WEBS PLANARES

Andrés Beltrán[1,2]

Noviembre, 2007

Resumen

Este artículo se inicia describiendo el problema fundamental de la geometría de webs, dando asimismo algunos resultados clásicos de esta teoría. Finalmente, se describe la estructura del espacio de relaciones abelianas de webs planares que admiten automorfismo infinitesimal. Como resultado de esto se obtienen algunas consecuencias.

Palabras Clave: *Foliaciones, webs*

[1] *Andrés Beltrán*

[2] *Parcialmente financiado por el proyecto DAI-3492.*

La geometría de webs es el estudio de familias de foliaciones que se encuentran en posición general, es decir que las hojas de las diferentes foliaciones comparten la misma dimensión y sus respectivos espacios tangentes forman una familia de rango maximal es el espacio ambiente. Nuestro interés se restringe al estudio de foliaciones analíticas complejas definidas en una vecindad del origen en $\mathbb{C}^2$.

Sea M una variedad compleja de dimensión m y $0 < n < m$. Una **foliación holomorfa no singular** de codimensión n sobre M es un atlas analítico $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ para M, que es maximal respecto a las siguientes propiedades

i) Para cada $i \in I$, $\varphi_i : U_i \longrightarrow A_i \times B_i$ es un biholomorfismo, donde A_i y B_i son polidiscos abiertos en $\mathbb{C}^{m-n}$ y $\mathbb{C}^n$, respectivamente.

ii) Si $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j) \in \mathcal{A}$ con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces

$$\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

es de la forma

$$\varphi_{ij}(z, w) = (\xi_{ij}(z, w), \eta_{ij}(w)),$$

donde $(z, w) \in \mathbb{C}^{m-n} \times \mathbb{C}^n$ y ξ_{ij}, η_{ij} son mapeos holomorfos en $\mathbb{C}^{m-n}$ y $\mathbb{C}^n$, respectivamente.

Denotemos por $O = \mathbb{C}\{x, y\}$ el anillo de series de potencias convergentes en dos variables. Un k**−web no singular** en $(\mathbb{C}^2, 0)$, denotado por $\mathcal{W}(k)$, es definido por una familia de de hojas que son gérmenes de curvas de conjuntos de nivel $F_i(x, y) = Cte$, donde $F_i \in O$ verifican

$$F_i(0) = 0, \quad dF_i(0) \wedge dF_j(0) \neq 0, \text{ para } 1 \leq i < j \leq k.$$

Los campos vectoriales de las foliaciones $\mathcal{F}_i$ vienen dados por

$$X_i = \partial_y(F_i)\partial_x - \partial_x(F_i)\partial_y, \quad 1 \leq i \leq k,$$

o equivalentemente, los $\mathcal{F}_i$ vienen dados por los 1−formas

$$w_i = \partial_x(F_i)\, dx + \partial_y(F_i)\, dy, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Particularmente, cada F_i es una submersión.

Un **germen de k−web** sobre $(\mathbb{C}^2, 0)$, denotado por $\mathcal{W} = \mathcal{F}_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{F}_k$, es una colección de k gérmenes de foliaciones holomorfas en posición general.

Ejemplo 1. Los conjuntos de nivel de las funciones F_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, donde

$$F_1(x,y) = x, \quad F_2(x,y) = y, \quad F_3(x,y) = x + y,$$

definen un 3−web sobre $\mathbb{C}^2$.

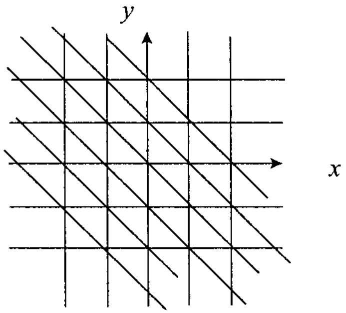

Figura 1: 3−web

Uno de los problemas fundamentales de la teoría de webs es el de su clasificación local, módulo gérmenes de difeomorfismos. Como éstos son objetos geométricos es de interés saber reconocer cuando dos webs del mismo orden son analíticamente equivalentes, esto es, si $\mathcal{W}(k), \mathcal{W}'(k)$ son dos k−webs sobre U y V respectivamente, se desea averiguar si existen puntos $p \in U$, $q \in V$ y un germen de difeomorfismo $\phi : (U, p) \longrightarrow (V, q)$ que transforma $\mathcal{W}(k)$ en $\mathcal{W}'(k)$ en una vecindad de p.

En el plano, por ejemplo, es conocido que un campo vectorial alrededor de una vecindad de un punto no singular es rectificable, es decir existe un sistema de coordenadas locales en el que las curvas integrales del campo son rectas.

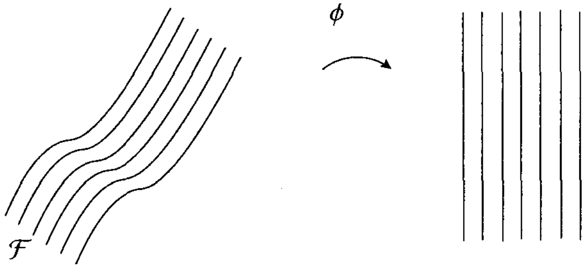

Figura 2: $\mathcal{W}(1) = \{\mathcal{F}\}$ paralelizable

Lo mismo sucede si se tienen dos campos vectoriales en las proximidades de una vecindad de un punto donde sus hojas son transversales, se puede encontrar, gracias al teorema de inversión local, coordenadas que rectifican en forma simultáneamente los dos campos,

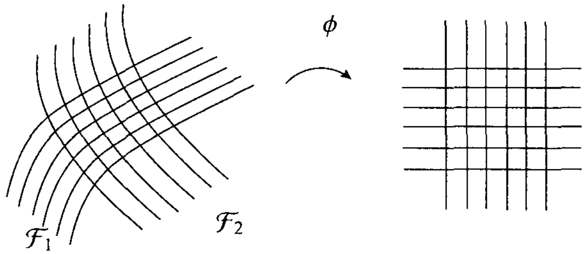

Figura 3: $\mathcal{W}(2) = \{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2\}$ paralelizable

Desde este punto de vista los 1−webs y 2−webs no son interesantes. El caso interesante sucede a partir de $k \geq 3$.

