MOVIMIENTO EN UNA SUB-VARIEDAD DE UN SISTEMA MECÁNICO CON ACELERACIÓN NORMAL MÍNIMA

Rodrigo Martínez, [1] ***Yrevis Núñez*** [1]

Diciembre, 2007

Resumen

En este trabajo se dan las condiciones suficientes para que los desplazamientos de un sistema mecánico: $\mu = (M, \phi(\gamma), \theta)$ *se realicen en la subvariedad,*

$$m = \{(x, \nu) \in T(M) : \Omega_\alpha(\nu) = 0\},$$

con aceleración normal mínima.

Palabras Clave: *Sistema mecánico, fuerza, aceleración mínima.*

1. *Departamento de Matemáticas, Universidad de Oriente, Venezuela.*

1. Introducción

El científico ruso SUSLOV, introdujo al final del siglo antes pasado el concepto de problema inverso en la dinámica (1890); bajo este concepto se entiende la construcción de campos de fuerzas en base a integrales parciales dadas. Posiblemente fue NEWTON el primero que planteó un problema inverso en la dinámica cuando construyó el campo de fuerzas potenciales bajo las cuales los planetas se mueven en correspondencia con las leyes de KEPLER.

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \end{cases} \qquad\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^k} = 0 \Longleftrightarrow \nabla_\nu \nu = 0$$

<u>Ley de Newton</u> <u>Ley de Newton Generalizada</u>

BERTRAND [2] un poco más tarde incentivado por los resultados de Newton, planteó el siguiente problema: "Conociendo solamente que los planetas se desplazan a lo largo de cónicas, se exige construir los componentes de las fuerzas como funciones del punto". La solución de BERTRAND a este problema fue: "La fuerza puede ser dirigida a un centro inmóvil y proporcional a la distancia: $\vec{F} = r\vec{e}$ o en forma inversa a su cuadrado".

DAINELLI, planteó un problema más general que los anteriores (1936), en el cual propuso construir el campo de fuerzas más general posible que garantice que un punto se mueva a lo largo de un curva $f(x, y) = c$, c constante. La solución que obtuvo fue la siguiente: "El campo de fuerza más general que permite que un punto se desplace por la curva dada tiene los componentes:

$$F_x = \left(f_x^2 + f_y^2\right) \frac{d}{ds}\left(\frac{\varphi^2}{2}\right) \tau_x + \varphi^2 (f_x f_{yy} - f_y f_{xy}) \tag{1.1}$$

$$F_y = \left(f_x^2 + f_y^2\right) \frac{d}{ds}\left(\frac{\varphi^2}{2}\right) \tau_y + \varphi^2 (f_y f_{xx} - f_x f_{xy}) \tag{1.2}$$

donde: $\tau = (\tau_x, \tau_y)$, es un vector tangencial a la curva y φ, cierta función.

Sobre esta temática consiste el siguiente trabajo.

2. Designaciones y Aspectos Generales

Designaremos por: M; $C^{\infty}(M)$; $\chi(M)$; $T(M)$; $\wedge(M)$, a la variedad diferenciable con coordenadas locales en el punto $x \in M : \{x^1, x^2, \cdots, x^N\}$; al anillo de todas las funciones infinitamente diferenciables sobre M; al álgebra de Lie generada por todos los campos vectoriales C^{∞} sobre M; al espacio tangente sobre M con base $\left\{\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}\right\}$; al álgebra de Grassman de las 1-formas sobre M.

Designaremos por medio de "g" y "∇" respectivamente al tensor simétrico y no degenerado de signatura arbitraria, y a la aplicación

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

$$(U, V) \longrightarrow \nabla_U V,$$

que satisface las siguientes condiciones:

(i) Es R lineal respecto a V y $C^{\infty}(M)$ lineal respecto a U

(ii) $(\nabla_U g)(V, W) = 0$ para todo $U, V, W \in \chi(M)$.

Todas las afirmaciones futuras se harán en una variedad riemanniana $(M, g) = V_N$.

