SOBRE UN LEMA DE REPRESENTACIÓN DE DEBREU

Abelardo Jordán Liza [1]

Octubre, 2008

Resumen

En el presente artículo de divulgación se expone un gran aporte que Gerard Debreu hizo en el tema de representación de relaciones en [4]. En realidad, su aporte yace dentro de la demostración del Lema 1 de [4], donde reconstruye la imagen de una funión con valores en R *para conseguir continuidad, este hecho es lo que posteriormente se hace referencia como el Lema Gap de Debreu.*
Aquí exponemos las construcciones de Debreu para conseguir una función continua que represente a una relación completamente ordenada definida en un espacio topológico.

Clasificación AMS 2000: 06A06

Palabras Clave: *Orden completo, Representación de un orden, Lema Gap de Debreu.*

1. *Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias, PUCP.*

1. Introducción

Dado un "orden" $\preceq$ sobre un conjunto no vacío $\mathbb{X}$, un problema fundamental es : Encontrar una función u de valor real definida en $\mathbb{X}$ tal que

$$x \preceq y \Leftrightarrow u(x) \leq u(y)$$

donde $\leq$ es la relación *menor o igual* en R. Sigue siendo de interés los casos cuando $\mathbb{X}$ tiene alguna estructura especial como topológica o vectorial, ¿qué características podemos para u? como en el caso de $\mathbb{X}$ dotado de una topología, lo natural es exigir que u sea continua. En un esquema económico, estas funciones se denominan de "utilidad", cuando X representa un conjunto de decisiones para un agente (dada por una relación generalmente denominada preferencia). De existir tal u, se dice que $\preceq$ está representada por u. Cabe observar que si $v : u(\mathbb{X}) \to \mathrm{R}$ es una función estrictamente creciente, entonces $v \circ u : \mathbb{X} \to \mathrm{R}$ también representa a $\preceq$. Además, es muy conocido que existen relaciones que no son representables. Es frecuente encontrar a la relación lexicográfica $\prec$ definida en R_+^2 mediante

$$x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathrm{R}, x \prec y \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < y_1, & \text{ó} \\ x_1 = y_1 \wedge x_2 < y_2, & \end{cases}$$

como no representable (ver [2] para los detalles.)

Con los artículos de Gerard Debreu [4] y [5] se inicia un importante escenario para el estudio de las funciones de utilidad asociadas a relaciones de preferencia, dando lugar al estudio de aspectos más generales como en el caso del celebrado Lema de Debreu.

Desde las publicaciones antes mencionadas, se han hecho aportes tanto por clarificar los aspectos técnicos que involucran las pruebas de Debreu, así como extensiones de resultados subyacentes. En [5] el propio Debreu mejora sus resultados de [4].

2. Definiciones Básicas

Sea $\mathbb{X}$ un conjunto no vacío y $\preceq$ una relación binaria en $\mathbb{X}$. Se dice que $\preceq$ es:

$i)$ *Reflexiva*, si $\forall x \in \mathbb{X}, x \preceq x$
$ii)$ *Completa*, si $\forall x, y \in \mathbb{X}, x \preceq y$ ó $y \preceq x$
$iii)$ *Transitiva*, si $\forall x, y, z \in \mathbb{X}, x \preceq y, y \preceq z \Rightarrow x \preceq z$.

Note que $ii)$ implica[1] $i)$. Como en [4], se dice que $\preceq$ es un orden completo si satisface $ii)$ y $iii)$. En tal caso, se dice que $\mathbb{X}$ es completamente ordenado.

En teoría económica, la notación $x \preceq y$ se lee "x es al menos tan preferido como y", así también si $\preceq$ satisface $ii)$ y $iii)$, se denomina relación de preferencia. Apartir de $\preceq$, se definen:

$$
\begin{aligned}
&x \sim y (x \text{ es indiferente a } y) \text{ si } x \preceq y \wedge y \preceq x\\
&x \prec y (y \text{ es preferido a } x) \text{ si } x \preceq y \text{ pero } y \npreceq x.\\
&x \succeq y \text{ si y solamente si } y \preceq x.
\end{aligned}
$$

Denotaremos por $\mathcal{I}_x$ al conjunto $\{y \in \mathbb{X} : x \sim y\}$. La relación de indiferencia es una relación de equivalencia en $\mathbb{X}$, cuyas clases están representadas por los $\mathcal{I}_x$ o como es usual por $[x]$. Para $x, y \in \mathbb{X}$, denotamos por $[x, y]$ y por $]x, y[$ a los conjuntos $\{z \in \mathbb{X} : x \preceq z \preceq y\}$ y $\{z \in \mathbb{X} : x \prec z \prec y\}$, respectivamente.

