EL PROBLEMA DE RIEMANN HILBERT: SOBRE SUPERFICIES DE RIEMANN NO-COMPACTAS

Percy Fernández Sánchez[1]

Julio, 2009

Resumen

En el ICM (International Congress of Mathematicians) de 1900, Hilbert presenta 23 problemas que establecieron el curso de gran parte de las investigaciones matemáticas del siglo XX. El 21° problema es la existencia de ecuaciones diferenciales lineales, con un grupo de monodromía y singularidades prescritas. Este artículo trata este problema sobre superficies de Riemann no compactas.

Clasificación AMS 2000: 30F30, 34M03

Palabras Clave: *Superficies de Riemann, Haces, Fibrados y Ecuaciones diferenciales lineales*

1. *Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias, PUCP.*

1. Ecuaciones Diferenciales Lineales

Denotamos por $\mathrm{M}(n \times m, \mathbb{C})$ el espacio vectorial de todas las matrices $n \times m$ con coeficientes en $\mathbb{C}$ y por $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ el grupo de todas las matrices $n \times n$ inversibles con coeficientes en $\mathbb{C}$. Si X es una superficie de Riemann entonces una función $A : X \to \mathrm{M}(n \times m, \mathbb{C})$ es *holomorfa* si todas las entradas $a_{ij} : X \to \mathbb{C}$, de la matriz $A(z) = (a_{ij}(z))$, son funciones holomorfas. Denotamos

$$\mathrm{M}(n \times m, \mathcal{O}(X)) = \{A : X \to \mathrm{M}(n \times m, \mathbb{C}) : A \text{ es holomorfa}\}$$

y

$$\mathrm{GL}(n, \mathcal{O}(X)) = \{A : X \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) : A \text{ es holomorfa}\}.$$

Teorema 1. *Sea $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathcal{O}(D_R))$, donde $D_R = \{x \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ y $0 < R < \infty$. Entonces para todo $w_0 \in \mathbb{C}^n$ existe precisamente una función holomorfa $w : D_R \to \mathbb{C}^n$ tal que:*

i) $w'(z) = A(z)w(z)$, *para todo* $z \in D_R$,

ii) $w(0) = w_0$.

Ver [2], página 82.

Sobre una superficie de Riemann X una ecuación diferencial lineal para una función holomorfa desconocida $w : X \to \mathbb{C}^n$ puede escribirse en la forma

$$dw = Aw,$$

donde $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n \times n, \Omega(X))$ es una matriz $n \times n$ de 1-formas holomorfas $a_{ij} \in \Omega(X)$. Para una carta local (U, z) sobre X, tales que $z(U) = D_R$ para algún $0 < R < \infty$, se tiene $A = F dz$, donde

$$F \in \mathrm{M}(n \times n, \mathcal{O}(U))$$

y la ecuación diferencial se escribe en estas coordenadas como:

$$\frac{dw}{dz} = F.w.$$

Esta es justamente la ecuación estudiada en el teorema anterior.

Teorema 2. *Sea X una superficie de Riemann simplemente conexa, $A \in \mathrm{M}(n \times n, \Omega(X))$ y $x_0 \in X$. Entonces para todo $c \in \mathbb{C}^n$ existe una única solución $w \in \mathcal{O}(X)^n$ de la ecuación diferencial*

$$dw = Aw$$

que satisface $w(x_0) = c$.

Este teorema es consecuencia del teorema anterior y del Teorema de Monodromía ([2], página 45).

Una consecuencia inmediata de este teorema es el siguiente corolario.

Corolario 1. *Sean X una superficie de Riemann, $p : \tilde{X} \to X$ es su cubrimiento universal, $x_0 \in X$ es un punto e $y_0 \in \tilde{X}$ tales que $p(y_0) = x_0$. Si $A \in \mathrm{M}(n \times n, \Omega(X))$ y $c \in \mathbb{C}^n$. Entonces existe una única solución $w \in \mathcal{O}(\tilde{X})^n$ sobre el cubrimiento universal $\tilde{X}$ de X de la ecuación diferencial*

$$dw = (p^* A)w$$

que satisface $w(y_0) = c$.

2. Factores de Automorfismos

Sean X una superficie de Riemann y $A \in \mathrm{M}(n \times n, \Omega(X))$. Sobre el cubrimiento universal $p : \tilde{X} \to X$, sea L_A el conjunto de todas las soluciones $w \in \mathcal{O}(\tilde{X})^n$ de la ecuación diferencial

$$dw = (p^* A)w.$$

Como en la teoría de la ecuaciones diferenciales lineales reales, podemos demostrar que L_A es un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{C}$ y que $w_1, \ldots, w_n \in L_A$ son linealmente independientes si para un punto arbitrario $a \in \tilde{X}$ los vectores $w_1(a), \ldots, w_n(a) \in \mathbb{C}^n$ son linealmente independientes. Por consiguiente una base $w_1, \ldots, w_n$ de L_A define una matriz invertible

$$\Phi = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}(\tilde{X}))$$

tal que $d\Phi = (p^*A)\Phi$. Tal matriz es llamada un *sistema fundamental de soluciones* de la ecuación diferencial $dw = Aw$. Sea $G = \mathrm{Deck}(\tilde{X}/X) \equiv \pi_1(X)$ el grupo de transformaciones de cubrimiento de $p : \tilde{X} \to X$, esto es, $\sigma \circ p = p$ para todo $\sigma \in G$. Este grupo Deck $(\tilde{X}/X)$ es isomorfo al grupo de homotopía $\pi_1(X)$, [2], página 34. Dada $\sigma \in G$ definimos $\sigma\Phi = \Phi \circ \sigma^{-1}$. Entonces tanto $\sigma\Phi$ como Φ satisfacen la ecuación $d(\sigma\Phi) = (p^*A)(\sigma\Phi)$ y así $\sigma\Phi$ es otro sistema fundamental. Por lo tanto existe una matriz constante $T_\sigma \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ tal que

$$\sigma\Phi = \Phi T_\sigma.$$

Si $\tau \in G$, entonces

$$\Phi T_{\tau\sigma} = \tau\sigma\Phi = \tau(\Phi T_\sigma) = (\tau\Phi)T_\sigma = \Phi T_\tau T_\sigma,$$

y de esto se desprende que $T_{\tau\sigma} = T_\tau T_\sigma$. Luego, la correspondencia

$$\begin{array}{rcl} \pi_1(X) \equiv \mathrm{Deck}(\tilde{X}/X) & \to & \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \\ \sigma & \to & T_\sigma \end{array}$$

es un homomorfismo de grupos. Las matrices T_σ son llamadas *factores de automorfismos* de Φ. Recíprocamente, dado un homomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Deck}(\tilde{X}/X) & \to & \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \\ \sigma & \to & T_\sigma \end{array}$$

y una aplicación holomorfa

$$\Phi : \tilde{X} \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$$

tal que

$$\sigma\Phi = \Phi T_\sigma, \qquad \text{para todo } \sigma \in \mathrm{Deck}(\tilde{X}/X).$$

