SOLUCIONES ALGEBRAICAS DE FOLIACIONES SOBRE $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

Hernán Neciosup P.[1]

Enero, 2009

Resumen

En el presente trabajo nos proponemos estudiar las Foliaciones Holomorfas Singulares sobre el espacio proyectivo complejo 2-dimensional $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$*. Nuestro interés en estas foliaciones está centrado en sus soluciones algebraicas. Determinaremos una forma normal de encontrar el índice de Camacho & Sad de estas soluciones, el cual es invariante por foliación. Finalmente, mostramos que el conjunto de foliaciones holomorfas singulares sin soluciones algebraicas es genérico.*

Clasificación AMS 2000: 30D05, 32H50, 32AXX

Palabras Clave: *Foliaciones Holomorfas Singulares*

1. *Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias, PUCP.*

1. Introducción

El presente trabajo es motivado por una exposición hecha por A. Lins Neto [12].

Las Foliaciones Holomorfas Singulares sobre el plano proyectivo complejo $\mathfrak{F}$, son representadas en coordenadas afines por un campo $Z(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$, o equivalentemente por una 1−forma diferencial holomorfa:

$$P(x;y)dy - Q(x;y)dx = 0$$

donde P y Q son polinomios en dos variables complejas, de modo tal que $mcd(P;Q) = 1$. El conjunto $Sing(\mathfrak{F}) = \big\{(x;y) : P(x;y) = Q(x;y) = 0\big\}$ es llamado *conjunto singular* de la foliación $\mathfrak{F}$ en las coordenadas afines de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. En este caso, $Sing(\mathfrak{F})$ consta sólo de puntos aislados. Nuestro interés acerca de las foliaciones sobre $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ estará centrado en las *Soluciones Algebraicas* de $\mathfrak{F}$, asociadas a la ecuación

$$P(x;y)dy - Q(x;y)dx = 0,$$

Dada una solución algebraica S de $\mathfrak{F}$ y $p \in Sing(\mathfrak{F})$, S es definida localmente en algún sistema de coordenadas afines por $\{f(x;y) = 0\}$. Si $p \in Sing(S)$ entonces podemos descomponer f localmente en un producto de funciones analíticas irreducibles, es decir $f = f_1.f_2.\cdots.f_k$. Cada conjunto $B_j = \{q \in U : f_j(q) = 0\}$ será llamado *rama local* de S en p. Si $p \in S$ es punto regular de S, entonces existe una única rama de S en p. Asociaremos a cada singularidad $p \in Sing(\mathfrak{F})$, con $p \in S$, y a cada rama local B de S en p, el número complejo $i(B;\mathfrak{F})$, *Índice de B con respecto a* $\mathfrak{F}$, así se tendrá el número $c(S,\mathfrak{F}) = \sum\limits_{p\in Sing(\mathfrak{F})} \sum\limits_{B\in\mathcal{B}} i(B;\mathfrak{F})$, donde $\mathcal{B}$ denota al conjunto de todas las ramas locales de S a través de las singularidades de $\mathfrak{F}$. El resultado principal del presente trabajo es de generalizar el siguiente teorema:

Teorema 1.1 (Teorema del Indice). *Sean $\mathfrak{F}$ una foliación singular por curvas sobre una variedad compleja 2-dimensional M, S una superficie* *de Riemann compacta encajada en M tal que $Sing(\mathfrak{F}) = \{q_1, \ldots, q_r\} \subset S$ y $S \setminus Sing(\mathfrak{F})$ una hoja de $\mathfrak{F}$. Entonces*

$$c(S, \mathfrak{F}) = \int_M c(E) \wedge c(E),$$

donde E es el fibrado normal de S y $c(E)$ es la clase de Chern de E. Además $c(S, \mathfrak{F})$ es independiente de la foliación $\mathfrak{F}$.

Reemplazando la variedad por el plano proyectivo complejo y la superficie de Riemann (solución de la foliación) por una curva algebraica, obtenemos:

$$c(S, \mathfrak{F}) = 3dg(S) - \chi(S) + \sum_{B \in \mathcal{B}} \mu(B),$$

donde: $\mu(B), dg(S), \chi(S)$ representan el número de Milnor de la rama local S, el grado y la característica Intrínseca de Euler de S, respectivamente. Como consecuencia se obtiene:

1. $c(S, \mathfrak{F}) \in \mathbb{Z} \backslash \{2\}$.

2. $c(S, \mathfrak{F}) = 1$ si, y sólo si S, es una línea proyectiva.

Finalmente, a manera de aplicación, se muestra que el conjunto de foliaciones holomorfas singulares sin solución algebraica es genérico.

2. Indice de una Separatriz con Respecto a una Foliación

Consideremos una foliación $\mathfrak{F}_\omega$ determinada por una $1-$forma holomorfa $\omega = 0$ y un sistema de coordenadas afines

$$\varphi := (x, y) : U \subset M \longrightarrow \mathbb{C}^2,$$

donde $\varphi(p) = \big(x(p), y(p)\big) = (0,0)$, tal que $\omega = 0$ puede ser escrita, en estas coordenadas, como:

$$P(x,y)dy - Q(x,y)dx = 0, \tag{2.1}$$

donde P y Q son funciones analíticas en $V = \varphi(U) \subset \mathbb{C}^2$ tal que $P(0,0) = Q(0,0) = 0$, y supongamos que el conjunto $Sing(\mathfrak{F})$ es aislado.

Teorema 2.1 (Teorema de Camacho - Sad). *Si $Z = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$ es un campo vectorial holomorfo en un abierto $U \subset \mathbb{C}^2$ y p una singularidad aislada de Z, entonces siempre existe una separatriz de Z por p.*

Gracias al Teorema 2.1 la foliación determinada por $\omega = 0$ siempre tiene una separatriz alrededor de p, ésta será determinada por los ceros de una función f irreducible, es decir $B = \big\{(x,y) \in U : f(x,y) = 0\big\}$.

Proposición 2.1. *El conjunto analítico $B = \Big\{(x,y) \in U : f(x,y) = 0\Big\}$, donde f es irreducible, es separatriz de $\omega = 0$, si y sólo si*

$$df \wedge \omega = f.gdx \wedge dy, \tag{2.2}$$

donde $g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ es analítica.