Definición 1. *Una función $u : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ se llama una función de utilidad (de valor real) asociada a la relación $\preceq$, si*

$$\forall x, y \in \mathbb{X},\ x \preceq y \Leftrightarrow u(x) \leq u(y). \tag{2.1}$$

Si $\mathbb{X}$ está dotado de una topología tal que para cada $x \in \mathbb{X}$, los conjuntos

$$C_x := \{z \in \mathbb{X} : x \preceq z\} \text{ y } C^x := \{z \in \mathbb{X} : z \preceq x\}$$

son cerrados, a ésta se la denomina una *topología natural* para $\preceq$.

[1] No obstante, en [7] se dice que $\preceq$ es completa, si $\forall x, y \in \mathbb{X}, x \neq y$, se satisface $x \preceq y$ o $y \preceq x$

3. Numerabilidad de $\mathbb{X}$

El caso básico cuando $\mathbb{X}$ es finito y no vacío tiene una caracterización para la representación de una relación.

Proposición 2. *Sea $\emptyset \neq \mathbb{X}$ un conjunto finito, y $\preceq$ una relación en $\mathbb{X}$. Una condición necesaria y suficiente para que exista una función $u : \mathbb{X} \to \mathrm{R}$ tal que*

$$x, y \in \mathbb{X}, x \preceq y \Leftrightarrow u(x) \leq u(y)$$

es que $\preceq$ sea un orden completo.

Prueba:

($\leftarrow$) Se deduce que el dominio de $\preceq$ es $\mathbb{X}$. Para cada $x \in \mathbb{X}$, definimos

$$u(x) := \text{ número de elementos de } C^x$$

por lo que $x_1 \preceq x_2$ si y sólo si, $C^{x_1} \subset C^{x_2}$(por la condición de transitividad) y esto equivale a $u(x_1) \leq u(x_2)$.

($\rightarrow$) De la condición de transitividad de la relación $\leq$ en R, se obtiene directamente la transitividad de $\preceq$. Mientras que, dados $x, y \in \mathbb{X}$, se tiene que $u(x) \leq u(y)$ ó $u(y) \leq u(x)$ y de esto, $x \preceq y$ ó $y \preceq x$. $\square$

Existe un resultado interesante si $\mathbb{X}$ es un conjunto numerable (que genaraliza el caso previo), sin requerir estructura alguna en especial. Lo resaltante es el uso de la numerabilidad de $\mathbb{X}$, concretado en la siguiente proposición:

Proposición 3. *Sea $\mathbb{X}$ un conjunto enumerable y $\preceq$ una relación en $\mathbb{X}$. Entonces, una condición necesaria y suficiente para que exista $u : \mathbb{X} \to \mathrm{R}$ que satisfaga (2.1) es que $\preceq$ sea un orden completo.*

Prueba:
($\leftarrow$) Es posible expresar a $\mathbb{X}$ como el conjunto $\{x_1, x_2, \cdots\}$. Para $i, j \in \mathbb{N}$, se define

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } x_i \preceq x_j \\ 0, & \text{en otro caso .} \end{cases}$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$, definimos

$$u(x_i) := \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} r_{ij} \tag{3.1}$$

u es una función bien definida en $\mathbb{X}$. Sean $x, y \in \mathbb{X}$ tales que $x \preceq y$, entonces $C^x = \{x_i \in \mathbb{X} : x_i \preceq x\} \subset C^y = \{x_i \in \mathbb{X} : x_i \preceq y\}$ por lo que $\{i \in \mathbb{N} : x_i \in C^x\} \subset \{i \in \mathbb{N} : x_i \in C^y\}$, y de (3.1), $u(x) \leq u(y)$, y viceversa.

($\rightarrow$) Como en la proposición anterior.

Para $\mathbb{X}$ un conjunto no enumerable, lo que Debreu explota en uno de sus lemas es la condición de enumerabilidad del espacio cociente generado por $\sim$ con la premisa que $\sim$ es definida en base a una relación $\preceq$ en $\mathbb{X}$.

4. Lemas de Representación

Se presentan las dos lemas que Debreu aporta en [4], no obstante nuestro interés se centra en el primer lema. Los siguientes resultados, se conocen como Lemas de representación de Debreu:

Lema 4. *Sea $(\mathbb{X}, \preceq)$ completamente ordenado, dotado de una topología natural para $\preceq$, tal que $\mathbb{X}/\sim$ es numerable. Entonces, existe una función de utilidad para $\preceq$ que es continua.*

Lema 5. *Sea $(\mathbb{X}, \preceq)$ completamente ordenado,con una topología natural, y $E = \{z_1, z_2, \cdots\}$ un subconjunto numerable de $\mathbb{X}$. Si para $x, y \in \mathbb{X}$ tales que $x \prec y$, existe $z \in E$, tal que $x \preceq z \preceq y$. Entonces, existe una función utilidad continua asociada a $\preceq$.*

Antes de ocuparnos de estos lemas, requerimos de algunas consideraciones.