Luego, dado que

$$\sigma(d\Phi.\Phi^{-1}) = (d\Phi.T_\sigma)(\Phi T_\sigma)^{-1} = d\Phi.\Phi^{-1}, \tag{2.1}$$

se tiene que $d\Phi.\Phi^{-1}$ es invariante por las transformaciones de cubrimiento. Por lo tanto existe una matriz $A \in \mathrm{M}(n \times n, \Omega(X))$ tal que $p^*A = d\Phi.\Phi^{-1}$ y Φ es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial $dw = Aw$.

Ejemplo 1. Considere $X = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < R\}$, donde $0 < R \leq \infty$. Es conocido que el grupo de las transformaciones del recubrimiento universal $p : \tilde{X} \to X$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$. Sobre $\tilde{X}$ existe una función holomorfa $\log : \tilde{X} \to \mathbb{C}$ tal que $\exp \circ \log = p$. Sea $\sigma \in \mathrm{Deck}(\tilde{X}/X)$ un generador de este grupo tal que $\sigma \log = \log + 2\pi i$.
Sea $A \in \mathrm{M}(n \times n, \Omega(X))$ y $\Phi \in \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}(\tilde{X}))$ un sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial $dw = Aw$. Como $\mathrm{Deck}(\tilde{X}/X) = \{\sigma^n : n \in \mathbb{Z}\}$, el comportamiento de Φ está determinado por la matriz $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ que satisface $\sigma\Phi = \Phi T$. Si $\Psi \in \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}(\tilde{X})$ es otro sistema fundamental de soluciones de $dw = Aw$ entonces existe una matriz $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ con $\Psi = \Phi S$. Así

$$\sigma\Psi = \Psi S^{-1}TS = \Psi\tilde{T},$$

donde $\tilde{T} = S^{-1}TS$. Por lo tanto mediante una adecuada elección del sistema fundamental Ψ podemos suponer que T tiene la forma canónica de Jordan

Definición 1. Para una matriz $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$ definimos la *exponencial* de A por $\exp A = \Sigma_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$. Esta serie converge absolutamente en todo $\mathbb{C}$.

Propiedad 1.

i) Si $A, B \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$ *tales que* $AB = BA$ *entonces* $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$. *En particular, si* $B = -A$ *entonces* $\exp(A)\exp(-A) = I$ *y, por lo tanto,* $\exp(A) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

ii) *Si* $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ *y* $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$, *entonces*

$$\exp(S^{-1}AS) = S^{-1}(\exp A)S. \tag{2.2}$$

iii) *Para toda matriz* $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ *existe una matriz* $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$ *tal que* $\exp A = B$.

iv) *Si* X *es una superficie de Riemann y* $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathcal{O}(X))$, *entonces* $\exp A \in \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}(X))$.

v) *Si* $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathcal{O}(X))$ *es tal que* $AdA = dA.A$ *entonces* $d(\exp A) = dA.\exp A = \exp A.dA$.

Teorema 3. *Dadas las matrices* $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ *y* $B \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$ *tales que* $\exp(2\pi i B) = T$, *consideremos la ecuación*

$$w' = \frac{1}{z} B w \tag{2.3}$$

sobre $X = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < R\}$. *Entonces* $\Phi_0 = \exp(B \log)$ *es un sistema fundamental de soluciones de (2.3) sobre un cubrimiento universal* $p : \tilde{X} \to X$ *que tiene a* T *como su factor de automorfismo, esto es,* $\sigma\Phi_0 = \Phi_0 T$, *para todo* $\sigma \in \mathrm{Deck}(\tilde{X}/X)$.

Prueba: De la Propiedad 1-v), se tiene que $\Phi_0' = (1/z)B\Phi_0$. Además

$$\begin{aligned} \sigma\Phi_0 = \sigma \exp(B \log) &= \exp(B\sigma \log) = \exp(B(\log + 2\pi i)) \\ &= \exp(B \log)\exp(2\pi i B) = \Phi_0 T. \end{aligned}$$

□

Teorema 4. *Sea* $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathcal{O}(X))$, *donde* $X = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < R\}$. *Entonces*

$$w' = Aw \tag{2.4}$$

tiene un sistema fundamental de soluciones $\Phi \in \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}(\tilde{X}))$ *de la forma* $\Phi = \Psi\Phi_0$, *donde* $\Phi_0 = \exp(B \log)$ *para* $B \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$ *y* $\Psi \in \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}(X))$.

Prueba: Sean Φ un sistema fundamental de soluciones de la ecuación (2.4) y $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ tal que $\sigma\Phi = \Phi T$. Por las propiedades de la exponencial sabemos que existe $B \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$ tal que $\exp(2\pi i B) = T$. Entonces, del teorema anterior, $\Phi_0 = \exp(B \log) \in \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}(\tilde{X}))$ es tal que $\sigma\Phi_0 = \Phi_0 T$. Luego $\Psi = \Phi\Phi_0^{-1}$ satisface

$$\sigma\Psi = \sigma(\Phi\Phi_0^{-1}) = \sigma\Phi.(\sigma\Phi_0)^{-1} = (\Phi T)(\Phi_0 T)^{-1} = \Psi.$$

□

Definición 2. Sea $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathcal{O}(X))$, donde $X = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < R\}$. El origen $0 \in \mathbb{C}$ es llamado *punto singular regular* de la ecuación diferencial

$$w' = Aw,$$

si Ψ, como en el teorema anterior, tiene a lo más un polo en el origen.

Para información del lector enunciamos el siguiente resultado.