Se dice que un web es **paralelizable** si es analíticamente equivalente a un web cuyas foliaciones tienen sus hojas paralelas. Por ejemplo, $\mathcal{W}(1)$ y $\mathcal{W}(2)$ son paralelizables.

Thomsen junto con W. Blaschke identificaron que la configuración de 3 foliaciones del plano definidas por curvas tiene invariante local:

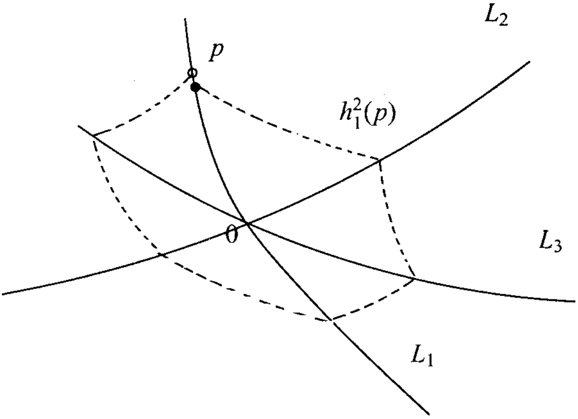

Figura 4: Web hexagonal

Suponga que que se tienen 3 foliaciones $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ y $\mathcal{F}_3$ sobre $(\mathbb{C}^2, 0)$ en posición general. La hoja L_3 de la foliación $\mathcal{F}_3$ pasando por p intercepta L_2, hoja de $\mathcal{F}_2$ en un punto que denotamos por $h_1^2(p)$. Se verifica que la aplicación

$$\begin{array}{rccc} h_1^2: & (L_1, 0) & \longrightarrow & (L_2, 0) \\ & p & \longmapsto & h_1^2(p) \end{array}$$

define un germen holomorfo. Generalizando este proceso, si i, j, k son tales que $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ se desplazan a lo largo de las hojas de $\mathcal{F}_i$, es posible asociar a cada punto p de L_j, suficientemente próximo de 0, un punto $h_j^k(p)$ de L_k.

$$\begin{array}{rccc} h_j^k: & (L_j, 0) & \longrightarrow & (L_k, 0) \\ & p & \longmapsto & h_j^k(p) \end{array},$$

de manera que al componerlas se obtiene un germen de aplicación

$$H = h_3^1 \circ h_2^3 \circ h_1^2 \circ h_3^1 \circ h_2^3 \circ h_1^2 : (L_1, 0) \longrightarrow (L_1, 0)$$

Para $p \in L_1$, la imagen $q = H(p)$ de p mediante H es obtenido formando un hexágono.

Cuando todos esos hexágonos estan cerrados, para cualquier punto O y cualquier punto vecino P sobre la primera curva pasando por O, el web es llamado **hexagonal**, equivalentemente, diremos que un 3−web es hexagonal si el germen H es la identidad.

En 1927 Thomsen resuelve el problema de cuando un web es paralelizable para $k = 3$, afirmando que un 3−web es paralelizable si es hexagonal.

Posteriormente Blaschke y Dubordie muestran la manera de cómo asociar a todo 3− web de $(\mathbb{C}^2, 0)$ una curvatura:
Suponga que w_1, w_2 y w_3 son 1−formas no singulares e integrables que definen $\mathcal{W}(3)$. Como los w_i están en posición general, entonces existen ρ_2, $\rho_3 \in \mathcal{O}^*$ verificando

$$w_1 = \rho_2\, w_2 + \rho_3\, w_3.$$

Asimismo, como w y ρw, con $\rho \in \mathcal{O}^*$, definen la misma foliación, puede suponerse que la elección de los w_i sea normalizada, es decir $w_1 + w_2 + w_3 = 0$.

De la última relación se obtiene que

$$\Theta = w_1 \wedge w_2 = w_2 \wedge w_3 = w_3 \wedge w_1$$

es la 2−forma no singular que genera Ω^2.

Por otro lado, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ se tiene que

$$w_i = g_i\, dF_i, \quad \text{con } g_i \in \mathcal{O}^*,\ F_i \in \mathcal{O},\ dF_i(0) \neq 0.$$

El hecho que los w_i se encuentren en posición general, el lema de G.

Cartan [1] y unas cuentas sencillas permiten definir una forma de Pfaff por

$$\gamma = \frac{dg_1}{g_1} - (f_1 - f_2)w_1 = \frac{dg_2}{g_2} + (f_2 - f_3)w_2 = \frac{dg_3}{g_3} - f_2 w_3,$$

donde $f_i \in O$.

Además, se tiene que

$$dw_i = \gamma \wedge w_i, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Se llama **Curvatura de Blaschke** asociada al web $\mathcal{W}(3)$ a la 2−forma, denotada por $\mathcal{K}$, definida por

$$\mathcal{K} = d\gamma.$$

Según lo anterior $\mathcal{K}$ es un invariante del 3−web $\mathcal{W}(3)$.