En primer lugar, denotaremos por A al conjunto $\mathbb{X}/\sim$(es decir, A es el conjunto de las clases de equivalencia determinadas por $\sim$). En A diremos que $[x] \preceq [y]$ si y sólo si $x \preceq y$.

Definición 6. *Sea S un subconjunto no vacío de $\overline{\mathrm{R}}$. Una laguna de S es un intervalo no degenerado que es disjunto de S que tiene cotas inferiores y superiores en S. Un gap de S es una laguna maximal de S.*

Lo último está dicho en el siguiente sentido: J es un gap de S si J es una laguna de S tal que si H es un intervalo que contiene a J, entonces $H \cap S \neq \emptyset$.

Lo que Debreu establece, es una relación de la continuidad de una función $f : E \subset \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ con los gaps de $f(E)$, concretamente cuando éstos son abiertos.

Demostración. (Del Lema 1)
Existen $\mathcal{J} \subset \mathbb{N}$ y elementos $x_i \in \mathbb{X}$ para cada $i \in \mathcal{J}$, tales que $A = \{[x_i] : i \in \mathcal{J}\}$ con $x_{i+1} \in C_{x_i}$ para cada $i \in \mathcal{J}$(lo último es posible debido a la completitud de $\preceq$). Lo dicho se consigue de modo natural, si A tiene elemento extremal respecto a $\preceq$. ¿Qué hacer si A no tiene elementos extremales? Procedamos de la siguiente manera, no sin antes mencionar que en esta parte usaremos a los representantes de las clases, como si fueran sus respectivas clases:

Podemos asumir que $\mathcal{J} \subset \mathbb{Z}$. Definamos una nueva ordenación en A, es decir A escrita como $A = \{y_i\}_{i \in J}$ donde los y_i están definidas por

$$\text{Fijado un } x_1 \text{ en } A, \text{ sea } y_1 = x_1$$

Asumiendo definidos y_k para $k = 1, 2, \cdots, n-1$, se define

$$y_n := x_{k'} \text{ , donde } k' \text{es el mínino índice de los } x_k$$

tales que $x_k \succeq y_1, \cdots, y_{n-1}$.

Análogamente, podemos definir elementos y_{-k} en base a los elementos $x_k \prec x_1$. Con esta nueva ordenación, establecemos una aplicación creciente de A en $\mathcal{J}$ y como es posible definir una función $\varphi : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ monótona y además que $\varphi(\mathcal{J})$ sea acotado [2], generamos una función

$$\begin{aligned} \psi : \quad & A \to \mathbb{R} \\ & [x_i] \mapsto \psi([x_i]) = \varphi(i) \end{aligned}$$

Sean $s = \inf_{[x]\in A} \psi([x])$ y $t = \sup_{[x]\in A} \psi([x])$.
Obviamente, por las cardinalidades de los conjuntos A y $]s,t[$, existen $r \in]s,t[$ tales que $r \notin \psi(A)$. Fijando uno de tales r arbitrarios, definamos los conjuntos[3]

$$L_r := \{v \in \psi(A) : v < r\} \;\; \text{y} \;\; L^r := \{v \in \psi(A) : r < v\} \tag{4.1}$$

Sean $g_r := \sup L_r$, $g^r := \inf L^r$. La preocupación de Debreu [4] está centrada en los casos cuando $g_r \notin L_r$ ó cuando $g^r \notin L^r$, es decir cuando los gaps de $\psi(A)$ no son abiertos. Justamente en [4], Debreu propone eliminar los gaps de estos tipos, pero como sostiene Beardon [1], las aseveraciones no son totalmente correctas. No obstante que el mismo Debreu propone otra prueba en [5], Beardon presenta un procedimiento para probar que dado un subconjunto no vacío E de R es posible definir una función creciente $f : E \to$ R tal que $f(E)$ tiene solamente gaps abiertos o cerrados (En el caso de gaps cerrados, rescatando las ideas de Debreu, es posible convertir a éstos en un punto, manteniendo una f sustituta creciente; con la consecuencia que estos intervalos ya no son no degenerados.)

En lo que sigue, exponemos el aporte de Beardon (en la forma requerida para el propósito de Debreu) que en esencia es lo que en la literatura se conoce como Lema Gap de Debreu ,y retomamos luego la aplicación de este resultado, siguiendo a Debreu [4].

---

[2] Por ejemplo, cuando $\mathcal{J} \subset \mathbb{N}$,podemos tomar $\varphi(i) = 2 - \dfrac{1}{i}$

[3] Puede ocurrir que para $r \neq \tilde{r}$, se obtenga $L_r = L_{\tilde{r}}$ ó $L^r = L^{\tilde{r}}$. Realmente, los conjuntos de conjuntos L_r así como de conjuntos L^r, son enumerables.