Teorema 5. *Si $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathcal{O}(X))$, donde $X = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < R\}$, tiene a lo más un polo en el origen de primer orden entonces el origen es un punto singular regular de la ecuación diferencial $w' = Aw$.*

3. Fibrados Holomorfos

En la siguiente definición $K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

Definición 3. Un K- *fibrado vectorial* de rango n sobre una variedad M, es un conjunto E junto con una aplicación $\pi : E \longrightarrow M$ tal que

1. Para todo $p \in M$, $\pi^{-1}(p)$ es un K-espacio vectorial de $\dim_K \pi^{-1}(p) = n$.

2. Existen $V_j \subseteq M$ abiertos y $F_j : V_j \times K^n \longrightarrow \pi^{-1}(V_j)$ biyecciones, llamadas *trivializaciones*, que satisfacen las siguientes propiedades:

   i) $M = \bigcup V_j$,

ii) $\pi F_j = \pi_1$, donde π_1 es la proyección $\pi_1(x, v) = x$.

iii) Para cada $p \in V_j$, $F_j : \{p\} \times K^n \to \pi^{-1}(p)$ es un K-isomorfismo de espacios vectoriales.

iv) Si denotamos por $V_{jk} = V_j \cap V_k \neq \emptyset$, las aplicaciones $F_k^{-1} F_j : V_{jk} \times K^n \longrightarrow V_{jk} \times K^n$ son homeomorfismos.

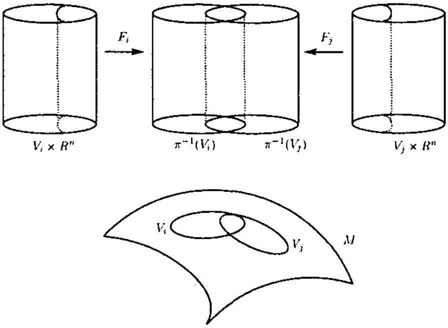

Figura 1: Coordenadas de un fibrado lineal

Observación 1. En V_{jk} los $F_k^{-1} F_j$ son de la forma $F_k^{-1} F_j(p, v) = (p, f_{kj}(p) \cdot v)$, de la parte *ii)* y *(iii)* de la Definición 3, en V_{jk} están definidas las funciones f_{kj} con valores en $GL(n, K)$. Estas funciones

$$f_{kj} : V_{jk} \longrightarrow GL(n, K)$$

son llamadas *funciones de transición* y satisfacen las siguientes propiedades:

$$\begin{cases} f_{jj} = I, & \text{en } V_j \\ f_{jk} \cdot f_{kj} = I & \text{en } V_{kj} \\ f_{jk} \cdot f_{kh} \cdot f_{hj} = I & \text{en } V_{jkh} \end{cases}$$

donde $I \in GL(n, K)$ es la identidad. Estas relaciones son llamadas *condi-*

ciones de cociclo. Verifiquemos la segunda propiedad. En V_{jk} se tiene:

$$\begin{aligned} (F_j^{-1}F_k)F_k^{-1}F_j(p,v) &= F_j^{-1}F_k(p, f_{kj}(p)\cdot v) \\ (p,v) &= (p, f_{jk}\cdot f_{kj}\cdot v) \end{aligned}$$

Análogamente puede verificarse las otras.

El fibrado es topológico, diferenciable, C^k u holomorfo según que los f_{jk} ó $F_j^{-1}F_k$ posean estas propiedades para todo j,k. Las condiciones de cociclo determinan el fibrado y permiten reconstruirlo. Además, los objetos definidos sobre los fibrados localmente se expresan en base a los cociclos. Estos comentarios se harán evidentes conforme probemos algunas propiedades. Pero primero, será conveniente decir cuándo dos fibrados son isomorfos; esto es esencial, pues los fibrados serán indistinguibles desde este punto de vista.

Definición 4. Sean $\pi_1 : E_1 \to M$ y $\pi_2 : E_2 \to M$ fibrados vectoriales. Una aplicación $\varphi : E_1 \to E_2$ es un *morfismo* de fibrados vectoriales si:

1. $\varphi|_{\pi_1^{-1}(p)} : \pi_1^{-1}(p) \to \pi_2^{-1}(\varphi(p))$ es una transformación lineal.
2. El diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\varphi} & E_2 \\ \pi_1\downarrow & & \downarrow\pi_2 \\ M & \xrightarrow{Id_M} & M \end{array}$$

conmuta.

Si existe otro morfismo de fibrados ψ tal que $\psi\varphi = Id_{E_2}$ y $\varphi\psi = Id_{E_1}$ entonces φ será llamado *isomorfismo* de los fibrados π_1 y π_2.

Relaciones fundamentales de los morfismos: Si φ es un morfismo de los fibrados $\pi_1 : E_1 \to M$ y $\pi_2 : E_2 \to M$ cuyas trivializaciones son $F_j : V_j \times K^n \longrightarrow \pi_1^{-1}(V_j)$ y $G_j : V_j \times K^n \longrightarrow \pi_2^{-1}(V_j)$ respectivamente. Entonces, $\varphi_j = G_j^{-1}\varphi F_j$ es de la forma $\varphi_j(x,v) = (x, a_j(x)v)$ donde $a_j : V_j \to \mathrm{M}(n\times n, K)$ ($a_j : V_j \to \mathrm{GL}(n,K)$ si φ es un isomorfismo).

Luego, para otro índice i, $\varphi_i = G_i^{-1}\varphi F_i$. Así, en la intersección V_{ij} tenemos la siguiente relación

$$G_i\varphi_i F_i^{-1} = G_j\varphi_j F_j^{-1}$$

que equivale a la relación $\varphi_i F_i^{-1}F_j = G_i^{-1}G_j\varphi_j$ en V_{ij}. Luego aplicado a (x, v) conseguimos

$$(x, a_i f_{ij}(x)v) = \varphi_i F_i^{-1}F_j(x,v) = G_i^{-1}G_j\varphi_j(x,v) = (x, g_{ij}a_j(x)v).$$

De esto tenemos la *relación fundamental* que determina un morfismo de fibrado.

$$\mathbf{a_i f_{ij} = g_{ij} a_j}, \quad \text{en } \mathbf{V_{ij}}. \tag{3.1}$$