Como la 2−forma Θ es no singular se tiene que

$$dw_i = h_i \Theta, \quad i \in \{1, 2, 3\},$$

asimismo, se verifica que

$$\gamma = h_1\, w_2 - h_2\, w_1 = h_3\, w_2 - h_2\, w_3 = h_1\, w_3 - h_3, w_1.$$

Un resultado emblemático de la teoría de webs desarrollada por Blaschke, Thomsen y sus colaboradores aparece resumido en el siguiente teorema

Teorema 1. *Si* $\mathcal{W} = \mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2 \boxtimes \mathcal{F}_3$ *es un* 3−*web sobre* $(\mathbb{C}^2, 0)$ *entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. $\mathcal{W}$ es hexagonal

---

[1] Lema de Cartan: Sean $T_1, \cdots T_k \in V^*$ linealmente independientes. Suponga que $S_1, \cdots S_k \in V^*$ son tales que $T_1 \wedge S_1 + \cdots + T_k \wedge S_k = 0$ entonces

$$S_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} T_j, \; a_{ij} = a_{ji}$$

2. $\mathcal{W}$ es de curvatura nula.

3. $\mathcal{W}$ admite una relación no trivial, esto es, existen 1−formas cerradas α_i definiendo $\mathcal{F}_i$, para $i = 1, 2, 3$, tal que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$.

4. $\mathcal{W}$ es paralelizable, esto es $\mathcal{W}$ es equivalente al web definido por los conjuntos de nivel de las funciones $x, y, x + y$.

Ejemplo 2. El 3−web $\mathcal{W}(3) = \{x, y, x + y\}$ definido en el ejemplo 1 tiene curvatura nula. En efecto, es claro que este web es definido por las 1−formas

$$w_1 = dx,\ w_2 = dy,\ w_3 = -(dx + dy),$$

las que están normalizadas. Asimismo, es claro que $\Theta = dx \wedge dy$.

Por otro lado, al calcular dw_i se obtiene que los $h_i = 0$ para cada $i = 1, 2, 3$. Esto prueba que $\gamma = 0$, y por lo tanto $\mathcal{K} = 0$. Luego, según el teorema anterior el web $\mathcal{W}(3)$ es hexagonal.

Ejemplo 3. Sea $\mathcal{W}(3)$ un 3−web definido en $(\mathbb{C}^2, 0)$, donde

$$w_1 = (x+5)dx + 2ydy, \quad w_2 = ydx + 3dy, \quad w_3 = -(x+y+5)dx - (3+2y)dy.$$

Es claro que los w_i estan normalizados, es decir $w_1 + w_2 + w_3 = 0$.
Además, $\Theta = w_1 \wedge w_2 = w_2 \wedge w_3 = w_3 \wedge w_1 = (3x+15-2y^2)dx \wedge dy$. Asimismo, se tiene

$$dw_1 = h_1\Theta, \quad dw_2 = h_2\Theta, \quad dw_3 = h_3\Theta,$$

donde $h_1(x,y) = 0,\ h_2(x,y) = h_3(x,y) = \dfrac{-1}{3x - 2y^2 + 15}$ son holomorfas en una vecindad del cero en $\mathbb{C}^2$.

Por otro lado,

$$\gamma = \frac{-(x+5)}{(3x - 2y^2 + 15)}\, dx + \frac{-2y}{3x - 2y^2 + 15}\, dy,$$

entonces

$$\mathcal{K} = d\gamma = \frac{4xy + 26y}{(3x - 2y^2 + 15)^3}\, dx \wedge dy,$$

de esta manera, $\mathcal{K}$ no es identicamente nula, por lo tanto el 3−web definido por w_1, w_2, y w_3 no es hexagonal.

Otro invariante para los webs planares, es **el rango de un web**, que se construye a partir de ciertas ecuaciones funcionales. El **conjunto de relaciones abelianas** asociada a un web $\mathcal{W}$, cuya definición es sugerida por la parte (3) del teorema 1, es caracterizado por la familia de k 1−formas $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ verificando las siguientes condiciones

(i) El espacio tangente de la hoja de la foliación $\mathcal{F}_i$ en un punto $(x, y) \in U$ está en el núcleo de $\alpha_i(x, y)$, es decir, $\alpha_i \wedge w_i = 0$,

(ii) Las 1−formas α_i son cerradas, y

(iii) La suma $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k$ es cero.

y se denota por $\mathcal{A}(k)$ o $\mathcal{A}(\mathcal{W})$, esto es

$$\mathcal{A}(\mathcal{W}) = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in (\Omega^1(\mathbb{C}^2, 0))^k : d\alpha_i = 0,\ \alpha_i \wedge w_i = 0 \text{ y } \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0\},$$

donde $\mathcal{F}_i$ es inducido por las 1−formas w_i.

Observación 1. Sea $\mathcal{W}(k) = \{\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_k\}$ un k−web sobre un dominio $U \subset \mathbb{C}^2$. Se sabe que localmente, cada foliación $\mathcal{F}_i$ puede describirse por medio de una integral primera, esto es una función holomorfa $F_i : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ que es constante sobre las curvas integrales de $\mathcal{F}_i$ contenidas en U. Si p es un punto de U, entonces existe una submersión $F_i : (\mathbb{C}^2, p) \longrightarrow (\mathbb{C}, p)$ tal que en una vecindad de p, las hojas de $\mathcal{F}_i$ corresponden a los conjuntos de nivel $\{F_i = \text{Cte}\}$.