Observación 2.1. La proposición anterior es equivalente a: Si $B = \{(x,y) \in U : f(x,y) = 0,\ f \text{ irreducible}\}$ es una separatriz de $\omega = 0$, entonces existen $k, h \in \mathcal{O}_0^2$ y α una $1 - forma$, con k y f primos relativos tales que:

$$k\omega = hdf + f\alpha \tag{2.3}$$

Consideremos ahora S una solución algebraica de una foliación $\mathfrak{F}$ sobre $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ y $p \in Sing(\mathfrak{F})$ supongamos que S es definida en un sistema de coordenadas afines, $\varphi := (x,y) : U \longrightarrow \mathbb{C}^2$, por $\big\{f(x,y) = 0\big\}$ tal que $\varphi(p) = \big(x(p), y(p)\big) = (0,0)$, si $p \in Sing(S)$ y U es lo suficientemente pequeño, entonces podemos descomponer f como el producto de funciones analíticas irreducibles localmente, es decir $f = f_1 \ldots f_k$. Cuando $\frac{\partial f_j(0,0)}{\partial x} \neq 0$ ó $\frac{\partial f_j(0,0)}{\partial y} \neq 0$, tenemos que $B_j = \{f_j = 0\}$ es una rama regular. Cuando $p \notin Sing(S)$, entonces existe una única rama de S en p, que es suave. Ahora, ya que f es irreducible, el conjunto analítico $B = \{f = 0\}$, tiene una parametrización de Puiseux, digamos $\psi : \mathbb{D} \longrightarrow B$, la cual es un homeomorfismo sobre su imagen.

Definición 2.1. El índice de la foliación $\mathfrak{F}$ con respecto a la rama local B de S en p, es por definición el residuo

$$i(B, \mathfrak{F}) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\alpha}{h}, \tag{2.4}$$

donde α y h son como en la ecuación (2.3) y γ es la imagen mediante ψ del círculo $re^{i\theta}$,con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 < r < \varepsilon$, donde $0 < \varepsilon < 1$, y $\psi : \mathbb{D} \longrightarrow B$ es la parametrización de Puiseux.

Observemos que (2.4), está bien definido puesto que f no divide a h.

Lema 2.1. *El número definido en (2.4), depende sólo de B y de $\mathfrak{F}$*

Demostración. Ver [14]. □

Ejemplo 2.1. Supongamos que $\mathfrak{F}$ tiene una solución regular B, a través de la singularidad $p = (0,0) \in U \subset \mathbb{C}^2$. En este caso, podemos suponer que $B = \Big\{(x,y) \in U \, : \, f(x,y) = y = 0\Big\}$. Y, en consecuencia, F es definida por:

$$\omega = Pdy - yqdx,$$

donde $P, q : U \longrightarrow \mathbb{C}$ son analíticas.
Así

$$df \wedge \omega \;\; = \;\; yqdx \wedge dy,$$

tomando $k = \frac{\partial f}{\partial y} = 1$, $h = P$ y $\alpha = -qdx$, una descomposición para ω sería

$$\omega = hdy + y\alpha$$

$$\Rightarrow Pdy - yqdx = hdy + y\alpha,$$

dividiendo por yh tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{h} &= \frac{-qdx}{h} \\ \frac{\alpha}{h}\Big|_B &= \frac{-q(x,0)dx}{P(x,0)} \end{aligned}$$

$$i(B,\mathfrak{F}) = Res\Big(\frac{q(x,0)}{P(x,0)}, x=0\Big).$$

Notemos que la última igualdad coincide con la definición de Camacho y Sad, para el caso regular(ver [5]). Por otro lado, como $p \in S$ no es punto singular de S, tenemos justo una rama de S alrededor de este. Usaremos la siguiente notación para este caso $i(B,\mathfrak{F}) = i_p(B,\mathfrak{F})$.

Un caso particular e interesante es cuando $\mathfrak{F}$ es definida por un campo polinomial:

$$X(x,y) = (\lambda_1 x + by)\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 y\frac{\partial}{\partial y}.$$

En este caso

$$\omega = (\lambda_1 x + by)dy - \lambda_2 ydx.$$

Haciendo $k = \frac{\partial f}{\partial y} = 1, h = P$ y $\alpha = -\lambda_2 dx$, se sigue que la descomposición para ω es

$$\begin{aligned} \omega &= hdy + y\alpha \\ \Rightarrow -Qdx &= y\alpha \\ \Rightarrow \frac{\alpha}{h} &= \frac{-Qdx}{hy} = \frac{-\lambda_2}{(\lambda_1 x+by)} \\ \frac{\alpha}{h}\Big|_B &= \frac{-\lambda_2}{\lambda_1 x} \end{aligned}$$

$$\therefore i(B,\mathfrak{F}) = i_p(B,\mathfrak{F}) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Ejemplo 2.2. Consideremos el caso donde $\mathfrak{F}$, es la foliación en una vecindad U de $(0,0) \in \mathbb{C}^2$, cuyas hojas son las superficies de nivel de alguna función analítica $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$, donde $f(0,0) = 0$ y $f \neq 0$, se sigue que $\mathfrak{F}$, está dada por:

$$\omega = df = 0.$$

Supongamos que $f^{-1}(0)$ tiene ramas $B_1, \ldots, B_k$ alrededor de $(0,0)$, donde $B_j = f_j^{-1}(0) \quad y \quad f = f_1 \cdot \ldots \cdot f_k \; ; \quad 1 \leq j \leq k.$

Si k=1

Una descomposición para ω es la siguiente

$$1.\omega = 1.df + 0.f,$$

entonces

$$i(B, \mathfrak{F}) = 0.$$

Si k > 1

Denotemos por $[B_i, B_j]_0 = [f_i, f_j]_0$ al número de intersecciones de f_i y f_j en $(0,0)$. Se tiene que $\omega = df = \sum_{i=1}^{k} f_1 \ldots \widehat{f_i} \ldots f_k . df_i$, luego la descomposición para la rama $B_j = f_j^{-1}(0)$ es

$$df = hdf_j + f_j\alpha,$$

donde

$$h = f_1 \ldots \widehat{f_j} \ldots f_k \quad \text{y} \quad \alpha = \sum_{i \neq j} f_1 \ldots \widehat{f_i} \ldots \widehat{f_j} \ldots f_k df_i$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{h} = \frac{\omega}{f_j h} - \frac{df_j}{f_j} = \sum_{i \neq j} \frac{df_i}{f_i}.$$

Luego, tenemos:

$$i(B_j, \mathfrak{F}) = -\sum_{i \neq j} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{df_i}{f_i}. \tag{2.5}$$

Ahora como f_j es analítica irreducible, tomemos $\varphi : D_1 \longrightarrow B_j$ una parametrización de Puiseux de B_j, tenemos

$$[B_i, B_j]_0 = ord(f_i \circ \varphi(t), t = 0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{d(f_i \circ \varphi)}{f_i \circ \varphi} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{df_i}{f_i},$$

y, reemplazando en (2.5), se tiene

$$i(B, \mathfrak{F}) = -\sum_{i \neq j} [B_i, B_j]_0 = -\sum_{i \neq j} [f_i, f_j]_0.$$

Observación 2.2. El número $i(B, \mathfrak{F})$ es invariante por biholomorfismo.