Recíprocamente, dadas las funciones $a_j : V_j \to GL(n, K)$ tales que $a_i f_{ij} = g_{ij}a_j$ en V_{jk}, podemos construir un isomorfismo del fibrados $\varphi : E_1 \longrightarrow E_2$ definiendo

$$\varphi|_{V_j} = G_j\varphi_j F_j^{-1}, \text{ donde } \varphi_j(p, v) = (p, a_j(p).v)$$

pues en V_{jk} tenemos la identidad $F_i^{-1}\varphi_i G_i = F_j^{-1}\varphi_j G_j$, ya que

$$\varphi_i F_i F_j^{-1}(x, v) = (x, a_i f_{ij}(x)v) = (x, g_{ij}a_j(x)v) = G_i G_j^{-1}\varphi_j(x,v).$$

Proposición 1. Sea M una variedad, con $M = \bigcup V_j$ un cubrimiento por abiertos de M. Sean $f_{jk} : V_{jk} \xrightarrow{C^0} GL(n, K)$ aplicaciones que satisfacen las condiciones de cociclo. Entonces, existe un fibrado $\pi : E \longrightarrow M$ cuyas trivializaciones son

$$F_j : V_j \times K^m \longrightarrow \pi^{-1}(V_j)$$

tales que

$$F_k^{-1}F_j(p, v) = (p, f_{kj}(p) \cdot v).$$

Además, este fibrado es único salvo isomorfismos.

Prueba: *Existencia:* Como en la construcción TM, consideremos

$$\widetilde{E} = \bigcup_j \{j\} \times V_j \times K^n$$

y la relación definida como

$$(j,p,v) \sim (k,q,w) \longleftrightarrow p = q \text{ y } f_{kj}(p) \cdot v = w$$

Gracias a que la familia $\{f_{ij}\}$ donde las aplicaciones f_{ij} satisfacen las condiciones de cociclo, la relación $\sim$ es de equivalencia. Si consideramos el cociente $E = \widetilde{E}/\sim$ tenemos el fibrado definido por

$$\begin{array}{rccc} \pi: & E & \longrightarrow & M \\ & [j,p,v] & \longmapsto & p \end{array}$$

Unicidad salvo isomorfismos: Dos fibrados con el mismo cociclo son isomorfos. Para probar ello, basta tomar $a_i : V_i \to GL(n,K)$, siendo $a_i(p)$ la matriz identidad de orden $n \times n$ para todo i. Luego tenemos $a_i f_{ij} = f_{ij} a_j$, que es justamente la relación (3.1) y, a partir de ella, se puede construir el isomorfismo como ya vimos. □

Ejemplo 2 (Fibrado Trivial). Sea M una variedad, el *fibrado trivial* es $\pi : M \times K^n \longrightarrow M$ donde $\pi(p,v) = p$. Observe que, $Id : M \times K^m \longrightarrow \pi^{-1}(M)$ es la trivialización. Por definición de fibrado, todo fibrado vectorial es localmente trivial.

Un fibrado vectorial isomorfo al fibrado trivial también es llamado *trivial.*

4. Haces

Definición 5. Sean X un espacio topológico y $\mathfrak{I}$ una base para la topología de X. Un *prehaz* de grupos abelianos sobre X es un par $(\mathcal{F}, \rho)$ consistiendo de

i) Una familia $\mathcal{F} = (\mathcal{F}(U))_{U\in\mathfrak{I}}$ de grupos abelianos y

ii) Una familia $\rho = (\rho_V^U)_{U,V\in\mathfrak{I},V\subset U}$ de homomorfismos de grupos $\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$, con las siguientes propiedades:

$$\rho_U^U = id_{\mathcal{F}(U)} \text{ para todo } U \in \mathfrak{I},$$

$$\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U \text{ para } W \subset V \subset U.$$

Ejemplo 3. Sea X un espacio topológico. Dado $U \subset X$, sea $\mathcal{C}(U)$ el espacio vectorial de todas las funciones continuas $f : U \to \mathbb{C}$. Para $V \subset U$ sea $\rho_V^U : \mathcal{C}(U) \to \mathcal{C}(V)$ la restricción usual. Entonces $(\mathcal{C}, \rho)$ es un prehaz de espacios vectoriales sobre X.

Definición 6. Un prehaz $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico X es llamado *haz* si para todo conjunto abierto $U \subset X$ y para toda familia de abiertos $U_i \subset U$, $i \in I$ tal que $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ las siguientes condiciones, llamadas Axiomas de Haces, son satisfechas:

I) Si $f, g \in \mathcal{F}(U)$ son elementos tales que $\rho_{U_i}^U(f) = \rho_{U_i}^U(g)$ para todo $i \in I$, entonces $f = g$.

II) Dados los elementos $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$, $i \in I$ tales que

$$\rho_{U_i\cap U_j}^{U_i}(f_i) = \rho_{U_i\cap U_j}^{U_j}(f_j), \text{ para todo } i, j \in I,$$

entonces existe un $f \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\rho_{U_i}^U(f) = f_i$, para todo $i \in I$.

5. Cohomología de Haces

Sean X un espacio topológico, $\mathcal{F}$ un haz de grupos abelianos sobre X y $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ un cubrimiento de X, esto es $X = \bigcup_{i\in I} U_i$. Para $q = 0, 1, 2$ definimos el q-ésimo grupo de cadenas de $\mathcal{F}$ con respecto a $\mathfrak{U}$ como

$$C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \prod_{(i_0,\ldots,i_q)\in I^{q+1}} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_q}).$$

Los elementos de este grupo son llamados q-cocadenas. A continuación definimos el operador coborde

$$\delta : C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

$$\delta : C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to C^2(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

como sigue:
i) Para $(f_i)_{i\in I} \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ sea $\delta((f_i)_{i\in I}) = (g_{ij})_{i,j\in I}$, donde

$$g_{ij} = \rho^{U_j}_{U_i\cap U_j}(f_j) - \rho^{U_i}_{U_i\cap U_j}(f_i) \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j).$$

ii) Para $(f_{ij})_{i,j\in I} \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ sea $\delta((f_{ij})_{i,j\in I}) = (g_{ijk})_{i,j,k\in I}$ donde

$$g_{ijk} = \rho^{U_j\cap U_k}_{U_i\cap U_j\cap U_k}(f_{jk}) - \rho^{U_i\cap U_k}_{U_i\cap U_j\cap U_k}(f_{ik}) + \rho^{U_i\cap U_j}_{U_i\cap U_j\cap U_k}(f_{ij}) \in \mathcal{F}(U_i\cap U_j\cap U_k).$$

Esos operadores de cobordes son homomorfismos de grupos. Sea

$$Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \mathrm{Ker}(C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C^2(\mathfrak{U}, \mathcal{F})),$$

$$B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \mathrm{Im}(C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C^1((U), \mathcal{F})).$$

Los elementos de $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ son llamados 1-*cociclos*. Así, por definición, una 1-cocadena $(f_{ij}) \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ es un cociclo precisamente cuando

$$\rho^{U_i\cap U_j}_{U_i\cap U_j\cap U_k}(f_{ij}) + \rho^{U_j\cap U_k}_{U_i\cap U_j\cap U_k}(f_{jk}) = \rho^{U_i\cap U_k}_{U_i\cap U_j\cap U_k}(f_{ik}).$$

Esta relación es llamada relación de cociclos e implica

$$f_{ii} = 0, \ f_{ij} = -f_{ji},$$

haciendo $i = j = k$ para la primera relación y $i = k$ para la segunda.