Con estas notaciones una **ecuación abeliana** de $\mathcal{W}(k)$ es una relación diferencial de la forma

$$\sum_{i=1}^{k} g_i(F_i) dF_i = 0,$$

donde $g_i : (\mathbb{C}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$, y el conjunto de relaciones abelianas de $\mathcal{A}(\mathcal{W})$ queda descrito por

$$\mathcal{A}(\mathcal{W}) = \{(g_1(F_1)dF_1, \ldots, g_k(F_k)dF_k) : \sum_{i=1}^{k} g_i(F_i)dF_i = 0\}.$$

Ejemplo 4. Una relación abeliana para el 3−web del ejemplo 1 es dada por la siguiente expresión,

$$dx + dy - d(x + y) = 0.$$

G. Bol y W. Blaschke en 1932 probaron que el conjunto de relaciones abelianas, denotado por $\mathcal{A}(\mathcal{W})$, es un $\mathbb{C}$ espacio vectorial finito dimensional, cuya dimensión, llamado **rango** de $\mathcal{W}$, queda controlado por la expresión $\pi(k, 2) = \frac{1}{2}(k - 1)(k - 2)$, esto es

$$rk(\mathcal{W}) \leq \frac{1}{2}(k - 1)(k - 2).$$

Diremos que $\mathcal{W}(k)$ es un **web de rango maximal** si

$$rk(\mathcal{W}) = \pi(k, 2).$$

El rango de un web es un invariante de él, es decir depende del web y no de la elección de las funciones que la definen, pues dos de tales familias de hojas dan lugar a dos espacios de relaciones abelianas isomorfos.

Ejemplo 5. El rango de un 3−web $\mathcal{W}$ verifica

$$rk(\mathcal{W}) \leq \frac{1}{2}(3 - 1)(3 - 2) = 1,$$

es decir el rango de $\mathcal{W}$ es 1 o 0.

Ejemplo 6. $\mathcal{W}(x, y, x + y)$ es un 3−web con $rk(\mathcal{W}) = 1$, pues admite una relación abeliana no trivial,

$$dx + dy - d(x + y) = 0.$$

Ejemplo 7. El 3−web $\mathcal{W}\left(x, y, \frac{y}{x}\right)$ es de rango 1, pues se tiene la siguiente relación funcional,

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-1} d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{y}\,dy,$$

que es una relación abeliana de este web.

Antes de dar el siguiente ejemplo recordemos que si V es un espacio vectorial de dimensión vectorial $n+1$, $P(V)$ o simplemente $\mathbb{P}$ es el espacio proyectivo obtenido al considerar las rectas vectoriales de V. Procediendo en forma similar se obtiene el espacio proyectivo asociado al dual V^* de V, denotado por $\check{\mathbb{P}}$.

Ejemplo 8 (Web algebraico). Sea C una curva algebraica, reducida de $\mathbb{P}^2$ de grado k.

Construiremos un k−web en un abierto de $\check{\mathbb{P}}^2$. En efecto, sea $\xi \in \check{\mathbb{P}}^2$ y consideremos su recta dual $D(\xi) \subseteq \mathbb{P}^2$. Supongamos que $D(\xi)$ corta transversalmente a C en los puntos $p_1(\xi), \ldots, p_k(\xi)$. Las aplicaciones $p_i(\xi)$ están definidas en un abierto de $\check{\mathbb{P}}^2$. Las rectas duales $\check{p}_i(\xi)$ de cada punto $p_i(\xi)$ pasan por el punto ξ. El web $\mathcal{W}_C$ en un abierto de $\check{\mathbb{P}}^2$, cuyas hojas son las rectas $\check{p}_i(\xi)$, es el web asociado a la curva C.

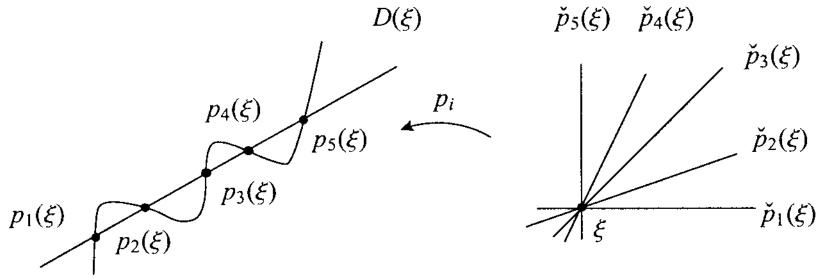

Figura 5: Web algebraico

En este caso, se dice que $\mathcal{W}_C$ ha sido obtenido por dualidad proyectiva y es llamado **web algebraico**. Si C no contiene ninguna recta, las hojas de $\mathcal{W}_C$ son las tangentes a la curva dual $\check{C} \subset \check{\mathbb{P}}^2$ de C, donde la curva dual $\check{C}$ es la curva formada por las rectas tangentes a C.

Un problema de interés es la caracterización de webs de rango maximal. Existen dos resultados fundamentales en ese sentido. El primero es una interpretación, debido a Blaschke, del teorema de Adición de Abel en términos de webs.

Teorema 2 (Blaschke). *Todo web algebraico $\mathcal{W}_C$ es de rango maximal.*

Prueba. Sea w_C el haz dualizante de C (en el caso liso w_C es el haz de las 1 formas holomorfas en C). El género aritmético $p_a(C)$ de C es $\frac{1}{2}(k-1)(k-2)$ y esto igual a $\pi(k,2)$ que coincide con la dimensión de $H^0(C, w_C)$.

