

SUTILEZAS DE LA LEY DE AMPERE

*Casio R. Oré*¹

Junio, 2006

Resumen

*Imaginémonos un circuito eléctrico en el plano xy , de forma totalmente arbitraria, intensidad I y una línea serpenteante L que se desplaza en la dirección del eje z , desde $z = -\infty$ hasta $z = +\infty$. La corriente I genera campos magnéticos \mathbf{B} en todos los puntos del espacio. Si se nos planteara la siguiente pregunta: **Cuánto vale la integral de línea del campo \mathbf{B} a lo largo de la curva L** , la pregunta nos parecería bastante descabellada, pues no se precisa la forma del circuito ni de la línea L , omisiones que impiden iniciar cálculo alguno. Aún en el caso que se supiera la forma exacta del circuito, no es una tarea nada fácil calcular el campo \mathbf{B} , menos aún su integral a lo largo de L . Sin embargo, lo cierto es que **sí** existe una respuesta al problema y es muy sencilla su obtención empleando la Ley de Ampere.*

Palabras clave: *Divertidas integrales de Ampere*

1. Sección Física, Departamento de Ciencias, PUCP.

1. Introducción

La Ley de Ampere una de las leyes básicas del electromagnetismo relaciona la integral de línea del campo magnético B a través de una curva cerrada C , con la corriente eléctrica I que atraviesa la superficie S limitada por dicha curva C .

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I \quad (1.1)$$

La totalidad de textos sobre electromagnetismo lo presenta¹⁻⁵ y es usada casi exclusivamente para calcular campos magnéticos en situaciones de alta simetría tales como campos producidos por una corriente a través de un alambre rectilíneo muy largo, de radio a , campos en el interior de una bobina, de un toroide, de una corriente coplanar, etc. Dada una distribución de corriente, la estrategia consiste en trazar una curva cerrada tal que en cada uno de sus puntos el campo B sea paralelo a la curva y tenga el mismo valor. El campo B puede entonces retirarse de la integral y ésta se reduce al cálculo de la longitud de la curva. Estos requisitos reducen enormemente la utilidad de la ley de Ampere para la obtención de campos.⁶

Sin embargo, hay una manera alternativa de usar la ley de Ampere y que nos permite la evaluación de integrales de línea del campo \mathbf{B} a través de curvas muy diversas y complejas sin el requisito previo de conocer el valor del campo en todos los puntos de la curva involucrada. Además de ser divertida, esta manera de utilizarla permite un conocimiento más completo de la geometría del campo magnético. En este artículo, se presentará algunos casos. Se colocarán circuitos de diversas geometrías en el plano xy . En algunos casos estas corrientes permitirán mediante la ley de Biot y Savart conocer B en ciertas zonas del espacio.

Recordemos que cuando una integral de línea es a través de una curva cerrada, la operación toma el nombre de circulación del vector involucrado⁷

2. Diversos Ejemplos

Ejemplo 2.1 Empecemos con un anillo de radio a , situado en el plano xy , con centro en el origen de coordenadas y por el que se desplaza una corriente eléctrica de intensidad I , Fig. 1. Se trata de hallar la **integral de línea (\mathbf{IL}) del campo magnético \mathbf{B} a través de todo el eje z .**

Frente a este problema, uno recuerda que la ley de Biot-Savart ¹⁻⁵ permite conocer fácilmente el campo en puntos del eje z

$$\mathbf{B}(0, 0, z) = \mu_0 I a^2 / \left[2(a^2 + z^2)^{3/2} \right] \quad (2.2)$$

Y de inmediato uno se ve tentado a escribir la IL respectiva. Con la ayuda quizás de una tabla de integrales, se obtiene el resultado

$$\int_{-\infty}^{\infty} B dz = (\mu_0 I a^2 / 2) [1/a^2] \left\{ z / \sqrt{a^2 + z^2} \right\}_{-\infty}^{\infty} = \mu_0 I \quad (2.3)$$

Esta integración pudo evitarse usando la Ley de Ampere. Para esto, construyamos una curva cerrada C formada por el eje z y una semicircunferencia de radio R , tal que el eje z sea el diámetro. De acuerdo a la Ley de Ampere, la circulación de B con respecto a la curva cerrada C mencionada vale $\mu_0 I$ pues la corriente que atraviesa el semicírculo es precisamente I . Para responder a la pregunta planteada tomemos el límite $R \rightarrow \infty$. Ahora bien, la integral sobre toda la curva cerrada C puede dividirse en dos partes: La integral a través del eje z más la integral a través de la semicircunferencia de radio infinito. Pero esta última integral es 0, pues en puntos sobre ella, el campo B es 0, debido a que se encuentran muy alejados del productor que es el anillo de radio a y corriente I .