Sea γ una aplicación tal que:

$$\begin{aligned} \gamma &: [a, b] \longrightarrow M \\ \dot{\gamma} &: (a, b) \longrightarrow T(M), \quad a, b \in R, \end{aligned}$$

y sea $V \in \chi(M)$ tal que: $\dot{\gamma}(t) = V(\gamma(t))$, para todo $t \in [a, b]$. Entonces decimos que V se traslada paralelamente a lo largo de γ, si

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)}(V) = 0. \tag{2.1}$$

Las ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{x}^k = V(x^k) \\ \nabla_V V = (\dot{x}^k + \Gamma^k_{mn}(x)\dot{x}^m\dot{x}^n)\partial_k = 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

representan las ecuaciones de las geodésicas del espacio $A_N = (M, \nabla)$. Las funciones $\Gamma^k_{mn}(x) \in C^\infty(M)$ son las componentes de ∇.

3. Movimiento de un Sistema Mecánico, en una Subvariedad, con Aceleración Normal Mínima

Se considera el sistema mecánico estacionario: $\mu = (M, \phi(\gamma), \theta)$, donde: γ es una trayectoria, $\theta \in \wedge(M)$ y

$$\phi(\gamma) = \int_\gamma \frac{1}{2} g(v, v)dt, \tag{3.1}$$

$$\theta = F_k dx^k, \tag{3.2}$$

donde $T = \dfrac{1}{2}g(v, v)$ es la energía cinética y $F_k \in C^\infty(M)$ son componentes del campo de fuerza F que garantiza los desplazamientos del sistema mecánico μ, con energía cinética T en una subvariedad:

$$\mathfrak{m} = \{(x, v) \in T(M), \quad f_\alpha(x) = c_\alpha = \text{constante}\}, \tag{3.3}$$

donde $\alpha = \overline{1, J}, \quad J < N$.

Problema:

Sean los campos vectoriales: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_J$, los cuales se obtienen por el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, de los campos vectoriales: $\operatorname{grad} f_\alpha$,

$\alpha = \overline{1,J}$, $\left(\mathrm{grad} f_\alpha = \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial x^k}\partial_k\right)$ y $g(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta) = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad \alpha = \beta \\ 0, & \text{si} \quad \alpha \neq \beta. \end{cases}$ se pide construir el campo vectorial $v \in \chi(M)$ que genera las ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v(x), \tag{3.4}$$

y se cumple además la condición:

$$\Omega_\alpha(v) \equiv g(v, \varepsilon_\alpha) = 0, \quad \alpha = \overline{1,J}$$

donde $\Omega_\alpha \in \wedge(M)$.

Solución:

Supongamos que:

$$v = \sum_{i=1}^{J} \lambda_i \varepsilon_i, \quad \lambda_i \in C^\infty(M), \tag{3.5}$$

entonces:

$$v^2 = g(v, v) = \sum_{i=1}^{J} \lambda_i^2 \tag{3.6}$$

y

$$\nabla_v v = \sum_{i=1}^{J} (v(\lambda_i)\varepsilon_i + \lambda_i \nabla_v \varepsilon_i),$$

lo cual en base a la condición (ii) para ∇, se puede representar de la forma

$$\nabla_v v = \sum_{i=1}^{J} v(\lambda_i)\varepsilon_i - \sum_{\alpha} p_\alpha(v, v)\varepsilon_\alpha, \tag{3.7}$$

donde

$$p_\alpha(v, v) = (\nabla_v \Omega_\alpha)(v). \tag{3.8}$$

Ahora, como el comportamiento del sistema mecánico μ se describe por las ecuaciones:

$$\nabla_\nu \nu = F, \quad \nu \in \chi(M) \tag{3.9}$$

entonces de (3.7) y (3.9) se deduce:

$$F = \sum_{i=1}^{J} \nu(\lambda_i)\varepsilon_i - \sum_{\alpha} p_\alpha(\nu, \nu)\varepsilon_\alpha, \tag{3.10}$$

como F se puede expresar en una componente tangencial F_τ y una componente normal F_η, $\eta, \tau \in \chi(M)$, $g(\eta, \tau) = 0$, entonces podemos suponer que:

$$F_\eta = -\sum_{\alpha} p_\alpha(\nu, \nu)\varepsilon_\alpha. \quad \alpha = \overline{1, J} \tag{3.11}$$

Entonces la idea básica para solucionar este problema, se fundamenta en el hecho de que para que los movimientos del sistema mecánico (o punto en el espacio de Riemann) se realicen en la sub-variedad dada, se debe exigir que la longitud de la componente normal: F_η sea mínima (lo ideal sería que se anule); es decir: "Minimizar F_η respecto a τ : $\min_\tau F_n$".