Los elementos de $B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ son llamados 1-*cobordes.* En particular todo coborde es un cociclo. Así, un cociclo $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ es coborde si y sólo si existe una 0-cadena $(g_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ tal que

$$f_{ij} = \rho^{U_j}_{U_i\cap U_j}(g_j) - \rho^{U_i}_{U_i\cap U_j}(g_i), \text{ para todo } i, j \in I.$$

Definición 7. El grupo cociente

$$H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})/B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

es llamado el *primer grupo de cohomología con coeficientes* en $\mathcal{F}$ con respecto al cubrimiento $\mathfrak{U}$. Sus elementos son llamados *clases de cohomología* y dos cociclos que pertenecen a la misma clase de cohomología son llamados *cohomólogos*.

Se puede definir el grupo de cohomología intrínseco (independiente de los cubrimientos) de un haz $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico X denotado por $H^1(X, \mathcal{F})$ y este grupo es nulo si $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ para todo $\mathfrak{U}$ cubrimiento de X.

6. Existencia de Secciones de Fibrados Holomorfos

Comenzamos esta sección enunciando el siguiente resultado.

Teorema 6. *Sean Y un subconjunto abierto relativamente compacto de una superficie de Riemann X y E un fibrado vectorial holomorfo sobre X. Entonces $H^1(Y, \mathcal{O}_E)$ es finito dimensional.*

Ver [2], página 224.

Sea E un fibrado vectorial holomorfo de rango n sobre una superficie de Riemann X. Sea $U \subset X$ un conjunto sobre el cual tenemos una carta $h : E_U \to U \times \mathbb{C}^n$ y a un punto de U. Una sección $s \in \mathcal{O}_E(U - \{a\})$ se puede escribir en esta carta como

$$h \circ s(q) = (q, f(q)), \text{ en } U - \{a\},$$

donde $f = (f_1, \ldots, f_n) \in \mathcal{O}(U - \{a\})^n$. El punto a es llamado *un polo de orden m* de s, si todo los f_j tienen un polo de orden menor o igual a m o una singularidad removible en a, y al menos un f_j tiene un polo de orden m en a. Esta definición es independiente de la carta considerada.

Definición 8. Una *sección meromorfa* de E sobre un conjunto abierto $Y \subset X$ es una sección $s \in \mathcal{O}_E(Y')$ sobre un subconjunto $Y' \subset Y$ tal que

i) $Y - Y'$ es un subconjunto discreto de Y y

ii) s tiene un polo en todo $a \in Y - Y'$.

Corolario 2. *Todo fibrado holomorfo sobre una superficie de Riemann compacta tiene una sección global meromorfa no idénticamente nula.*

Prueba: Para ello basta probar: si Y es relativamente compacta de una superficie de Riemann Z y E es un fibrado vectorial Z entonces dado $a \in Y$ arbitrario existe una sección meromorfa de E sobre Y la cual tiene un polo en a y es holomorfa en $Y - \{a\}$. En efecto, sea (U_1, z) una vecindad coordenada de a con $z(a) = 0$. Sea $U_2 = Z - \{a\}$. Entonces $\mathfrak{U} = (U_1, U_2)$ es un cubrimiento abierto de Z. Las funciones z^{-j} son holomorfas sobre $U_1 \cap U_2 = U_1 - \{a\}$ y representan cociclos $\zeta_j \in Z^1(\mathfrak{U} \cap Y, \mathcal{O}_E)$, $j = 1, \ldots, k+1$ donde $k = \dim_{\mathbb{C}} H^1(Y, \mathcal{O}_E)$. Luego, los cociclos $\zeta_j|_Y \in Z^1(\mathfrak{U} \cap Y, \mathcal{O}_E)$, $j = 1, \ldots, k+1$ son linealmente dependientes módulo coborde. Luego, existen $c_1 \ldots, c_{k+1} \in \mathbb{C}$, no todos ceros, y una cocadena $\eta = (s_1, s_2) \in C^0(\mathfrak{U} \cap Y, \mathcal{O}_E)$ tales que

$$c_1\zeta_1 + \cdots + c_{k+1}\zeta_{k+1} = \delta(\eta) \text{ con respecto a } \mathfrak{U} \cap Y,$$

esto es

$$\Sigma_{j=1}^{k+1} c_j z^{-j} = s_2 - s_1 \text{ sobre } U_1 \cap U_2 \cap Y.$$

Luego, existe una sección $s \in \mathcal{M}_E(Y)$ que coincide con $s_1 + \Sigma_{j=1}^{k+1} c_j z^{-j}$ sobre $U_1 \cap Y$ y es igual a s_2 sobre $U_2 \cap Y = Y - \{a\}$. □

7. Trivialidad de Fibrados

Teorema 7. Sea E un fibrado vectorial holomorfo de rango n sobre una superficie de Riemann X. Sean $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de X, $h_i : E_{U_i} \to U_i \times \mathbb{C}^n$ un atlas holomorfo para E y $(g_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}))$ el correspondiente cociclo de las funciones de transición. Entonces son equivalentes:

i) El fibrado E es holomórficamente trivial.

ii) Existen n secciones holomorfas globales $s_1, \ldots, s_n$ de E tales que para todo punto $x \in X$ los vectores $s_1(x), \ldots, s_n(x) \in E_x$ son linealmente independientes.

iii) El cociclo (g_{ij}) se factoriza, esto es, existe una cocadena $(g_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}))$ con $g_{ij} = g_i g_j^{-1}$ en $U_i \cap U_j$ para todo $i, j \in I$.

Ver [2], página 228.