Ejemplo 2.2 Consideremos la misma geometría anterior, pero esta vez con un radio R finito. Se trata ahora de calcular la **integral de línea del campo \mathbf{B} a través de la semicircunferencia**. La integral a través de la curva cerrada (semicircunferencia más diámetro) es nuevamente $\mu_0 I$ y la integral a través del

eje z , desde $z = -R$ hasta $z = +R$ es, según (2.2) $\mu_0 IR / \sqrt{a^2 + R^2}$. La integral solicitada será la diferencia entre estos dos resultados. Fig1.

$$\mu_0 I \left(1 - R / \sqrt{a^2 + R^2} \right) \quad (2.4)$$

Es notorio en este ejemplo el poder de la Ley de Ampere. Aun cuando el generador de campos \mathbf{B} , el aro con una corriente I , luce una geometría muy simple, el cálculo del campo B en puntos fuera del eje z se torna muy complicado. El potencial vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ es expresado en términos de integrales elípticas completas de primera K y de segunda E clase¹

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = [Ia / \pi \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta}] \{ (2 - k^2)K(k) - 2E(k) \} / k^2 \mathbf{e}_\phi$$

donde

$$k^2 = 4ar \sin \theta / [a^2 + r^2 + 2ar \sin \theta].$$

A esta expresión debe aplicarse el rotacional para obtener el campo \mathbf{B} y recién entonces poder integrarlo a lo largo de la semicircunferencia. Como uno puede imaginarse, sería enorme este trabajo y muchas complicaciones se encontrarían en su ejecución. Otra alternativa sería el tomar la expresión de Biot-Savart para \mathbf{B} , calcularlo numéricamente y simultáneamente, integrarlo en la semicircunferencia. Nuevamente, un trabajo gigantesco.

Ejemplo 2.3 Sigamos con la corriente I en el aro de radio a y el segmento del eje z desde $-R$ hasta $+R$ pero en lugar de la semicircunferencia consideremos un cuadrado de arista $2R$ ($R > a$). **La integral de línea de \mathbf{B} a través de los 3 lados del cuadrado**, fuera del eje z , es nuevamente la expresión (2.4) por los mismos motivos expresados en el ejemplo 2.2, Fig 2.

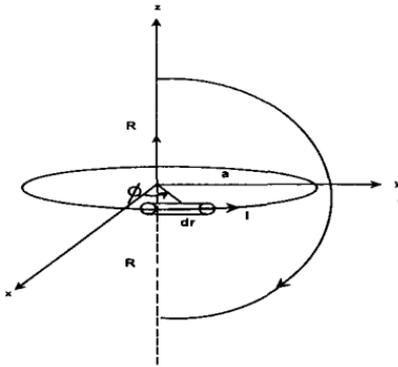


Fig. 1

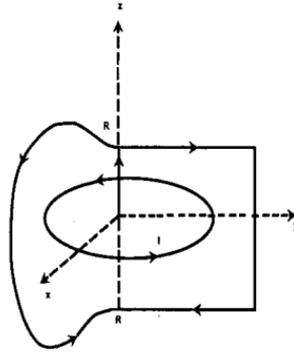


Fig. 2

Ejemplo 2.4 Podemos a estas alturas dar un salto gigantesco. Mantengamos el segmento $-R,+R$ del eje z y en lugar de completar la curva cerrada C con una semicircunferencia o construyendo un cuadrado, completemos con una curva cualquiera, la más caprichosa que pueda ocurrirnos, cuidando solo que la corriente I atraviese la superficie limitada por la curva cerrada C , que por otro lado, no tiene que ser necesariamente curva plana. **La integral de línea de \mathbf{B} a través de esta porción de curva, fuera del eje z , será nuevamente (2.4).** Fig 2.

Podemos incluir una modificación en el eje z . Consideremos un segmento desde $z = p$ hasta $z = q$. El resultado en este caso estará dado por

$$\mu_0 I \left[1 - \left(q / \sqrt{a^2 + q^2} - p / \sqrt{a^2 + p^2} \right) / 2 \right] \quad (2.5)$$

Ejemplo 2.5 Retomemos la corriente I a través del aro de radio a , en el plano xy , con eje z . Consideremos ahora una semirrecta L paralela al plano xy y que empieza en $z = h$ y se extiende hacia el infinito. Fig. 3. Se trata ahora de calcular la **integral de línea del campo \mathbf{B} a través de la semirrecta L** . Para ello se construye la curva cerrada C tomando un segundo punto sobre el eje z : $z = -h$. Desde este punto, se traza otra semirrecta L^* paralela a la anterior.