Sea $w \in H^0(C, w_C)$. Asimismo, sea z_i una coordenada local en una vecindad U_i de $p_i(\xi)$ en C. Las hojas de $\mathcal{W}_C$ vienen dada por $z_i \circ p_i = cte$. Asimismo, se tiene la 1−forma $w = g_i\, dz_i$ en U_i. El teorema de Abel demuestra que

$$\sum_{i=1}^{k} p_i^*(w) = 0.$$

Dado que $p_i^*(g_i\, dz_i) = g_i \circ p_i\, d(z_i \circ p_i)$ se tiene que $(g_i \circ p_i)_i$, para $i = 1, \ldots, k$ es una relación abeliana de $\mathcal{W}_C$, entonces se ha construido el siguiente homomorfismo de grupos

$$\begin{array}{ccc} H^0(C, w_C) & \longrightarrow & \mathcal{A}(\mathcal{W}) \\ w & \longmapsto & (g_i \circ p_i)_i \end{array},$$

gracias al teorema de identidad de funciones holomorfas, tal homomorfismo es inyectivo. Asimismo, dado que la dimensión de $\mathcal{A}(\mathcal{W})$ es menor o igual a $\pi(k,2)$, que coincide con la dimensión de $H^0(C, w_C)$, el homomorfismo anterior es un isomorfismo.

Diremos que un web $\mathcal{W}$ es llamado **algebrizable** si es analíticamente equivalente a algún $\mathcal{W}_C$.

El problema recíproco presentado por Blaschke y Howe es descrito como el recíproco del teorema de Abel: **¿Cuando un k–web de rango maximal es algebraico?**

Lie fue el pimero en responder esta pregunta demostrando que todos los 4–webs son algebrizables. Posteriormente Blaschke (1930) pensó que había extendido el resultado de Lie, sin embargo, no mucho tiempo después en 1936 Bol dio un contraejemplo de un 5–web de rango máximo 6 cuyas hojas no pueden ser mapeadas en lineas rectas mediante un cambio de coordenadas.

$$\mathcal{W}\left(x, y, \frac{y}{x}, \frac{1-y}{1-x}, \frac{x-xy}{y-xy}\right).$$

Las seis relaciones abelianas para el web propuesto por Bol son,

$$\begin{array}{rcl}
\ln u_1 - \ln u_2 - \ln u_3 & = & 0 \\
\ln(1-u_1) - \ln(1-u_3) + \ln(1-u_5) & = & 0 \\
\ln u_3 + \ln u_4 - \ln u_5 & = & 0 \\
\ln(1-u_1) - \ln(1-u_2) + \ln u_4 & = & 0 \\
\ln \dfrac{1-u_1}{u_1} - \ln \dfrac{1-u_3}{u_3} + \ln(1-u_4) & = & 0 \\
I(u_1) - I(u_2) - I(u_3) - I(u_4) + I(u_5) & = & 0,
\end{array}$$

donde

$$u_1(x,y) = x,\ u_2(x,y) = y,\ u_3(x,y) = \frac{x}{y},\ u_4(x,y) = \frac{1-y}{1-x},$$

$$u_5(x,y) = \frac{x-xy}{y-xy} \text{ y}$$

$$I(u) = -\int_0^u \left(\frac{\ln|1-u|}{u} - \frac{\ln|u|}{1-u}\right) du + \frac{1}{2}\ln u \ln(1-u) - \frac{\pi^2}{6},$$

con $0 < u < 1$.

Un web de rango maximal no algebrizable es llamado **web excepcional.**

Antes de los trabajos de [5] y [3] no existen muchos ejemplos de webs excepcionales en la literatura. Los siguientes webs son algunos ejemplos dado por Robert (ver [5]),

$$\begin{cases} \mathcal{W}(x, y, x + y, x - y, x^2 + y^2) \\ \mathcal{W}(x, y, x + y, x - y, x^2 - y^2) \\ \mathcal{W}(x, y, x + y, x - y, e^x + e^y) \end{cases}$$

A continuación se da una caracterización del espacio de relaciones abelianas de un web planar y las consecuencias que se obtiene al considerar un web con tales características.

Consideremos un k−web regular $\mathcal{W} = \mathcal{F}_1 \boxtimes \ldots \boxtimes \mathcal{F}_k$ sobre $(\mathbb{C}^2, 0)$ que admite un automorfismo infinitesimal X, esto significa que el campo vectorial X es un automorfismo infinitesimal de $\mathcal{W}$, y por lo tanto de cada $\mathcal{F}_i$, algebraicamente significa que $\mathcal{L}_X w_i \wedge w_i = 0$, geométricamente significa que la foliación $\mathcal{F}_i$ es preservada por el flujo local de X.

Por otro lado, suponga que X es transversal, entonces es transversal a cada foliación $\mathcal{F}_i$, esto es, en una vecindad del origen, se tiene que $w_i(X) \neq 0$, geométricamente, esto significa que las órbitas de X no están contenidas en las hojas de $\mathcal{F}_i$.

Si X es un automorfismo infinitesimal transversal a $\mathcal{F}$ entonces se cumple

(i) La 1−forma $\eta_i = \dfrac{w_i}{w_i(X)}$ es cerrada .
En efecto, por condición se sabe que $\mathcal{L}_X w_i \wedge w_i = 0$, entonces de la fórmula de Cartan resulta,

$$(d(i_X w_i) + i_X dw_i) \wedge w_i = 0,$$

entonces

$$dw_i(X) \wedge w_i + i_X(dw_i) \wedge w_i = 0, \tag{1}$$

Se sabe que $w_i \wedge dw_i = 0$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= i_X(w_i \wedge dw_i) = i_X w_i \wedge dw_i - w_i \wedge i_X(dw_i) \\ &= w_i(X)dw_i - w_i \wedge i_X(dw_i), \end{aligned}$$

esto es, $w_i(X)dw_i = w_i \wedge i_X(dw_i)$. Luego, al reemplazar esto en (1) se tiene

$$w_i(X)dw_i = w_i \wedge dw_i(X)$$

Por lo tanto,

$$d\eta_i = d\left(\frac{w_i}{w_i(X)}\right) = \frac{w_i \wedge dw_i(X) - w_i(X)dw_i}{w_i(X)^2} = 0.$$