Lema 1. *Sean X una superficie de Riemann no compacta y E un fibrado vectorial holomorfo sobre X. Si E tiene una sección global meromorfa no trivial, entonces E también tiene una sección holomorfa que no tiene ceros.*

Prueba: Sean f una sección meromorfa no trivial de E sobre X y $A \subset X$ un subconjunto discreto consistiendo de ceros y polos de f. Sean $a \in A$ y $h : E_U \to U \times \mathbb{C}^n$ una carta holomorfa de E sobre una vecindad abierta U de a. Relativo a esta carta tenemos la representación $h \circ f(p) = (p, (f_1(p), \ldots, f_n(p)))$, donde $(f_1, \ldots, f_n) \in \mathcal{M}(U)^n$. Sea $k(a)$ el mínimo de los órdenes de f_i en a. Por el Teorema de Weierstrass existe una función meromorfa $\varphi \in \mathcal{M}(X)$ la cual en cada punto $a \in A$ tiene orden $-k(a)$ y es holomorfa y no nula en $X - A$. Entonces $F = \varphi f$ es una sección holomorfa de E la cual es no nula. $\square$

Teorema 8. *Todo fibrado holomorfo E sobre una superficie de Riemann no compacta X es holomórficamente trivial.*

Prueba:

i) Si el rango de E es 1. En efecto, sea $\emptyset \neq Y_0 \Subset Y_1 \Subset Y_2 \Subset \ldots$ una secuencia de dominios de Runge relativamente compacto en X con $X = \bigcup Y_i$. Por el Corolario 2 sobre todo Y_i existe una sección meromorfa no nula. Luego, del lema anterior, sobre los mismos dominios existen secciones holomorfas no nulas. Por lo tanto E es trivial sobre cada Y_i por el Teorema 7. Por el Teorema de Aproximación de Runge toda sección holomorfa de E sobre Y_i puede ser aproximada uniformemente sobre subconjuntos compactos por secciones holomorfas de E sobre Y_{i+1}. Sea $f_0 \in \mathcal{O}_E(Y_0)$ que es no cero en algún punto $a \in Y_0$. A partir de ello podemos construir una sucesión $f_i \in \mathcal{O}_E(Y_i)$, $i \geq 1$ tal que $\lim f_i(a) \neq 0$ y tal que para cada $i \in \mathbb{N}$ la sucesión $(f_i|_{Y_j})_{i>j}$ converge en $\mathcal{O}_E(Y_j)$. Entonces el límite de la sucesión (f_i) es una sección $f \in \mathcal{O}_E(X)$ la cual no se anula en ningún punto de X.

ii) Si el rango de E es mayor que 1. En efecto asumamos inicialmente que este fibrado admita una sección holomorfa $F_n \in \mathcal{O}_E(X)$ que no se anula en ningún punto de X. Puesto que E es localmente trivial, existe un cubrimiento $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ de X con la propiedad que para todo $i \in I$ existan seccions $F_1^i, \ldots F_{n-1}^i \in \mathcal{O}_E(U_i)$ tales que $F_1^i(x), \ldots, F_{n-1}^i(x), F_n(x)$ son linealmente independientes para todo $x \in U_i$. Sobre la intersección $U_i \cap U_j$ tomamos la siguiente relación

$$\begin{pmatrix} F^i \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G^{ij} & a^{ij} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^j \\ F_n \end{pmatrix},$$

donde F^i denota la columna de entradas $F_1^i, \ldots F_{n-1}^i$, la matriz $G^{ij} \in \mathrm{GL}(n-1, \mathcal{O}(U_i \cap U_j))$ y a^{ij} es un vector columna con $n-1$ filas, cuyas entradas pertenecen a $\mathcal{O}(U_i \cap U_j)$. Entonces

$$G^{ij} G^{jk} = G^{ik} \text{ sobre } U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Por hipótesis de inducción existen matrices $G^i \in \mathrm{GL}(n-1, \mathcal{O}(U_i))$ con

$$G^{ij} = G^i (G^j)^{-1} \text{ sobre } U_i \cap U_j.$$

Sea $\tilde{F}^i = (G^i)^{-1} F^i$, usando la relación anterior tenemos

$$\begin{pmatrix} \tilde{F}^i \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b^{ij} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{F}^j \\ F_n \end{pmatrix},$$

para algún $b^{ij} \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)^{n-1}$. Sobre $U_i \cap U_j \cap U_k$ tenemos la relación $b^{ij} + b^{ik} = b^{ik}$. Como $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) = 0$, podemos hallar un vector columna $b^i \in \mathcal{O}(U_i)^{n-1}$ teniendo $n-1$ filas con

$$b^{ij} = b^j - b^i \text{ sobre } U_i \cap U_j.$$

Sea $\hat{F}^i = \tilde{F}^i - b^i F_n$. Entonces de la última relación tenemos

$$\begin{pmatrix} \hat{F}^i \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{F}^j \\ F_n \end{pmatrix}, \text{ sobre } U_i \cap U_j.$$

Por lo tanto los $\hat{F}^i$ forman una $(n-1)$-upla $(F_1, \ldots, F_{n-1}) \in \mathcal{O}_E(X)^{n-1}$. Por construcción ellos son linealmente independientes y por lo tanto E es holomórficamente trivial.

Sólo resta demostrar que existe una sección global, pero esto es consecuencia del Teorema 2, del Lema anterior y del Teorema de Aproximación de Runge. □

Corolario 3. *Sea X una superficie de Riemann no compacta. Entonces* $H^1(X, \mathrm{GL}(n, \mathcal{O})) = 0$.