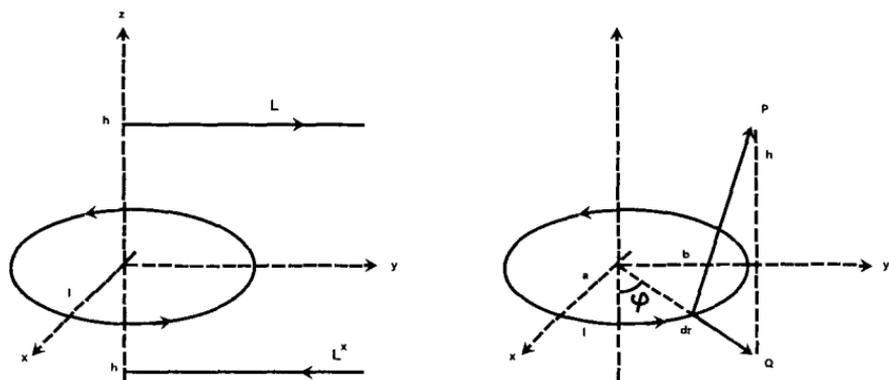


Fig. 3

Se unen estas dos semirrectas en el infinito mediante un segmento paralelo al eje z y de esa manera la curva C es ahora un rectángulo. La circulación de \mathbf{B} a través de este rectángulo es una vez más $\mu_0 I$. La integral de línea a través del lado en el eje z es $\mu_0 I h \sqrt{a^2 + h^2}$ y a través del lado paralelo al eje z , es 0 (El campo B en el infinito es 0). La suma de las integrales de línea a través de las 2 semirrectas paralelas es entonces

$$\mu_0 I \left(1 - h / \sqrt{a^2 + h^2}\right). \tag{2.6}$$

Para lograr la respuesta falta conocer qué relación tienen entre sí las IL a lo largo de L y L^* . Puede esto lograrse averiguando qué relación guardan los campos B en puntos de L y L^* . Se advierte en primer lugar que las dos semirrectas son simétricas con respecto al plano xy . Ubiquemos entonces un punto en cada semirrecta tales que sean simétricos entre sí. Designémoslos con las letras P y Q . Tomemos un elemento $d\mathbf{r}$ del circuito. Sea \mathbf{r}_p y \mathbf{r}_q los vectores que unen el elemento con los puntos P y Q , respectivamente. Estos vectores tienen magnitudes iguales, forman ángulos iguales con el plano xy y con $d\mathbf{r}$. El campo magnético producido por el elemento de corriente $d\mathbf{r}$ en un punto cuya posición con respecto a él es \mathbf{r} es obtenido mediante Biot y Savart con

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{r}^0 \times \mathbf{r}^0}{r^3}$$

donde \mathbf{r} es el vector desde $d\mathbf{r}$ al punto de evaluación. Para precisar los campos consideremos que las semirrectas estén contenidas en el plano yz . P y Q por lo tanto, también lo estarán. Un elemento de corriente $d\mathbf{r}$ y los vectores posición de P y Q adoptarán las formas

$$d\mathbf{r} = dr(-\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j})$$

$$\mathbf{r}_p = -a \cos \varphi \mathbf{i} - (a \sin \varphi - b)\mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_q = -a \cos \varphi \mathbf{i} - (a \sin \varphi - b)\mathbf{j} - z \mathbf{k}$$

donde φ es la posición angular de $d\mathbf{r}$ en el plano xy y b es la distancia de los puntos P y Q al eje z . Se ha reemplazado h por z .