Puesto que:

$$\|F_\eta\| = \sqrt{g(F_\eta, F_\eta)} = \sqrt{\sum_{\alpha} g(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta) p_\alpha(\tau, \tau) p_\beta(\tau, \tau)},$$

$$\|F_\eta\| = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad \alpha \neq \beta \\ p_\alpha(\tau, \tau), & \text{si} \quad \alpha = \beta \end{cases},$$

entonces se debe minimizar $p_\alpha(\tau, \tau)$ respecto a τ, bajo las condiciones $g(\tau, \tau) = 1$, $g(\tau, \varepsilon_\alpha) = 0$; donde $\tau = \tau^k \partial_k$.

En efecto, aplicando a los lagrangianos:

$$\pounds_\alpha = p_\alpha(\tau, \tau) + \rho_\alpha[g(\tau, \tau) - 1] + \lambda g(\tau, \varepsilon_\alpha),$$

los métodos conocidos obtenemos:

$$\frac{\partial \pounds_\alpha}{\partial \tau} = 0, \quad \text{implica}: \quad P_\alpha \ell = o, \quad \alpha = \overline{1, J} \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial \pounds_\alpha}{\partial \rho_\alpha} = 0, \quad \text{implica}: \quad g(\tau, \tau) - 1 = 0$$

$$\frac{\partial \pounds_\alpha}{\partial \lambda} = 0, \quad \text{implica}: \quad g(\tau, \varepsilon_\alpha) = \Omega_\alpha(\tau) = 0,$$

donde P_α es la matriz simétrica:

$$P_\alpha =$$

$$\begin{bmatrix} 2p_{\alpha 11}+2\rho_\alpha g_{11} & p_{\alpha 12}+p_{\alpha 21}+2\rho_\alpha g_{12} & \cdots & p_{\alpha 1n}+p_{\alpha n1}+2\rho_\alpha g_{1n} & \varepsilon_{\alpha 1} \\ p_{\alpha 12}+p_{\alpha 21}+2\rho_\alpha g_{12} & 2p_{\alpha 22}+2\rho_\alpha g_{22} & \cdots & p_{\alpha 2n}+p_{\alpha n2}+2\rho_\alpha g_{2n} & \varepsilon_{\alpha 2} \\ \vdots & & & & \vdots \\ p_{\alpha 1n}+p_{\alpha n1}+2\rho_\alpha g_{n1} & p_{\alpha 2n}+p_{\alpha n2}+2\rho_\alpha g_{2n} & \cdots & 2p_{\alpha nn}+2\rho_\alpha g_{nn} & \varepsilon_{\alpha n} \\ \varepsilon_{\alpha 1} & \varepsilon_{\alpha 2} & \cdots & \varepsilon_{\alpha n} & 0 \end{bmatrix}$$

y ℓ es la matriz columna:

$$\ell = \begin{bmatrix} \tau^1 \\ \tau^2 \\ \cdots \\ \tau^n \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Ahora, considerando que $\ell \neq 0$, entonces estas ecuaciones homogéneas tienen solución si y sólo si:

$$\det P_\alpha = 0, \quad \alpha = \overline{1.J},$$

esto se puede representar como:

$$\det P_\alpha = \rho_\alpha^{J-1} + H_\alpha \rho^{J-2} + \cdots + K_\alpha = 0, \tag{3.13}$$

donde H_α es la curvatura media y K_α la curvatura primera. Entonces las funciones ρ_α deben ser raíces de (3.7).

Se deduce que:

$$\rho_\alpha = -p_\alpha(\tau, \tau), \tag{3.14}$$

y en consecuencia la componente F_η del campo de fuerza mínima es:

$$\text{mín}(F_\eta) = \sum_\alpha \rho_\alpha \varepsilon_\alpha. \tag{3.15}$$

Por lo tanto el campo de fuerzas que garantiza el desplazamiento en la sub-variedad dada será:

$$F = \tau(\tfrac{1}{2} g(v, v))\tau - g(v, v)\left(\sum_{\alpha=1}^{J} \rho_\alpha \varepsilon_\alpha\right)$$
$$F = \tau(\frac{v^2}{2})\tau - v^2\left(\sum_{\alpha=1}^{J} \rho_\alpha \varepsilon_\alpha)\right).$$

Ilustraremos estos resultados en el siguiente caso particular, en el cual vamos a suponer que $g(v, v)$ es Euclidiana.