8. Solución del Problema de Riemann-Hilbert

Sea G un grupo y A un G-módulo, esto es un grupo abeliano con una operación

$$\begin{array}{ccc} G \times A & \rightarrow & A \\ (\sigma, a) & \rightarrow & \sigma a \end{array}$$

que satisface las siguientes propiedades:

i) $\sigma(a+b) = \sigma a + \sigma b$,

ii) $\sigma(\tau a) = (\sigma\tau)a$,

iii) $\varepsilon a = a$ para todo $\sigma, \tau \in G$ y $a, b \in A$ y $\varepsilon \in G$ es la identidad de este grupo. Una aplicación

$$\begin{array}{ccc} G & \rightarrow & A \\ \sigma & \rightarrow & a_\sigma \end{array}$$

es llamado *homomorfismo cruzado* si

$$a_{\sigma\tau} = a_\sigma + \sigma a_\tau, \text{ para todo } \sigma, \tau \in G.$$

Observe que si G opera trivialmente en A, esto es, $\sigma a = a$ para todo $\sigma \in G$, entonces un homomorfismo cruzado es un homomorfismo de grupos. El conjunto de todos los homomorfismos cruzados de G en A es denotado por $Z^1(G, A)$

Ejemplo 4. Fijado $f \in A$, definimos

$$\begin{array}{ccc} G & \rightarrow & A \\ \sigma & \rightarrow & a_\sigma = f - \sigma f, \end{array}$$

y como

$$a_{\sigma\tau} = f - \sigma\tau f = f - \sigma f + \sigma f - \sigma\tau f = (f - \sigma f) + \sigma(f - \tau f) = a_\sigma + \sigma a_\tau,$$

se tiene que es un homomorfismo cruzado. Estos homomorfismos son llamados *cobordes* y forman un subgrupo de $Z^1(G, A)$ denotado por $B^1(G, A)$.

El cociente

$$H^1(G, A) = Z^1(G, A)/B^1(G, A)$$

es llamado el *grupo de cohomología* de G con coeficientes en el G-módulo A.

Ejemplo 5. Sea $p : Y \rightarrow X$ un cubrimiento holomorfo no ramificado entre superficies de Riemann. Dado $f \in \mathcal{O}(Y)$, definimos

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Deck}(Y/X) & \rightarrow & \mathcal{O}(Y) \\ \sigma & \rightarrow & a_\sigma = f - \sigma f, \end{array}$$

el cual es un homomorfismo cruzado y cada a_σ es llamado *sumando de automorfismo.* Debemos recalcar que si el cubrimiento de Galois y los sumando de automorfismo son ceros entonces f baja a X por medio de p.

Si $p : Y \to X$ es de Galois y si $G = \text{Deck}(Y/X)$, todo punto $x \in X$ tiene una vecindad abierta conexa U tal que

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$$

donde los V_λ son conjuntos abiertos disjuntos de Y y las restricciones $p|_{V_\lambda} : V_\lambda \to U$ son homeomorfismos. Ahora construimos un homeomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \varphi : p^{-1}(U) & \to & U \times G \\ y & \to & \varphi(y) = (p(y), \sigma). \end{array}$$

En G se ha considerado la topología discreta y $\sigma \in G$ es escogida de la siguiente manera: fijemos $\lambda_0 \in \Lambda$ y sea $y \in V_\lambda$ sea $\sigma(V_{\lambda_0}) = V_\lambda$, la cual existe y es única por ser p de Galois. El homeomorfismo φ es llamado de *G-carta,* toda G-carta tiene una *descomposición* $\varphi = (p, \eta)$ donde $\eta : p^{-1}(U) \to G$ es una aplicación tal que

$$\eta(\tau y) = \tau\eta(y) \text{ para todo } y \in p^{-1}(U) \text{ y } \tau \in G.$$

Teorema 9. *Sean X e Y superficies de Riemann no compactas, $p : Y \to X$ un cubrimiento holomorfo no ramificado de Galois. Entonces dado un homomorfismo*

$$\begin{array}{rcl} T : \text{Deck}(Y/X) & \to & \text{GL}(n, \mathbb{C}) \\ \sigma & \to & T_\sigma \end{array}$$

existe una aplicación holomorfa $\Phi : Y \to \text{GL}(n, \mathbb{C})$ con los factores de automorfismo T_σ, esto es, $\sigma\Phi = \Phi T_\sigma$ para todo $\sigma \in \text{Deck}(Y/X)$.

Prueba: Considere un cubrimiento abierto $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ de X y G-cartas $\varphi_i = (p, \eta_i) : p^{-1}(U_i) \to U_i \times G$ y definamos sobre $Y_i = p^{-1}(U_i)$ funciones

$\Psi_i : Y_i \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ por $\Psi_i(y) = T_{\eta_i(y)^{-1}}$ para todo $y \in Y_i$. Puesto que Ψ_i es localmente constante, es en particular holomorfa.
Sea $y \in Y_i$ y $\sigma \in G$. Entonces

$$\sigma\Psi_i(y) = \Psi_i(\sigma^{-1}y) = T_{\eta_i(\sigma^{-1}y)^{-1}} = T_{\eta_i(y)^{-1}\sigma} = T_{\eta_i(y)^{-1}}T_\sigma = \Psi_i(y)T_\sigma.$$

Así, las funciones Ψ_i son automorfismos sobre Y_i.

Luego los productos $F_{ij} = \Psi_i\Psi_j^{-1} \in \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}(Y_i \cap Y_j))$ son invariantes por transformaciones de recubrimiento. Así ellos pueden ser considerados como elementos de $\mathrm{GL}(n, \mathcal{O}(U_i \cap U_j))$ y por lo tanto definen un cociclo $F_{ij} \in Z^{-1}(\mathfrak{U}, \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}))$. Como $H^1(X, \mathrm{GL}(n, \mathcal{O})) = 0$, este cociclo es coborde. Luego existen $F_i \in \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}(U_i))$ tales que

$$F_{ij} = F_i F_j^{-1} \text{ sobre } U_i \cap U_j$$

Ahora considere los F_i como elementos de $\mathrm{GL}(n, \mathcal{O}(Y_i))$ que son invariantes bajo transformaciones de recubrimiento y sea

$$\Phi_i = F_i^{-1}\Psi_i \in \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}(Y_i)).$$

Entonces

$$\sigma\Phi_i = F_i^{-1}\sigma\Psi_i = F_i^{-1}\Psi_i T_\sigma = \Phi_i T_\sigma, \text{ para todo } \sigma \in G.$$

Sobre cualquier intersección $Y_i \cap Y_j$ tenemos

$$\Phi_i^{-1}\Phi_j = \Psi_i^{-1}F_iF_j^{-1}\Psi_j = \Psi_i^{-1}F_{ij}\Psi_j = \Psi_i^{-1}\Psi_i\Psi_j^{-1}\Psi_j = 1,$$

esto es, $\Phi_i = \Phi_j$ sobre $Y_i \cap Y_j$, determinando una función global $\Phi \in \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}(Y))$ con $\sigma\Phi = \Phi T_\sigma$ para todo $\sigma \in G$. □

Corolario 4. *Sean X una superficie de Riemann no compacta y*

$$\begin{array}{rcl} T : \pi_1(X) & \to & \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \\ \sigma & \to & T_\sigma \end{array}$$

un homomorfismo de grupos. Entonces existe $A \in \mathrm{M}(n \times n, \Omega(X))$ y un sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial $dw = Aw$ sobre el cubrimiento universal de X el cual tiene a T_σ como factor de automorfismo.