Las direcciones de los dos campos en los puntos elegidos está dada por el producto vectorial

$$d\mathbf{r} \times \mathbf{r}_p = dr[z \cos \varphi \mathbf{i} + z \sin \varphi \mathbf{j} + (a - b \sin \varphi)\mathbf{k}]. \quad (2.7)$$

$$d\mathbf{r} \times \mathbf{r}_q = dr[-z \cos \varphi \mathbf{i} - z \sin \varphi \mathbf{j} + (a - b \sin \varphi)\mathbf{k}]. \quad (2.8)$$

Para la integración lineal a través de las semirrectas se necesita solo la componente \mathbf{j} de los campos. Las expresiones (2.7) y (2.8) nos muestran que estas componentes en P y Q son los mismos pero de distinto signo y, por lo tanto, al efectuar el recorrido en una integración lineal, conducen al mismo valor en cada semirrecta. Por lo tanto, la integral pedida es la mitad de la expresión (2.6)

$$\mu_0 I/2 \left(1 - h / \sqrt{a^2 + h^2}\right). \quad (2.9)$$

Ejemplo 2.6 ¿Y cuánto es la integral a través de una línea recta paralela al plano xy que se extiende de $-\infty$ a $+\infty$ y corta al eje z en un punto fuera del origen?

La línea recta puede ser dividida en dos semirrectas que parten del eje z . La integral a lo largo de cada una de ellas es dada por (2.9). Por consiguiente la respuesta es 0, Fig 3.

Ejemplo 2.7 Una variante en el ejemplo 2.4, consistiría en seguir con un segmento del eje z , desde p hasta q , y completar la curva cerrada C con una curva arbitraria pero esta vez la corriente I no atraviese la superficie limitada por C , Fig.4. En este caso la **integral de línea a través de la curva fuera del eje z** es igual a la negativa de la integral de B en el eje z .

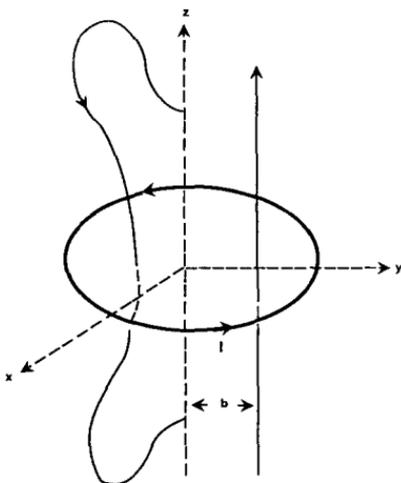


Fig. 4

Ejemplo 2.8 Insistamos con la corriente a través de un aro de radio a , intensidad I en el plano xy . Consideremos esta vez una línea recta L paralela al eje z y a una distancia $b < a$, Fig. 4. **Cuánto es la integral de línea del campo B a través de esta recta.**

Con el eje z y la recta L podemos formar un rectángulo, uniéndolos en el infinito. La Ley de Ampere nos dice entonces que la integral de línea a lo largo

de L es $\mu_0 I$ un resultado realmente sorprendente.

Pero la sorpresa no termina aquí. Si trasladamos la recta hasta que su distancia b al eje z sea mayor que el radio a , la Ley de Ampere nos conduce al valor 0 para la integración lineal.

Las expresiones (2.7) y (2.8) permiten tener una idea de cómo puede suceder resultados tan disímiles.

La integral de línea en este caso toca solo a la componente z . Si $b < a$, el paréntesis $(a - b \sin \varphi)$ es positivo para todos los valores del ángulo φ . El campo B en cualquier punto que cumpla con la condición $b < a$ es paralelo al eje z y por lo tanto la integración lineal a través de la recta paralela al eje x adquirirá un cierto valor ($\mu_0 I$ en el caso presente).

En cambio, si $b > a$, el paréntesis puede adquirir valores positivos y negativos. Porciones dr del circuito cercanos al punto de observación (P ó Q) contribuirán con un valor negativo mientras que los más alejados lo harán con valores positivos. Para saber cual de las orientaciones predomina tiene papel dirimente el denominador r^3 .

Ejemplo 2.9 En todos los ejemplos anteriores nos hemos apoyado en la fórmula (2.2) que nos permitía obtener valores del campo B en puntos del eje z , debido a una corriente circular I de radio a .

Hay otras distribuciones de corriente que también permiten la obtención precisa de campos en el eje z . Consideremos por ejemplo una corriente I a través de un cuadrado de lado a , en el plano xy , con centro en el origen, Fig. 5.