(ii) $\mathcal{L}_X\eta_i = 0$.
$\mathcal{L}_X\eta_i = (i_X \circ d + d \circ i_X)\eta_i = i_X(d\eta_i) + d(i_X\eta_i) = d\eta_i(X) = 0.$

Como la derivada de Lie $\mathcal{L}_X$ es lineal y conmuta con el operador d, entonces se induce la aplicación lineal

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{L}_X : & \mathcal{A}(\mathcal{W}) & \longrightarrow & \mathcal{A}(\mathcal{W}) \\ & (\eta_1, \ldots, \eta_k) & \longmapsto & (\mathcal{L}_X\eta_1, \ldots, \mathcal{L}_X\eta_k) \end{array},$$

Para $i \in \{1, \ldots, k\}$ fijo denotemos por $\mathcal{A}^i(\mathcal{W})$ el subespacio vectorial de $\Omega^1(\mathbb{C}^2, 0)$ generado por la i–ésima componente α_i de las relaciones abelianas $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathcal{A}(\mathcal{W})$.

Si $u_i = \displaystyle\int \eta_i$ denota la integral primera canónica de $\mathcal{F}_i$ con respecto a X, entonces para $\alpha_i \in \mathcal{A}^i(\mathcal{W})$ existe un germen holomorfo $f_i \in \mathbb{C}\{t\}$ tal que

$$\alpha_i = f_i(u_i)\, du_i.$$

Suponga que $\mathcal{A}^i(\mathcal{W})$ es no trivial y sea

$$\{\alpha_i^\nu = f_\nu(u_i)\, du_i : \nu = 1, \ldots, n_i\}$$

una base.

Desde que $\mathcal{L}_X : \mathcal{A}^i(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathcal{A}^i(\mathcal{W})$ es una aplicación lineal, existen constantes complejas $c_{\nu\mu}$, tal que para $\nu = 1, \ldots, n_i$ tenemos

$$\mathcal{L}_X(\alpha_i^\nu) = \sum_{\mu=1}^{n_i} c_{\nu\mu}\alpha_i^\mu = \sum_{\mu=1}^{n_i} c_{\nu\mu} f(u_i)\, du_i. \tag{2}$$

Pero

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X(\alpha_i^\nu) &= \mathcal{L}_X(f_\nu(u_i)\, du_i = \mathcal{L}_X(f_\nu(u_i))\, du_i + f_\nu(u_i)\mathcal{L}_X(du_i)\\ &= X(f_\nu(u_i))\, du_i + f_\nu(u_i)\mathcal{L}_X(v_i)\\ &= f_\nu'(u_i)\, du_i,\end{aligned}$$

para cualquier ν, de manera que de este resultado y de (2) se obtiene,

$$f_\nu{}' = \sum_{\mu=1}^{n_i} c_{\nu\mu} f_\mu, \qquad \nu = 1, \ldots, n_i. \tag{3}$$

lo cual es equivalente a

$$\frac{d}{dt}(f(t)) = Cf(t),$$

cuya solución es de la forma $f(t) = e^{tC} f(0)$.

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_\tau$ son autovalores de $\mathcal{L}_X : \mathcal{A}(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{W})$, entonces existe una base de $\mathcal{A}(\mathcal{W})$ tal que C está en la forma de Jordan. Luego, existe una base de $\mathcal{A}(\mathcal{W})$ de la forma

$$\{(C_i^{s,n_i} u_i^{n_i-1} e^{\lambda_s \mu_i} du_i)_i\}_{s,n}, \quad s = 1, \ldots, \tau,\ n_i = 1, \ldots, \dim\mathcal{A}_s(\mathcal{W}) = \sigma_i,$$

donde $\mathcal{A}_s(\mathcal{W})$ es el subespacio asociado a autovalor λ_s de $\mathcal{L}_X$. Esto permite caracterizar las relaciones abelianas de un k−web sobre $(\mathbb{C}^2, 0)$.

Teorema 3. *Las relaciones abelianas de un k−web*

$$\mathcal{W} = \mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2 \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{F}_k$$

son de la forma

$$P_1(u_1)e^{\lambda_i u_1}\, du_1 + \ldots + P_k(u_k)e^{\lambda_i u_k}\, du_k = 0,$$

donde $P_1, \ldots, P_k$ *son polinomios de grado menor o igual a* $\sigma_i - 1$ *y* $\lambda_1, \ldots, \lambda_\tau \in \mathbb{C}$ *los autovalores de* $L_X : \mathcal{A}(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{W})$ *correspondientes a los autoespacios maximales de dimensiones* $\sigma_1, \ldots, \sigma_\tau$.

Teorema 4. *Sea* $\mathcal{W}$ *un k–web que admite un automorfismo infinitesimal transversal X. Entonces*

$$rk(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X) = rk(\mathcal{W}) + (k-1).$$

En particular, $\mathcal{W}$ *es de rango maximal si y solamente si* $\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X$ *es de rango maximal.*

Prueba. Sea $\mathcal{W} = \mathcal{F}_1 \boxtimes \ldots \boxtimes \mathcal{F}_k$, donde cada $\mathcal{F}_i$ es definida por la 1–forma $w_i = 0$, para $i = 1, \ldots, k$. Como X es un automorfismo infitesimal y transversal a $\mathcal{W}$ se tiene que:

Las 1–formas $\dfrac{w_i}{w_i(X)}$ son cerradas y $\mathcal{L}_X\left(\dfrac{w_i}{w_i(X)}\right) = 0$, donde $\mathcal{L}_X : \mathcal{A}(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{W})$. Por lo tanto, existen integrales primeras canónicas de $\mathcal{F}_i$ respecto a X,

$$u_i = \int \frac{w_i}{w_i(X)}$$

verificando las siguientes propiedades

(i) $\mathcal{L}_X u_i = 1$.