3. Generalización del Teorema del Indice

La generalización será hecha para foliaciones sobre $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ donde la superficie de Riemann pasa a ser una curva algebraica.

Consideremos M una variedad compleja 2-dimensional y $S \subset M$ una subvariedad irreducible de dimensión 1 compacta (singular o no). Sea $\mathfrak{F}$ una foliación singular por curvas, tales que S es una solución de $\mathfrak{F}$, esto es, S es unión de hojas con un número finito de singularidades de $\mathfrak{F}$. Esto significa que existe un cubrimiento de M por abiertos, $M = \bigcup_{i \in I} U_i$, y una colección de 1-formas holomorfas $(\omega_i)_{i \in I}$ y funciones holomorfas no nulas $g_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow \mathbb{C}^*$, tales que $\omega_i = g_{ij}\omega_j$. Supongamos que el conjunto singular $Sing(\omega_i) = \{q \in U_i : \omega_i(q) = 0\}$ es discreto. Ya que $\omega_i = g_{ij}\omega_j$ en $U_i \cap U_j$, la ecuación diferencial $\omega_i = 0$, $i \in I$, define una foliación por curvas sobre $M \setminus Sing(\mathfrak{F})$, donde $Sing(\mathfrak{F}) = \bigcup_{i \in I} Sing(\omega_i)$. Por otro lado, S puede ser definido en cada U_i, por la ecuación $f_i = 0$, donde $f_i : U_i \longrightarrow \mathbb{C}$ es analítica y $f_i = h_{ij} f_j$ en $U_i \cap U_j$.

La subvariedad singular S será una solución de $\mathfrak{F}$, si sólo si, para todo $i \in I$, $df_i \wedge \omega_i = f_i \mu_i$, donde μ_i es una 2-forma holomorfa sobre U_i. Bajo estas condiciones, supongamos $p \in S$ sea una singularidad de $\mathfrak{F}$, tal que

S tiene ramas $B_1, \cdots, B_k$ a través de p. Si es posible definir el índice de B_j con respecto a $\mathfrak{F}$, definimos $c(S, \mathfrak{F})$ como la suma de todos los índices con respecto a $\mathfrak{F}$, de todas las ramas de S a través de todas las singularidades de $\mathfrak{F}$, esto es:

$$c(S, \mathfrak{F}) = \sum_{p \in Sin(\mathfrak{F})} \sum_{B \in \mathcal{B}_p} i(B, \mathfrak{F}), \tag{3.1}$$

donde $\mathcal{B}_p$ es el conjunto de las ramas de S que pasan por p.

Teorema 3.1. *Sea $S \subset M$ la subvariedad descrita anteriormente. Entonces:*

a) Si S es una solución de una foliación singular $\mathfrak{F}$, entonces $c(S, \mathfrak{F})$ es un entero.

b) Si S es una solución de dos foliaciones singulares $\mathfrak{F}_1$ y $\mathfrak{F}_2$, entonces $c(S, \mathfrak{F}_1) = c(S, \mathfrak{F}_2)$.

c) Si S es regular, entonces $c(S, \mathfrak{F})$ es la Clase de Caraterística de Chern de la parte normal de S en M.

Demostración. Si S es regular, entonces (a), (b) y (c) siguen del teorema de Camacho-Sad.(ver [5])
Si S es singular,(ver [14]). □

Teorema 3.2. *(*Generalización del Teorema del Indice)
Sea $\mathfrak{F}$ una foliación singular de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ y S una solución algebraica irreducible de $\mathfrak{F}$. Entonces

$$c(S, \mathfrak{F}) = 3dg(S) - \mathcal{X}(S) + \sum_{B \in \mathfrak{B}} \mu(B),$$

donde
$dg(S) :=$ Grado de S en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.
$\mu(B) :=$ El número de Milnor de la rama local.
$\mathcal{X}(S) :=$ La característica intrínseca de Euler de S.

Demostración. Sea $S \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ una curva algebraica irreducible, la cual es una solución algebraica de la foliación singular $\mathfrak{F}$ sobre $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.
Eligamos un sistema coordenado

$$(x, y): \quad U_0 \quad \longrightarrow \quad \mathbb{C}^2$$

con la propiedad de que la línea al infinito ($L_\infty = \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \setminus U_0$) corta a S transversalmente en $k = dg(S)$ puntos. Sea $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ un polinomio irreducible de grado k, tal que $S = \{f = 0\}$ en este sistema coordenado afín.
Sea $\mathcal{G}$ la compactificación en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ de la foliación en $\mathbb{C}^2$, cuyas hojas son las curvas de nivel de f. Una ecuación para $\mathcal{G} \mid_{\mathbb{C}^2}$ es, desde luego, $\omega = df = 0$. Como $S \cap U_0 = \big\{f = 0\big\}$ es invariante por $\mathcal{G}$, se sigue que $c(S, \mathfrak{F}) = c(S, \mathcal{G})$. Calculemos entonces el número $c(S, \mathcal{G})$.
Para esto dividamos el estudio según las singularidades de $\mathcal{G}$ en S, en dos partes.

I) Singularidades Infinitas (S_∞)
Correspondiente a la intersección de S con L_∞, es decir la singularidades de $\mathcal{G}$ en S que se encuentran en el infinito.

$$S_\infty = Sing(\mathcal{G}) \cap L_\infty$$

II) Singularidades Finitas($S_{fin.}$)
Correspondiente a las singularidades de $\mathcal{G}$ en S, que se encuentran en la parte afín, es decir, que estas singularidades se encuentran en $U \simeq \mathbb{C}^2$.

$$S_{fin} = Sin(\mathcal{G}) \cap U_0$$

Analicemos el caso (I).
Notemos que los puntos de $L_\infty \cap S$, son puntos regulares de S, entonces a cada $p \in S \cap L_\infty$, le corresponde una única rama local, la cual denotaremos por $B(p)$.
Calculemos $i(B(p), \mathcal{G})$.