La simetría del arreglo nos permite adelantar que el campo magnético en puntos del eje z debe estar en la dirección z . Los textos usuales no lo mencionan, pero no es difícil calcularlo. Empezaremos reproduciendo el campo debido a una corriente rectilínea I en un punto P situado a una distancia d .

$$B_1 = (\mu_0 I / 4\pi d) (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \quad (2.10)$$

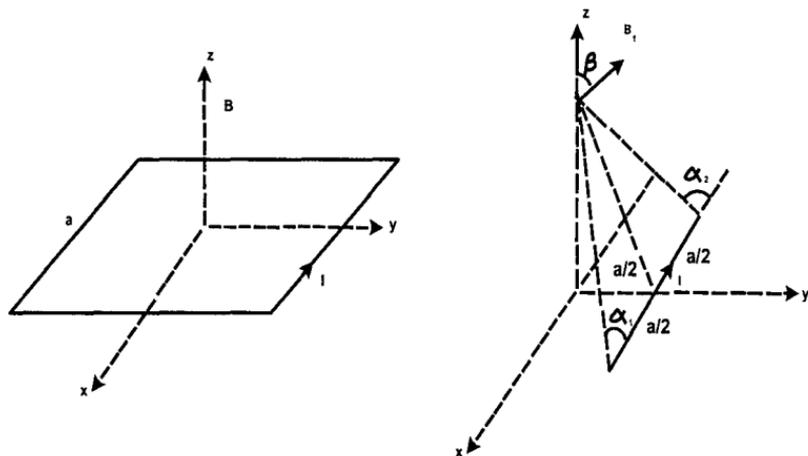


Fig. 5

En el caso presente, P es un punto de la mediatriz del segmento

$$B_1 = (\mu_0 I / 4\pi d) a / \sqrt{z^2 + a^2/2}$$

Pero este campo no está a lo largo del eje z , sino forma un ángulo β con él. Hay que multiplicarlo entonces por el coseno del ángulo ($= a / 2d$) y luego por 4 para dar cuenta de la contribución de los 4 lados. Se tiene así

$$\mathbf{B}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, z) = (\mu_0 I / 2\pi) a^2 / (z^2 + a^2/4) \sqrt{z^2 + a^2/2} \mathbf{k} \quad (2.11)$$

Donde se ha reemplazado d^2 por $z^2 + a^2/4$. La circulación de este campo a lo largo del eje z puede efectuarse por integración directa⁸.

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h \mathbf{B} \cdot \mathbf{k} dz &= (\mu_0 I a^2 / 2\pi) \int_{-h}^h dz / (z^2 + a^2/4) \sqrt{z^2 + a^2/2} \\ &= (\mu_0 I a^2 / 2\pi) (4/a^2) \tan^{-1} (z / \sqrt{z^2 + a^2/2}) \Big|_{-h}^h \end{aligned}$$

Tomando el límite $h \rightarrow \infty$ los arcos tangentes son $\pi/2$ y $-\pi/2$ y la integral de línea toma el valor $\mu_0 \mathbf{I}$ una vez más.

Ejemplo 2.10 Un procedimiento similar nos lleva a obtener el campo B en el eje z debido a una corriente I en un circuito que tiene la forma de un polígono regular de lado a , n lados, apotema a_p , situado en el plano xy , con centro en el origen. La expresión (2.11) se convierta ahora

$$\mathbf{B}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, z) = n(\mu_0 I / 4\pi) a a_p / (z^2 + a_p^2) \sqrt{z^2 + a_p^2 + a^2/4} \quad (2.12)$$

Recordando que la relación entre lado a y apotema a_p es dada por

$$a_p = \frac{1}{2} a \cot(\pi/2)$$

la integral de línea de (2.11) conduce⁸ una vez más a $\mu_0 \mathbf{I}$.

En consecuencia, todas las integrales de línea que se han presentado arriba utilizando la corriente circular pueden también calcularse para corrientes en polígonos regulares.

Podemos dar otro salto gigantesco. Consideremos una corriente I en un circuito de forma totalmente arbitraria situada en el plano xy , Fig. 6. Podemos afirmar con toda seguridad que la integral de línea del campo magnético a través de rectas paralelas al eje z es $\mu_0 \mathbf{I}$ si la recta atraviesa la superficie limitada por el circuito y $\mathbf{0}$ si no la atraviesa.

Ejemplo 2.11 Para cualquier geometría de la corriente I en el plano xy tomemos cualquier curva C , abierta o cerrada en el mismo plano xy , cuidando solo que curva y circuito no interfieran, Fig 7.

¿Cuánto es la circulación del campo B a través de C ?

La respuesta en este caso nos la proporciona Biot y Savart: 0. El motivo, $d\mathbf{r}$ está en el plano xy y como los puntos de C también están en el mismo plano, \mathbf{r} pertenece al plano. Luego el campo B dado por $d\mathbf{r} \times \mathbf{r}$ es perpendicular al plano y por lo tanto su circulación a través de la curva C es 0.