(ii) $du_i = \dfrac{w_i}{w_i(X)}$.

Afirmación 1: Denotemos por $x : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ la integral primera de la foliación

$$\mathcal{F}_X : \; w = dx = 0.$$

Cuando j varía de 2 a k se tiene

(i) $i_X(du_1 - du_j) = 0$.

(ii) $\mathcal{L}_X(du_1 - du_j) = 0$.

Por lo tanto, existe $g_j \in \mathbb{C}\{x\}$ tal que

$$du_1 - du_j - g_j(x)\,dx = 0, \qquad j = 2, 3, \ldots, k.$$

En efecto, en el primer caso:

$$i_X(du_1 - du_j) = i_X(du_1) - i_X(du_j) = du_1(X) - du_j(X) = 0.$$

El segundo caso es inmediato, pues $\mathcal{L}_X(du_j) = 1$.

Veamos ahora la consecuencia de tener estas dos condiciones:

De (ii) se tiene que

$$\mathcal{L}_X(du_1) = \mathcal{L}_X(du_j) \quad \text{si y solamente si} \quad du_1(X) = du_j(X),$$

esto es

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial u_1}{\partial y}(x,y)\,dy = \frac{\partial u_j}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial u_j}{\partial y}(x,y)\,dy,$$

como $dx = 0$, se tiene

$$\frac{\partial u_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial u_j}{\partial y}(x,y),$$

de manera que al integrar respecto a y se obtiene,

$$u_1(x,y) + C_1(x) = u_j(x,y) + C_j(x),$$

es decir

$$u_1(x,y) - u_j(x,y) = g_j(x), \quad \text{donde } g_j = C_j - C_1.$$

Por otro lado, $\{du_1 - du_j - g_j(x)\,dx\}_{j=2,\dots,k}$ son relaciones abelianas del espacio vectorial $\mathcal{A}(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X)$ y generan un subespacio vectorial $(k-1)$ dimensional $\mathcal{V}$ de $\mathcal{A}(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X)$ que está contenido en el subespacio $\mathcal{A}_0(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X)$ asociado al autovalor cero de

$$\mathcal{L}_X : \mathcal{A}(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X).$$

No es difícil probar que $\mathcal{V}$ permite obtener la siguiente secuencia exacta

$$0 \to \mathcal{V} \xrightarrow{i} \mathcal{A}_0(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X) \xrightarrow{\mathcal{L}_X} \mathcal{A}_0(\mathcal{W}) \to 0.$$

Asimismo, se cumple que

$$K := Nu(\mathcal{L}_X : \mathcal{A}_0(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X) \longrightarrow \mathcal{A}_0(\mathcal{W})) = \mathcal{V}, \quad (\lambda_0 = 0 \text{ y } n = 1).$$

De la secuencia exacta anterior se deduce la secuencia exacta

$$0 \to \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{A}_0(\mathcal{W} \cap \mathcal{V})} \xrightarrow{i} \frac{\mathcal{A}_0(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X)}{\mathcal{A}_0(\mathcal{W})} \xrightarrow{\mathcal{L}_X} \frac{\mathcal{A}_0(\mathcal{W})}{\mathcal{L}_X \mathcal{A}_0(\mathcal{W})} \to 0$$

Afirmación 2: Asimismo, se cumple

(i) $\mathcal{V} \cong \dfrac{\mathcal{V}}{\mathcal{A}_0(\mathcal{W} \cap \mathcal{V})} \bigoplus \dfrac{\mathcal{A}_0(\mathcal{W})}{\mathcal{L}_X \mathcal{A}_0(\mathcal{W})}$.

En efecto, basta ver que la nilpotencia de la aplicaión $\mathcal{L}_X$ sobre el espacio $\mathcal{A}_0(\mathcal{W})$ implica que el espacio $\dfrac{\mathcal{A}_0(\mathcal{W})}{\mathcal{L}_X \mathcal{A}_0(\mathcal{W})}$ es isomorfo a $\mathcal{A}_0(\mathcal{W}) \cap K$ y como $K = \mathcal{V}$ se obtiene el resultado.

(ii) $\mathcal{L}_X : \mathcal{A}_0(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X) \longrightarrow \mathcal{A}_0(\mathcal{W})$ es sobreyectivo.

Bastará construir una aplicación

$$\Phi : \mathcal{A}_0(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathcal{A}_0(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_{\mathcal{W}}) \quad \text{tal que} \quad \mathcal{L}_X \circ \Phi = Id.$$

El teorema (3) implica que el espacio $\mathcal{A}_0(\mathcal{W})$ es generado por relaciones abelianas de la forma $\sum_{i=1}^{k} c_i\, u_i^r\, du_i = 0$. Para dicha relación abeliana se tiene

$$0 = \sum_{i=1}^{k} c_i\, u_i^r\, du_i = \frac{1}{r+1}\, \mathcal{L}_X\Big(\sum_{i=1}^{k} c_i\, u_i^{r+1}\, du_i\Big),$$

por lo tanto, existe una única función $g \in \mathbb{C}\{x\}$ verificando

$$\sum_{i=1}^{r} (c_i\, u_i^{r+1}\, du_i + g(x)\, dx) = 0.$$

Luego, bastará definir $\Phi : \mathcal{A}_0(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathcal{A}_0(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X)$ por

$$\Phi\Big(\sum_{i=1}^{k} c_i\, u_i^r\, du_i\Big) = \frac{1}{r+1}\left(\sum_{i=1}^{k} c_i\, u_i^{r+1}\, du_i + g(x)\, dx\right)$$

De esta manera, $\mathcal{L}_X \circ \Phi = Id$ sobre $\mathcal{A}_0(\mathcal{W})$.