Consideremos el cambio del sistema coordenado afín $x = \frac{1}{z}$ $y = \frac{w}{z}$. Donde $\{z = 0\} = L_\infty$ en las coordenadas $(z, w) \in U_1$, ya que $f(x, y)$ tiene grado k, podemos escribir

$$f(x, y) = z^{-k}\widetilde{f}(z, w)$$

donde $\widetilde{f}$ es irreducible y $\{\widetilde{f} = 0\}$ representa a S en el sistema coordenado (z, w).
Por otro lado

$$df(x, y) = z^{-k-1}(zd\widetilde{f} - k\widetilde{f}dz).$$

Se sigue que $\mathcal{G}$ puede ser definida en U_1 por

$$\omega' = zd\widetilde{f} - k\widetilde{f}dz$$

siendo $S \cap U_1 = \{\widetilde{f} = 0\}$. En particular $S_\infty \cap U_1 = \{(0, w) : \widetilde{f}(0, w) = 0\}$, por tanto S_∞ contiene k puntos ya que L_∞ corta transversalmente a S. Además, para $p_0 = (0, w) \in S_\infty$, $\widetilde{f}$ posee apenas una rama en p_0, digamos $B(p_0)$. Entonces

$$c(S, \mathcal{G}) = k^2.$$

Analicemos ahora el caso (II).
Sea $Sing(S) = \{p_1, \ldots, p_m\}$ las singularidades finitas de S. Supongamos que $f = f_1^i \ldots f_{n_i}^i$ es una descomposición local de f en factores irreducibles, en una vecindad de p_i. Denotemos por B_j^i a la rama local de S a través de p_i, correspondiente a f_j^i. Ya que $\mathfrak{F}$ es representado por $df = 0$ alrededor de p_i, se sigue:

$$\begin{aligned} i(B_j^i, \mathcal{G}) &= -\sum_{n=1; n\neq j}^{n_i} [f_n^i, f_j^i]_{p_i} \quad &; \quad n_i > 1 \\ i(B_j^i, \mathcal{G}) &= 0 \quad &; \quad n_i = 1. \end{aligned}$$

En consecuencia, la contribución de todas las ramas locales de S a través de p_i, es $-\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{n=1;n\neq j}^{n_i}[f_n^i, f_j^i]_{p_i}$. Por tanto

$$c(S,\mathcal{G}) = -\sum_{p_i\in S_{fin}}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{n\neq j}[f_n^i, f_j^i]_{p_i}.$$

En general, de (I) y (II), obtenemos

$$c(S,\mathcal{G}) = k^2 - \sum_{p_i\in S_{fin}}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{n\neq j}[f_n^i, f_j^i]_{p_i}. \tag{3.2}$$

Calculemos ahora $\chi(S)$:

Por el método de aplicar varias Blowing-up (ver [14]), es posible la construcción de una variedad $\widetilde{M}$ y una aplicación analítica propia $\pi : \widetilde{M} \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, llamada la desingularización de S, denotemos por

$$D_i = \pi^{-1}(p_i),\ i = 1,\cdots, m$$

llamado el divisor asociado a p_i (ver [14]), y $S^* \subset \widetilde{M}$ la superficie de Riemann compacta tal que $\pi(S^*) = S$. Tenemos el biholomorfismo $h = \pi|_{S^*} : S^* \to S$; en consecuencia $\chi(S) = \chi(S^*)$. Por otro lado

$$X = -f_y.\frac{\partial}{\partial x} + f_x.\frac{\partial}{\partial y}, \tag{3.3}$$

es el campo dual de $\omega = df = f_x dx + f_y dy$. Observemos que X es tangente a $\{f = 0\}$, de forma que podemos considerar $X^* = \pi(X\ |_S)$, el cual es un campo meromorfo en S^*, cuyos polos estan en $\pi^{-1}(S_\infty)$. Utilizaremos el siguiente resultado (ver [6])

$$\chi(S^*) = Z(X^*) - P(X^*), \tag{3.4}$$

donde

$$Z(X^*) = \sum_{X^*(q)=0} o(X^*, q) \qquad y \qquad P(X^*) = \sum_{q=polo\ de\ X^*} p(X^*, q),$$

siendo

$$o(X^*, q) := \text{Orden de } q \text{ como cero de } X^*$$
$$p(X^*, q) := \text{Orden de } q \text{ como polo de } X^*.$$

Notemos que si $p \in \pi^{-1}(S_\infty)$, entonces el orden de p como polo de X^*, es el mismo que el orden de $\pi(p)$ como polo de $X\mid_S$, el cual es $k-3$ (ver [14]). Luego $P(X^*) = k(k-3)$.

Consideremos ahora $q \in S^*$ tal que $X^*(q) = 0$. Si $p_j = \pi(q)$, entonces el punto q le corresponde a una rama B^i_j de S por p_j. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $B^i_j \neq \{x = 0\}$. Sea $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $t \in \mathbb{D}$, una parametrización de Puseux de B^i_j, ésta puede ser obtenida, tomando una parametrización $\beta : \mathbb{D} \longrightarrow S^*$ con $\beta(0) = q$. Por otro lado, de $X = -f_y\frac{\partial}{\partial x} + f_x\frac{\partial}{\partial y}$ obtenemos X^*(Blow-put de X), que en la carta (x, s) tiene la siguiente expresión:

$$X^* = -f_y\frac{\partial}{\partial x} + (\frac{f_x + sf_y}{x})\frac{\partial}{\partial s}.$$