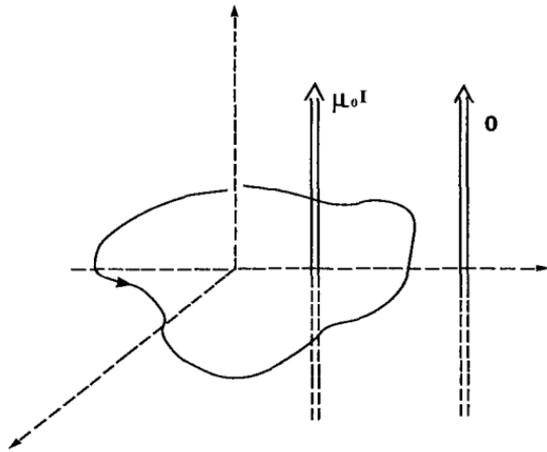


Fig. 6

Ejemplo 2.12 *Un ejemplo concreto de lo narrado arriba usando una vez más el circuito de radio a , corriente I . Tomemos una porción del eje y , desde $y = m > a$ hasta $y = m + h$. Ubiquemos el punto medio del segmento y con centro en este punto, tracemos una semicircunferencia de radio $h/2$, Fig 7.*

Cuánto vale la integral de línea a través de esta semicircunferencia.

Como la circulación es 0, la IL a lo largo del diámetro es 0, la IL a través de la semicircunferencia será también 0.

El valor no cambiará si modificamos la geometría de la corriente I manteniendo su permanencia en el plano xy cuidando que no interfiera con la curva cerrada elegida (Semicircunferencia y segmento del eje y). En lugar de semicircunferencia puede ponerse cualquier otra geometría.

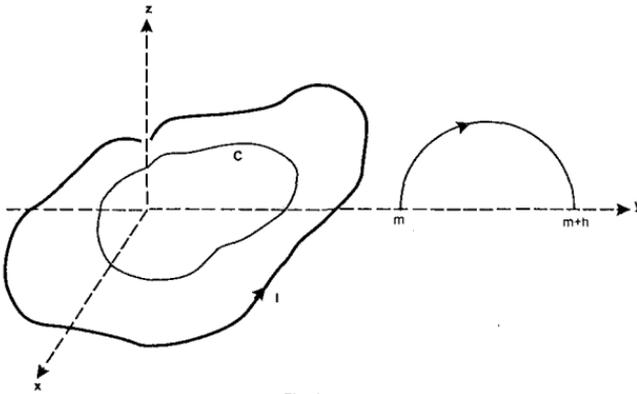


Fig. 7

3. Conclusión

A través de ejemplos muy concretos se ha presentado una alternativa de uso de la ley de Ampere consistente en calcular valores para la integral de línea de campos magnéticos producidos por ciertas corrientes eléctricas aún cuando se ignora la magnitud y dirección de los campos magnéticos producidos. Estas aplicaciones permiten reforzar el conocimiento de la Geometría de los campos magnéticos en los casos considerados.

Referencias

- [1] J.D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. 2nd. Ed. Wiley. New York. (1974).
- [2] J.R. Reitz, F.J. Milford. *Foundatios of Electromagnetic Theory*. Addison-Wesley. Reading.
- [3] R.A. Serway. *Physics for Scientific & Engineers with Modern Physics*. McGraw-Hill, New York, (1996).

- [4] P.A. Tipler. *Physics for Scientific y Engineers*. 4th, Ed. W.H. Freeman, (1999).
- [5] D. Halliday and R. Resnick. *Fundamentals of Physics*. 3th ed. Wiley, New York, (1988).
- [6] C.A. Manogue. *Why is Ampere law so hard?* Am.J.Phys. 74, April (2006).
- [7] R. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands. *Lectures on Physics*. Addison-Wesley. Reading, MA. (1964) Vol.2.
- [8] *Table of integral, Series and Products*. Sixth Edition, Academic Press, (2000).

Abstract

If we would have an electric circuit, intensity I , in the xy plane and a curly line along the z axis, it would't be easy to find the line integral of the magnetic field \mathbf{B} generated by the circuit. However Ampere's law allows to do it, this and others geometries in a simple way.

Keywords: Funny Ampere's line integrals

Casio R. Oré

Sección Física, Departamento de Ciencias

Pontificia Universidad Católica del Perú

core@pucp.edu.pe