Ejemplo 1 *Para $N = 2$, $J = 1$, se tiene entonces:*

$$f(x, y) = c \quad ; \quad \varepsilon = \frac{f_x}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}}\partial_x + \frac{f_y}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}}\partial_y,$$

la ecuación (3.8) toma la forma:

$$\det P = \rho + \partial\left(\frac{f_x}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}}\right) = 0,$$

por lo tanto el campo: $(\text{mín}\, F_\eta)$ *debe ser tal que:*

$$\text{mín}\, F_\eta = \left\{\partial_x\left(\frac{f_x}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}}\right) + \partial_y\left(\frac{f_y}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}}\right)\right\}\varepsilon$$

o lo que es lo mismo

$$\text{mín}\, F_\eta = g\left(\frac{\triangle f\varepsilon - grad\, f}{grad\, f^2}, \varepsilon\right)\varepsilon.$$

donde: $\triangle f = f_{xx} + f_{yy}$.

Después de ciertos cálculos se obtiene que las componentes de F coinciden con (1.2) y (1.3), respectivamente, donde $\tau = (\tau^1, \tau^2) = (\tau_x, \tau_y)$ *es tangente a la curva* φ*, definida a través de* $\theta = \|\epsilon\|\varphi$.

Ejemplo 2 *Cuando* $M = E^N$, $J = 1$, *entonces*

$$f_1 = \frac{1}{2}\left[(x^1)^2 + \cdots + (x^N)^2\right] = c_1,$$

$$grad\, f_1 = (x^1, \cdots, x^N) = x$$

$$\varepsilon_1 = \frac{grad\, f_1}{\|grad\, f_1\|} = \frac{x}{\|x\|},$$

la curvatura media H_1 *y la curvatura primera* K_1 *son en este caso*

$$H_1 = div(\varepsilon_1) = \frac{N-1}{\|x\|}$$

$$K_1 = \prod_{i=1}^{N-1} p_1(\tau, \tau) = \frac{(-1)^{N-1}}{\|x\|^{N-1}}.$$

El campo de fuerzas F está dado por

$$F = \sum_{i=1}^{N-1} F_i = \tau_i \frac{d}{dx}\left(\frac{\|v\|^2}{2}\right) - \frac{\|v\|}{\|x\|}x$$

4. Agradecimientos

4.1 Los autores agradecen a los árbitros anónimos por las correcciones y sugerencias suministradas para la mejor presentación de este trabajo.

4.2 Un agradecimiento muy especial al Consejo de Investigación de la Universidad de Oriente, que ha contribuido con el soporte de este trabajo con el proyecto de investigación CI-5-1003-1000/01.

Referencias

[1] V. I. Arnold, *Sobre la topología de los flujos estacionarios tridimensionales de un líquido ideal.* PMM 1, (1966).

[2] M. J. Bertrand, *Sur la possibilité de deduire d'une seule des lois de Kepler le principle de L'attraction.* C. R. Acad. Sci. Paris 9, (1877)

[3] R. Martínez & R. Ramírez, *Construction of field forces from Given partial Integral.* Vol 12. Hadronic Journal, (1991).

[4] R. Ramírez, *On the construction of potencials from given particulars integrals.* Diff Equations N° 6, Tomo XIX, Minsk (1983).

[5] J. Jurgen, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis.* Springer. Alemania (1995).

Abstract

In this work we give sufficient conditions in order that the displacements of a mechanical system: $\mu = (M, \phi(\gamma), \theta)$ it realize in the submanifold,

$$\mathfrak{m} = \{(x, v) \in T(M) : \Omega_\alpha(v) = 0\},$$

with minimal normal acceleration.

Keywords: Mechanical system, force, minimal acceleration.

Rodrigo Martínez
Departamento de Matemáticas, Universidad de Oriente
Apartado 285, Cumaná 6101-A, Venezuela
`yigo54@cantv.net`

Yrevis Núñez
Departamento de Matemáticas, Universidad de Oriente
Apartado 285, Cumaná 6101-A, Venezuela