Si hacemos otra explosión, en $(0, 0)$ de la carta (x, s), a fin de obtener la curva regular y transversal al divisor asociado, es fácil ver que la primera componente del campo no se altera, por tanto, podemos suponer que al hacer tantas explosiones como sea necesario, la expresión del campo es

$$X^* = -f_y\frac{\partial}{\partial x} + (\diamond)\frac{\partial}{\partial \star},$$

donde $(\diamond)$ representa una función holomorfa y $(\star)$representa la ultima coordenada que surge al hacer las explosiones.
Calculemos ahora la expresión de X^* con relación al parámetro t:
Notemos que el campo $\beta^*(X^*)$ en $\mathbb{D}$ es un campo escalar y, por tanto,

tendrá la forma $\beta^*(X^*) = g(t)\frac{\partial}{\partial t}$; $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Por otro lado

$$\begin{aligned}
\beta^*(X^*) &= \big(D\beta(t)\big)^{-1}X^*(\beta(t)\big) \\
\big(D\beta(t)\big)\beta^*(X^*) &= X^*(\beta(t)) \\
\big(D\beta(t)\big)g(t)\tfrac{\partial}{\partial t} &= \Big(-f_y(\beta(t)), \tfrac{f_x(\beta(t))+s(\beta(t))f_y(\beta(t))}{x(\beta(t))}\Big) \\
\Big(g(t).x'(t), g(t)s'(t)\Big) &= \Big(-f_y(\beta(t)), \tfrac{f_x(\beta(t))+s(\beta(t))f_y(\beta(t))}{x(\beta(t))}\Big)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow g(t) = \frac{-f_y(\beta(t))}{x'(t)}$$

$$\therefore X^*(t) = -\frac{f_y(\beta(t))}{x'(t)}\frac{\partial}{\partial t},$$

de donde se obtiene

$$ord(X^*, q) = ord(f_y \circ \beta, t = 0) - ord(x', t = 0).$$

Además, si $\delta(t) = re^{2\pi it}$, $t \in [0,1]$ es un generador de la homología de $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\}$, entonces

$$ord(f_y \circ \beta, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\delta \frac{d(f_y \circ \beta)}{f_y \circ \beta} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\pi(\delta)} \frac{d(f_y)}{f_y} = [f_y, f_j]_p.$$

Colocando $f = f_1^i \dots f_{n_i}^i$, como anteriormente, tenemos

$$\begin{aligned}
f_y &= \sum_{j=1}^{n_i}(f_j^i)_y f_1^i \cdots \widehat{f_j^i} \cdots f_{n_i}^i \\
&= f_1^i \cdots f_{j-1}^i (f_j^i)_y . f_{j+1}^i \cdots f_{n_i}^i + \Big(\sum_{n \neq j}^{n_i}(f_j^i)_y f_1^i \cdots \widehat{f_j^i} \cdots f_{n_i}^i\Big) f_j^i \\
&= f_1^i \cdots f_{j-1}^i (f_j^i)_y f_{j+1}^i \cdots f_{n_i}^i + K f_j^i,
\end{aligned}$$

donde K es holomorfa, obteniéndose de esta manera, por propiedad del número de intersecciones (ver [7]) :

$$[f_y, f_j^i]_{p_i} = [(f_j^i)_y, f_j^i]_{p_i} + \sum_{n \neq j}^{n_i} [B_n^i, B_j^i]_{p_i}$$

$$\therefore \; ord(f_y \circ \beta, 0) = [(f_j^i)_y, f_j^i]_{p_i} + \sum_{n \neq j}^{n_i} [B_n^i, B_j^i]_{p_i}.$$

Análogamente, si $p_i = (x_0, y_0)$, tenemos

$$ord(x'(t), 0) = ord(x(t) + x_0, 0) - 1 = [x + x_0, f_j]_{p_i} - 1,$$

luego

$$ord(X^*, q) = [(f_j)_y, f_j]_p - [x + x_0, f_j]_p + 1 + \sum_{i \neq j}^{n_i} [B_n^i, B_j^i]_{p_i}.$$

Afirmación: $[(f_j)_y, f_j]_p - [x - x_0, f_j]_p + 1 = [(f_j^i)_x, (f_j^i)_y] = \mu(B_p^i)$, ver [14].

Así tenemos:

$$ord(X^*, q) = \mu(B_j^i) + \sum_{i \neq j} [B_n^i, B_j^i]_{p_i},$$

de donde se sigue que la contribución de todas las ramas locales de S, a través de p_i, es $\sum_{j=1}^{n_i} \mu(B_j^i) + \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{i \neq j} [B_p^i, B_p^j]_p$.

Finalmente, teniendo en cuenta que las ramas de las singularidades en S_∞ son lisas, obtenemos

$$Z(X^*, q) = \sum_{p_i \in Sing(S)} \sum_{j=1}^{n_i} \mu(B_j^i) + \sum_{p_i \in S_{fin}} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{i \neq j} [B_p^i, B_p^j]_p$$

Luego, reemplazando en (3.4),

$$\begin{aligned} \chi(S^*) &= Z(X^*) - P(X^*) \\ &= \sum_{p_i \in Sing(S)} \sum_{j=1}^{n_i} \mu(B_j^i) + \sum_{p_i \in S_{fin}} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{i \neq j} [B_p^i, B_p^j]_p - k(k-3), \end{aligned}$$

y por tanto

$$\sum_{p_i\in S_{fin}}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{i\neq j}[B_p^i,B_p^j]_p=\chi(S^*)-\sum_{p_i\in Sing(S)}\sum_{j=1}^{n_i}\mu(B_j^i)+k(k-3). \quad (3.5)$$

Reemplazando (3.5) en (3.2)

$$\begin{aligned}
c(S,\mathfrak{F}) &= k^2-\chi(S^*)+\sum_{p_i\in Sing(S)}\sum_{j=i}^{n_i}\mu(B_j^i)-k(k-3)\\
&= 3k-\chi(S^*)+\sum_{p\in Sing(S)}\sum_{j=1}^{n_1}\mu(B_p^j)\\
&= 3dg(S)-\chi(S^*)+\sum_{p\in Sing(S)}\sum_{j=1}^{n_1}\mu(B_p^j).
\end{aligned}$$

□

Como consecuencia se tiene:

Corolario 3.1. *Sean $\mathfrak{F}$ una foliación de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ y S una solución algebraica de $\mathfrak{F}$, entonces:*

1. *$C(S,\mathfrak{F})$ es un número entero positivo.*
2. *$C(S,\mathfrak{F})=1$ si, y sólo si, S es una línea proyectiva en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.*
3. *$C(S,\mathfrak{F})\neq 2$. En particular, de 1 se tiene que una solución algebraica de $\mathfrak{F}$, contiene, al menos, una singularidad de $\mathfrak{F}$.*

Observación 3.1. *Toda solución algebraica tiene, al menos, una singularidad de la foliación, pues si no la tuviera el $i(B,\mathfrak{F})=0$ y, por tanto, $c(S,\mathfrak{F})=0$, lo cual es una contradicción con* (1) del corolario 3.1.

4. Foliaciones sin Soluciones Algebraicas

Sea $\mathfrak{F}$ una foliación singular sobre M^2 y $p \in M^2$ una singularidad de $\mathfrak{F}$.