Prueba: Por (2.1) basta aplicar el teorema anterior al cubrimiento universal $p : \tilde{X} \to X$. $\square$

Lema 2. *Sean X una superficie de Riemann no-compacta, $S \subset X$ un conjunto cerrado discreto y $X' = X - S$. Suponga que $p : Y \to X'$ es el cubrimiento universal de X' y (U, z) una vecindad coordenada de un punto $a \in S$ tal que:*

i) $z(U) \subset \mathbb{C}$ *es un disco unitario* $z(a) = 0$.

ii) $U \cap S = \{a\}$. *Si Z es una componente conexa de $p^{-1}(U - \{a\})$, entonces $p|_Z : Z \to U - \{a\}$ es un cubrimiento universal de $U - \{a\}$.*

Teorema 10. *Sean X una superficie de Riemann no-compacta, S es un subconjunto discreto y cerrado de X, $X' = X - S$, y*

$$\begin{array}{rcl} T : \pi_1(X') & \to & \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \\ \sigma & \to & T_\sigma \end{array}$$

un homomorfismo dado. Entonces existe una ecuación diferencial $dw = Aw$, donde $A \in \mathrm{M}(n \times n, \Omega(X'))$ la cual tiene un punto regular singular en todo punto $a \in S$ y un sistema fundamental de soluciones $\Phi \in \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}(Y))$ de $dw = Aw$ del cubrimiento universal $p : Y \to X'$ con los factores de automorfismo T_σ.

Prueba: Sea $S = \{a_i : i \in I\}$. Para todo i escoja una vecindad coordenada (U_i, z_i) de a_i, que no contiene otro punto de S, satisfaciendo todas las condiciones $i)$ y $ii)$ del Lema 2. Podemos asumir que $0 \notin I$, y considerar $J = I \cup \{0\}$ y sea $U_0 = X'$. Entonces $\mathfrak{U} = (U_j)_{j \in J}$ es un cubrimiento abierto de X. Para $i \neq j$ tenemos $U_i \cap U_j \subset X'$. Sea $Y_0 = Y$ y $Y_i = p^{-1}(U_i - \{a_i\})$ para todo $i \in I$.

Por el último teorema existen funciones $\Psi_0 \in \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}(Y_0))$ tales que $\sigma\Psi_0 = \Psi_0 T_\sigma$ para todo $\sigma \in \pi_1(X')$. Para todo $i \in I$ existe, por el Teorema 4, $\Psi_i \in \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}(Y_i))$ el cual tiene puntos singulares regulares y tiene el mismo comportamiento de automorfismo que $\Psi_0|_{Y_i}$. Por lo tanto, para todo $i, j \in I$, $i \neq j$

$$F_{ij} = \Psi_i \Psi_j^{-1} \in \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}(Y_i \cap Y_j))$$

es invariante bajo transformaciones de recubrimiento y puede ser considerado como un elemento $F_{ij} \in \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}(U_i \cap U_j))$. Para todo $j \in J$, sea $F_{jj} = 1 \in \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}(U_j))$. Entonces

$$(F_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}))$$

es un cociclo. Como $H^1(X, \mathrm{GL}(n, \mathcal{O})) = 0$ este cociclo es coborde. Luego existen $F_i \in \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}(U_i))$ tales que

$$F_{ij} = F_i F_j^{-1} \text{ sobre } U_i \cap U_j.$$

Consideremos para todo $j \in J$

$$\Phi_j = F_j^{-1} \Psi_j \in \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}(Y_j)).$$

Como en el teorema anterior los Φ_j determinan una función global $\Phi \in \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}(Y))$ la cual satisface $\sigma\Phi = \Phi T_\sigma$ para todo $\sigma \in \pi_1(X)$. Sobre cada $U_i - \{a_i\}$ tenemos $\Phi = F_i^{-1}\Psi_i$. Como Ψ_i tiene puntos singulares regulares y F_i^{-1} es holomorfo en U_i se tiene que Φ también tiene puntos singulares regulares en los a_i. Como Φ es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial $dw = Aw$ donde $A = d\Phi.\Phi^{-1}$ puede ser considerado como un elemento $A \in \mathrm{M}(n \times n, \Omega(X'))$ puesto que es invariante bajo las transformaciones de recubrimiento. $\square$

9. Apéndice

Teorema 11 (Runge). Sean X una superficie de Riemann no-compacta e Y un subconjunto abierto tal que $X - Y$ no tiene componente conexa compacta. Entonces toda función holomorfa en Y puede ser aproximada uniformemente sobre todo compacto de Y por funciones holomorfas en X.

Ver [2], página 200.

Teorema 12 (Weierstrass). Sobre una superficie de Riemann no-compacta X dados $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos distintos de X sin puntos de acumulación y una sucesión $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{Z}$, existe una función meromorfa $f \in \mathcal{M}^*(X)$ cuyos ceros y polos son los (a_i) con $\mathrm{ord}_{a_i} f = n_i$

Ver [2], página 267.

Referencias

[1] Percy Fernández. *Notas de Fibrados Vectoriales y sus Clases Características.* XXIV Coloquio de la SMP 2006.

[2] Otto Forster. *Lectures on Riemann Surfaces.* Springer 1999.

[3] Rubén Lizarbe. *Métodos Topológicos en Superficies de Riemann.* Tesis IMCA, 2009.

[4] Nancy Saravia. *Cohomología de Haces y Algunas Aplicaciones a Varias Variables Complejas.* Tesis. PUCP 2008.

Abstract

In the ICM (International Congress of Mathematicians) of 1900, Hilbert presents 23 problems that established the course of great part the mathematical investigations of the 20th century. 21° problem is the existence of differential linear equations, with a group of monodromia and prescribed singularities. This article treats this problem on surfaces of not compact Riemann.

Keywords: Riemann Surfaces, Sheaf, Fiber Bundle and Differential Linear Equations.

Percy Fernández Sánchez
Sección Matemáticas,
Departamento de Ciencias,
Pontificia Universidad Católica del Perú
`pefernan@pucp.edu.pe`