(iii) $\dfrac{\mathcal{A}_0(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X)}{\mathcal{A}_0(\mathcal{W})} \cong \dfrac{\mathcal{A}(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X)}{\mathcal{A}(\mathcal{W})}.$
Es claro que,

$$\mathcal{A}(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X) = \mathcal{A}_0(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X) \oplus \mathcal{A}_*(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X),$$

donde $\mathcal{A}_*(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X)$ denota la suma directa de los autoespacios correspondientes a los autovalores no nulos, el cual es invariante bajo L_X : $\mathcal{A}(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X)$.

Por otro lado, se cumple $L_X(\mathcal{A}_*(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X)) = \mathcal{A}_*(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X)$.

Finalmente, $\mathcal{L}_X$ anula las $\mathcal{F}_X$ componentes de las relaciones abelianas. Esto implica que

$$\mathcal{L}_X(\mathcal{A}_0(\mathrm{W} \boxtimes \mathcal{F}_X)) \subset \mathcal{A}_*(\mathcal{W}).$$

Luego, como

$$\mathcal{A}_*(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X) = \mathcal{L}_X(\mathcal{A}_*(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X)) = \mathcal{A}_*(\mathcal{W}),$$

entonces

$$\mathcal{A}(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X) = \mathcal{A}_0(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X) \oplus \mathcal{A}_*(\mathcal{W}).$$

De esto último el resultado es inmediato.

Con esto se logra llegar al resultado del teorema. En efecto de (*iii*) se tiene que

$$\dim\mathcal{A}(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X) - \dim\mathcal{A}(\mathcal{W}) = \dim\mathcal{A}_0(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X) - \dim\mathcal{A}_0(\mathcal{W}). \qquad (4)$$

Por otro lado, de (*ii*) $\mathcal{L}_X(\mathcal{A}_0(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X)) = \mathcal{A}_0(\mathcal{W})$ y como

$$\dim\mathcal{A}_0(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X) = \dim Nu(\mathcal{L}_X) + \dim(Im\mathcal{L}_X),$$

donde $\mathcal{L}_X : \mathcal{A}_0(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X) \longrightarrow \mathcal{A}_0(\mathcal{W})$. Luego,

$$\dim\mathcal{A}_0(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X) = \dim\mathcal{V} + \dim\mathcal{A}_0(\mathcal{W}).$$

Reemplazando esta última expresión en (4) resulta

$$\dim\mathcal{A}(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X) - \dim\mathcal{A}(\mathcal{W}) = \dim\mathcal{V},$$

es decir,

$$rk(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X) = rk(\mathcal{W}) + k - 1.$$

La segunda parte del teorema es inmediata, pues basta ver la siguiente igualdad

$$\frac{1}{2}(k-1)(k-2) + k - 1 = \frac{1}{2}k(k-1)$$

para obtener el resultado.

Ejemplo 9. $\mathcal{W} = (x, y, x+y, x-y, x^2+y^2)$ es un 5−web maximal. Asimismo, $X(x,y) = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ el campo vectorial radial es un automorfismo infinitesimal transversal de $\mathcal{W}$. Por lo tanto, del teorema (3), se concluye que el web $\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X$ es tambien maximal.

Teorema 5. *Para cada $k \geq 5$ existe una familia de dimensión $\geq \left\| \frac{k}{2} \right\| - 1$ de k− webs globales excepcionales sobre $\mathbb{P}^2$ que en parejas son no equivalentes .*

El teorema anterior es la clave para probar este último teorema, pues si $\mathcal{W}$ tiene rango maximal entonces $\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_X$ también. Esto es, se aplica el teorema anterior a $\mathcal{W}_C$, siendo C una curva cuasi-homogénea y X es el correspondiente campo vectorial radial ponderado. (Ver [1]).

Referencias

[1] D. Marín, J. V. Pereira and L. Pirio, *On planar webs with infinitesimal automorphisms.* Inspired by Chern, Nankai acts in Mathematics 11 (2006), pp. 351-364.

[2] J. V. Pereira and P.F. Sánchez, *Transformation groups of holomorphic foliations.* Comm. Anal. Geom. 10 (2002), pp. 1115-1123.

[3] L. Pirio, *Équation fonctionnelle abélienne et géométrie des tissus.* Thèse de l' Université Paris VI, soutenue le 15 décembre 2004.

[4] O. Ripoll, *Détermination du rang des tissus du plan et autres invariants géométriques.* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005), pp. 247-252.

[5] G. Robert, *Relations fonctionnelles polylogarithmiques et tissus plans.* Prépublication 146, Université Bordeaux 1 (2002).

[6] P.F. Sánchez and J. V. Pereira, *Vector Fields, Invariant Varieties and Linear Systems.* Annales de L 'Institut Fourier, 51 n. 5 (2001), pp. 1385-1405.

Abstract

This article begins describing the fundamental problem of web's geometry, besides it gives some classic results of this theory. Finally it describes the structure of the space of web's planares abelianas that admit infinitesimal automorphism; as a result of this it gets some consequences.

Keywords: Foliations, webs

Andrés Beltrán
Sección Matemática, Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú
abeltra@pucp.edu.pe