Consideremos un sistema coordenado afín

$$(x, y) : U \longrightarrow \mathbb{C}^2$$

alrededor de p, en el cual $\mathfrak{F}$ es representado por la ecuación diferencial de la forma.

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \tag{4.1}$$

donde $P(0, 0) = Q(0, 0) = 0$, con $x(p) = y(p) = 0$.
Sean λ_1, λ_2 los autovalores de la matriz Jacobiana de (P, Q) en $(0, 0)$.

- Diremos que p es una ***singularidad no degenerada*** de $\mathfrak{F}$, si $\lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2$.
- Si p es una singularidad no degenerada, diremos que ésta es una ***singularidad simple***, si $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}^+$.
- Si p es una singularidad no degenerada, diremos que p es de ***tipo Poincaré***, si $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{R}^+$.

Observaciones

- Las condiciones anteriores son independientes de la ecuación diferencial (4.1), que define a la foliación.
- Si, al menos, uno de los λ_i es cero, llamaremos a p ***punto silla nodo***.
- Los números $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ y $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, serán llamados *números característicos* de la singularidad.

Definición 4.1. Diremos que una foliación $\mathfrak{F}$ es *no degenerada, simple o de tipo Poincaré*, si todas sus singularidades son respectivamente, no degeneradas, simples o de tipo Poincaré.

Denotemos por:
$\eta_n :=$ Conjunto de foliaciones no degeneradas de grado n sobre $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.
$\delta_n :=$ Conjunto de foliaciones simples de grado n en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.
$\rho_n :=$ Conjunto de foliaciones tipo Poincaré de grado n en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.
Es fácil ver que

$$\rho_n \subset \delta_n \subset \eta_n$$

Sea $\mathfrak{F} \in \delta_n$, sean $p_1, \ldots, p_N$ las singularidades de $\mathfrak{F}$ (donde $N = 1+n+n^2$ ver Proposición 5.2), denotemos por λ_j^1 y λ_j^1 los autovalores asociados a la matriz Jacobiana de (P, Q) en cada p_j ya que $\frac{\lambda_j^1}{\lambda_j^2} \notin \mathbb{Q}^+$. Entonces existen exactamente dos separatrices B_j^1 y B_j^2 por p_j, lisas y transversales a p_j; además, $i(B_j^1, \mathfrak{F}) = \frac{\lambda_j^2}{\lambda_j^1}$ y $i(B_j^2, \mathfrak{F}) = \frac{\lambda_j^1}{\lambda_j^2}$.

Definición 4.2. Una *configuración C asociada a* $\mathfrak{F} \in \delta_n$, es un subconjunto del conjunto de todas las separatrices de $\mathfrak{F}$

$$C \subset Sep(\mathfrak{F}) = \{B_j^1, B_j^2 : j = 1 \ldots, N\}.$$

Diremos que una *configuración C es propia* si $C \neq Sep(\mathfrak{F})$. Dada una configuración $C \subset Sep(\mathfrak{F})$, usaremos la notación:

$$\sigma(C, \mathfrak{F}) = \sum_{B_j^k \in C} i(B_j^k, \mathfrak{F}),$$

$$\sigma(j, k) = i(B_j^k, \mathfrak{F}).$$

Notemos que $\sigma(C, \mathfrak{F})$ es una suma de números característicos asociados a singularidades de $\mathfrak{F}$.
Sea

$$A = \{(j, 1), (j, 2) : j = 1 \ldots N\}.$$

Si C es una configuración, podemos asociar un subconjunto $\overline{C}$ de A, dado por

$$\overline{C} = \{(j,1) : B_j^1 \in C\} \cup \{(j,2) : B_j^2 \in C\}$$

de forma que

$$\sigma(C,\mathfrak{F}) = \sum_{(j,1)\in\overline{C}} i(B_j^1,\mathfrak{F}) + \sum_{(j,2)\in\overline{C}} i(B_j^2,\mathfrak{F}) = \sigma_{\overline{C}}(\mathfrak{F}).$$

Si S es una solución algebraica $\mathfrak{F}$, podemos definir una configuración asociada a $\mathfrak{F}$ y S, por

$$C(S,\mathfrak{F}) = \{B_j^k \in Sep(\mathfrak{F}) : B_j^k \subset S\}.$$

Teorema 4.1. *Sea $n \geq 2$ y $\mathfrak{F} \in \delta_n$ tal que para toda configuración propia $C \subset Sep(\mathfrak{F})$, el número $\sigma(C,\mathfrak{F})$ no es un entero positivo. Entonces $\mathfrak{F}$ no posee solución algebraica.*

Demostración. Una prueba bien detallada puede ser vista en [14]. □

Corolario 4.1. *No hay solución algebraica que contenga todas las separatrices de una foliación simple.*

5. Foliación de Jouanolou

Consideremos la foliación $\mathfrak{F}_0$, definida en un sistema coordenado afín U_0, por la ecuación diferencial $Pdy - Qdx = 0$, donde

$$\begin{aligned} P(x,y) &= y^n - x^{n+1} \\ Q(x,y) &= 1 - yx^n \end{aligned} \tag{5.1}$$

Obsérvese que $\mathfrak{F}_0$ no tiene singularidades en la línea al infinito, $L_\infty = \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \setminus U_0$, ver [14] .

Por otro lado, las singularidades finitas de $\mathfrak{F}_0$, en U_0, son las soluciones de

$$x^{n+1} = y^n \;\wedge\; yx^n = 1,$$

de donde:

$$\begin{aligned} y &= x^{-n} \\ \Longrightarrow x^{n+1} &= x^{-n^2} \\ x^{n^2+n+1} &= 1 \\ x^N &= 1 \\ x &= e^{\frac{2k\pi i}{N}} \;; k = 0, 1, \ldots, N-1, \end{aligned}$$

lo que es equivalente a escribir

$$x_j = e^{\frac{2\pi i j}{N}} \;; j = 1, \ldots, N.$$

Sean $p_1, \ldots, p_N \in U_0 \simeq \mathbb{C}^2$, los puntos singulares de $\mathfrak{F}_0$, donde $N = n^2 + n + 1$,$p_j = (x_j, y_j)$, $y_j = x_j^{-n}$; $j = 1 \ldots N$. Ahora, la matriz Jacobiana de (P, Q) en el punto p_j es

$$J_j = J_{p_j}(P, Q) = \begin{pmatrix} -(n+1)x_j^n & n y_j^{n-1} \\ -n y_j x_j^{n-1} & -x_j^n \end{pmatrix},$$

luego los autovalores asociados a p_j son las raíces solución de la ecuación

$$(\lambda_j)^2 - (Traza(J_j))\lambda_j + Det(J_j) = 0,$$

es decir

$$\lambda_j^1 = \frac{-(n+2) + n\sqrt{3}i}{2} x_j^n \qquad \wedge \qquad \lambda_j^2 = \frac{-(n+2) - n\sqrt{3}i}{2} x_j^n$$

En particular, tenemos que $\mathfrak{F}_0 \in \rho_n$, ver [14]. Por otro lado, $\sigma(j, 2) = \frac{\lambda_j^1}{\lambda_j^2} = \overline{\sigma(j, 1)} \notin \mathbb{R}$.