Teorema 7. *Sea E un subconjunto no vacío de* R, *entonces existe una aplicación estrictamente creciente $g : E \to$ R tal que los gaps de $g(E)$ son o un intervalo abierto o un intervalo cerrado.*

La prueba de este teorema puede encontrarse en [1]. Podemos agregar que esta g es acotada (es suficiente recordar que existe un homeomorfismo estrictamente creciente de R a $]0,1[$.)

Retomando la prueba del Lema 1, definimos $u : \mathbb{X} \to$ R mediante

$$u(x) = g(\psi(x_i)), \quad \text{donde } x \in [x_i] \tag{4.2}$$

considerando $E = \psi(A)$. Por supuesto que u preserva el orden y para probar la continuidad, tomamos un número real r tal que $s < r < t$ y los conjunto $X_r = \{x \in \mathbb{X} : u(x) \leq r\}$ y $X^r = \{x \in \mathbb{X} : u(x) \geq r\}$.
Si $r \in u(X)$, entonces existe $x \in X$ tal que $u(x) = r$ y por la topología natural de X, se concluye que X_r y X^r son cerrados.
Si ocurriera que $r \notin u(\mathbb{X})$, y si r pertenece a algún gap abierto, entonces es posible obtener reales r' y r'' en $u(\mathbb{X})$ tales que $X_r = X_{r'}$ y $X^r = X^{r''}$, y de esta manera estamos como en el caso anterior. En el caso que r pertenece a un gap cerrado, sean $U = \{r' \in u(\mathbb{X}) : r' > r\}$ y $V = \{r' \in u(\mathbb{X}) : r' < r\}$, estos conjuntos son no vacíos desde la definición de laguna; siendo

$$X_r = \bigcap_{r' \in U} X_{r'} \text{ y } X^r = \bigcap_{r' \in V} X_{r'}$$

los cuales resultan cerrados. □

Nota 1. La condición que A sea enumerable, es aplicable solamente para la definición inductiva de una correspondencia monótona entre A y $\mathcal{J}$.

Nota 2. Observe que el último procedimiento, puede aplicarse cuando una componente del complemento de $u(\mathbb{X})$ consista solamente de un punto, es por eso que en la definición de laguna no se consideran intervalos no degenerados.

Nota 3. El gran aporte del lema 1, está en el manejo de los gaps que nos muestra que es suficiente garantizar la existencia de una función utilidad para una preferencia, para luego obtener una función de utilidad continua.

Respecto al Lema 2
Como lo habíamos advertido, nuestro interés se centra en el Lema 1, no obstante los interesados en la prueba del Lema 2, pueden consultar [4], [5] y [2].

5. Comentario sobre la Representación y Lema Gap de Debreu

Hemos presentado al inicio, las funciones utilidad tomando valores en R, pero este hecho restringe a otras relaciones que no son representables en el contexto dado (del mismo modo debilitando condiciones de transitividad y completitud). Luego surge la necesidad de ampliar el codominio de una función de representación a otras estructuras de orden, distintas de (R, $\leq$). Paralelamente, el tema del Lema Gap de Debreu ha tomado otros contextos interesantes. Dos importantes referencias actualizadas, son [3] y [6].

Referencias

[1] A. F. Beardon, *Debreu's Gap Theorem.* Economic Theory,2, 150-152 . Springer-Verlag(1992).

[2] D.S. Bridges, G.B. Mehta, *Representation of Preferences Orderings* . Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems, 422. Springer Verlag. 1995.

[3] A. Caserta, A. Giarlotta, S. Watson, *Debreu-like properties of utility represenations.* Journal of Mathematical Economics, 44(2008) 1161-1179.

[4] G. Debreu, *Representation of a preference ordering by a numerical function.* In Decision Process. John Wiley, 1954.

[5] G. Debreu, *Continuity properties of Paretian Utility.* International Economic Review, 5, 1964.

[6] G. Herden, G.B. Metha, *The Debreu Gap Lemma and some generalizations.* Journal of Mathematical Economics, 40(2004) 747-769.

[7] L-F. Lee, *The theorems of Debreu and Pelag for ordered topological spaces.* Econometrica, Vol 40, N° 6, 1972.

Abstract

In this article it is presented a great contribution that Gerard Debreu made to the Representation of ordering relations en [4]. In fact, his contribution lies in the proof of Lemma 1 of [4], where he rebuilds the image of a function with values in R to get continuity. Afterwards, this fact was known as Debreu Lemma Gap.
In this article will be shown Debreu's constructions to get a continuous function, which represents a completely ordered relation defined in a topological space.

Key words: Complete ordering, Representation of an ordering, Debreu Gap Lemma.

Abelardo Jordán Liza
Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú
`ajordan@pucp.edu.pe`