] C. Phillips, *K-theory for Fréchet algebras*. International Journal of Mathematics vol. 2 no. 1 (1991), 77-129

[7] M. Puschnigg, *Diffeotopy functors of ind-algebras and local cyclic cohomology*. Docum. Math. J. 8, 143-245 (electronic), 2003

[8] C. Valqui, *Universal extension and excision for topological algebras*. K-theory 22 (2001), 1/2 pág.145-160

[9] C. Valqui, *Construcción de una K-teoría bivariante para c-álgebras*. Mosaico Cient vol.3 no.2 (2006)

Abstract

We review the history of K-theory leading to the bivariant KK-theory and finally to kk-theory, which we describe in more detail using extensions, particularly in the case of c-algebras.

Keywords: Universal Extension, locally convex algebras

Christian Valqui
Sección Matemática, Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú
`cvalqui@pucp.edu.pe`