A partir de aquí denotaremos a $\mathfrak{F}_0$ (foliación de Jouanolou sobre $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$) por $\mathcal{J}_n$. Entonces, si B_j^1 y B_j^2 son las separatrices locales de $\mathcal{J}_n$, en cada singularidad, tenemos

$$i(B_j^1, \mathcal{J}_n) = \sigma(j, 1)$$

$$i(B_j^2, \mathcal{J}_n) = \sigma(j, 2),$$

luego, si C es una configuración propia asociada a $\mathcal{J}_n$, se tiene

$$\sigma(C,\mathcal{J}_n) = \sum_{B_j^1\in C} i(B_j^1,\mathcal{J}_n) + \sum_{B_j^2\in C} i(B_j^2,\mathcal{J}_n) = r\sigma(j,1) + s\sigma(j,2),$$

donde

$$0 < r < N, \qquad 0 < s < N \Longrightarrow 0 < r+s < 2N.$$

$$\begin{aligned}\sigma(C,\mathcal{J}_n) &= r\left(\tfrac{-n^2+2n+2}{2N} - \tfrac{(n+2)n\sqrt{3}i}{2N}\right) + s\left(\tfrac{-n^2+2n+2}{2N} + \tfrac{(n+2)n\sqrt{3}i}{2N}\right) \\ &= (r+s)\left(\tfrac{-n^2+2n+2}{2N}\right) + (s-r)\left(\tfrac{(n+2)n\sqrt{3}i}{2N}\right)\end{aligned}$$

Notemos que $\sigma(C,\mathcal{J}_n) \notin \mathbb{R}$, desde que $s \neq r$, así $\mathcal{J}_n$ no posee solución algebraica.

Por otro lado para que $\sigma(C,\mathcal{J}_n)$ sea real, es necesario que $r = s$, entonces

$$\sigma(C,\mathcal{J}_n) = r\left(\frac{-n^2+2n+2}{N}\right),$$

de donde se obtiene que, si $n \geq 3$, entonces $-n^2+2n+2 < 0$, lo cual implica que $\sigma(C,\mathcal{J}_n)$ nunca es un entero positivo.
Si $n = 2$, entonces $N = 7$ y $-n^2+2n+2 = 2$, por tanto $\sigma(C,\mathcal{J}_n) = \frac{2r}{7}$.
Ahora, como

$$0 < r < N = 7 \longrightarrow 0 < 2r < 14 \longrightarrow 0 < \frac{2r}{7} < 2,$$

queda la posobilidad que $\frac{2r}{7} = 1$, pero esto no sucede, pues si suponemos que $\frac{2r}{7} = 1$, se tendría $r = \frac{7}{2}$, lo que es un absurdo ya que $r \in \mathbb{Z}$, luego $\sigma(C,\mathcal{J}_n)$ no es un entero positivo, de donde se deduce, por Teorema 4.1, que $\mathcal{J}_n$ no posee solución algebraica, cuando $n \geq 2$.

Por tanto podemos afirmar la siguiente proposición

Proposición 5.1.

1. $\mathcal{J}_n \in \rho_n$. *Si* $n \geq 2$, *entonces las singularidades de* $\mathcal{J}_n$ *son tales que el cociente de los autovalores no son reales positivos.*

2. $\mathcal{J}_n$ *tiene todas las singularidades en la parte afín* U_0; *además el cardinal del conjunto* $Sin(\mathcal{J}_n)$ *es* $N = 1 + n + n^2$.

Lema 5.1.

1. *Dado* $\mathfrak{F}_0 \in \eta_n$, *con singularidades* $p_1, \ldots, p_N$, *entonces existen vecindades* U_0 *de* $\mathfrak{F}_0$ *en* $\mathfrak{X}_n$, V_j *de* p_j *en* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, *y una función analítica* $\varphi_j : U_0 \longrightarrow V_j$; $j = 1, \ldots p_N$, *tal que* $V_j \cap V_i = \phi$ *si* $j \neq i$, *y para todo* $\mathfrak{F} \in U_0$, $\varphi_j(\mathfrak{F})$ *es una única singularidad de* $\mathfrak{F}$ *en* V_j *(en particular* $\varphi_j(\mathfrak{F}_0) = p_j$*).*

2. ρ_n *y* η_n *son subconjuntos abiertos, densos y conexos de* $\mathfrak{X}_n$.

Demostración. ver [14]. □

Proposición 5.2. *El número de singularidades de una foliación* $\mathfrak{F} \in \rho_n$ *es:*

$$\#Sing(\mathfrak{F}) = 1 + n + n^2.$$

Demostración. Definamos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \# : & \rho_n & \rightarrow & \mathbb{N} \\ & \mathfrak{F} & \longmapsto & \#Sing \end{array}$$

Del Lema 5.1 $\#$ es localmente constante, además ρ_n es conexo, por tanto, se sigue que $\#$ es una aplicación constante en ρ_n. Por otro lado de la Proposición 5.1, la foliación de Jouanolou posee $N = 1 + n + n^2$ singularidades. □

Teorema 5.1. *(Foliaciones sin Soluciones Algebraicas)*
Para todo $n \geq 2$, *existe un subconjunto* $\mathcal{U}_n \subset \mathfrak{X}^n$ *abierto y denso, tal que si* $\mathfrak{F} \in \mathcal{U}_n$, *entonces* $\mathfrak{F}$ *no tiene solución algebraica.*

Demostración. Fijemos $n \geq 2$ y consideremos el siguiente conjunto de foliaciones:

$$G_n = \{\mathfrak{F} \in \rho_n : \forall \text{ configuración propia } C \subset Sep(\mathfrak{F}) \text{ se tiene } \sigma(C, \mathfrak{F}) \notin \mathbb{N}\}$$

$$\sigma(C, \mathfrak{F}) = \sum_{B_j^k \in C} i(B_j^k, \mathfrak{F}).$$

Notemos que $G_n \neq \emptyset$, puesto que $\mathcal{J}_n \in G_n$. El Teorema 4.1 garantiza que si $\mathfrak{F} \in G_n$, entonces $\mathfrak{F}$ no posee solución algebraica.
Demostraremos que G_n es abierto y denso en ρ_n. Fijemos $\mathfrak{F}_0 \in \rho_n$ con singularidades $p_1, \ldots, p_N$. De la Proposición 5.1 se sigue que ρ_n es abierto y denso en $\mathfrak{X}_n$, por tanto existen vecindades $\mathcal{U}_0 \subset \rho_n$ de $\mathfrak{F}_0$, V_j de p_j y funciones holomorfas

$$\varphi_j : U_0 \longrightarrow V_j$$

$$\sigma : U \longrightarrow \mathbb{C}^* \ j = 1, \ldots, N$$

tales que

1. Si $\mathfrak{F} \in \mathcal{U}_0$, entonces $\varphi_j(\mathfrak{F})$ es una única singularidad de $\mathfrak{F}$ en V_j, la cual es no degenerada.

2. Si $\mathfrak{F} \in \mathcal{U}_0$, entonces los números característicos de $\varphi(\mathfrak{F})$ son $\sigma_j(\mathfrak{F})$ y $(\sigma_j(\mathfrak{F}))^{-1}$

$$\Big(\sigma_j(\mathfrak{F}) = \{\sigma(j,1) : j = 1 \ldots, N\}\Big)$$

$$\Big((\sigma_j(\mathfrak{F}))^{-1} = \{\sigma(j,2) = (\sigma(j,1))^{-1} : j = 1 \ldots, N\})\Big).$$

Dada una configuración C de $\mathfrak{F} \in \mathcal{U}_0$, sea

$$\overline{C} \subset A = \Big\{(j;1), (j,2) : j = 1, \ldots, N\Big\}$$

tal que $\sigma(C, \mathfrak{F}) = \sigma_{\overline{C}}(\mathfrak{F})$. Notemos que

$$\begin{array}{rrcl} \sigma_{\overline{C}} : & \mathcal{U}_0 & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & \mathfrak{F} & \longmapsto & \sigma_{\overline{C}}(\mathfrak{F}) \end{array}$$

es holomorfa para todo $\overline{C} \subset A$. Por otro lado, si C es una configuración, entonces

$$\sigma_{\overline{C}}^{-1}(\mathbb{N}) = \left\{ \mathfrak{F} \in \mathcal{U}_0 : \sigma_C \mathfrak{F} \in \mathbb{N} \right\}$$

es unión enumerable de conjuntos analíticos en $\mathcal{U}_0$, por tanto son cerrados; además son conjuntos cuyo interior es vacío (complementar denso), es más $int\left(\bigcap \sigma_{\overline{C}}^{-1}(\mathbb{N}) \right) = \phi$, y como $\mathcal{U}_0 \setminus \bigcap \sigma_{\overline{C}}^{-1}(\mathbb{N}) = G_n \cap \mathcal{U}_0$, se sigue que $G_n \cap \mathcal{U}_0$ es abierto y denso en $\mathcal{U}_0$. Además si $\mathfrak{F} \in G_n \cap \mathcal{U}_0$, entonces $\mathfrak{F}$ no tiene soluciones algebraicas.

$\square$

Referencias

[1] Phillip A. Griffiths: *Introduction to Algebraic Curves.* Translations of Mathematical Monographs. vol. 76.

[2] C. Camacho; A. Lins Neto: *Introdução ã Teoría das Folheações* 11° Colóquio Brasileiro de Matemática 1977.

[3] C. Camacho; A. Lins Neto; P. Sad: *Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields.* J. Differential Geom., **20** (1984), no. 1, 143-174.

[4] C. Camacho & P. Sad: *Pontos Singulares de Equações Diferenciais Analíticas.* VI Colóquio Brasileiro de Matemática, Rio de Janeiro, IMPA 1988.

[5] C. Camacho; P. Sad: *Invariant Varieties Through Singularities of Holomorphic Vector Fields* Ann. of Math. 115(1982), pp.579-595.

[6] G.de Rham. *Sur la division de formes et de courants par une forme linéaire* Comment. Math. Helv., 28 (1954), 346-352.

[7] P. Fernández. *Notas de Clase: Sistemas Dinámicos* Pontificia Universidad Católica del Perú. 2006.

[8] X. Gomez-Mont; L. Ortiz-Bobadilla: *Sistemas Dinámicos Holomorfos en Superficies*, Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana (1989).

[9] R. Gunning & H. Rossi: *Analytic functions of several complex variables*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ. 1965.

[10] E. Hille. *Ordinary Differential Equations in the Complex Domain.* John Wiley & Sons. Inc.1976.

[11] A. Lins-Neto; B. Scárdua: *Folheações Algébricas Complexas.* 21° Colóquio Brasileiro de Matemática. (1997).

[12] A. Lins-Neto: *Algebraic Solutions of Polynomial Differential Equations and Foliations in Dimension Two.* Lecture Notes in Math. N° 1345, 192-232 (1988).

[13] A. Lins-Neto: *Construction of Singular Holomorphic Vector Fields and Foliations in Dimension Two.* Journal of Differential Geometry. Number 1(1987) 1, 31.

[14] H. Neciosup: *Soluciones Algebraicas de Foliaciones Holomorfas Singulares sobre el Plano Proyectivo Complejo.* Tesis de maestría-PUCP 2007.

[15] B. V. Shabat. *Introduction to Complex Analysis, Part. II.* Translations of Mathematical Monographs. AMS (1992) vol. 110.

Abstract

In this work we propose study the Singular Holomorphic Foliations on complex projective 2-dimensional $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Our interest in these foliations is focused on their algebraic solutions. We determine a normal way to find the Camacho & Sad index of these solutions, which is invariant by foliation. Finally, we show that the set of singular holomorphic foliations without algebraic solutions is generic.

Keywords: Singular holomorphic foliations.

Hernán Neciousup P.
Sección Matemáticas,
Departamento de Ciencias,
Pontificia Universidad Católica del Perú
hneciosup@pucp.edu.pe