

DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE KORTEWEG - DE VRIES

Carlos Rodríguez^{1,2}

Agosto, 2009

Resumen

Se presenta, con bastante detalle, una deducción de la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV) utilizando para esto lo necesario de la teoría del flujo de fluidos incompresibles e irrotacionales y no viscosos. Se considera aquí, que el fluido es un medio continuo de modo que, al considerar un sistema y un volumen de control, se pueden utilizar las herramientas del Cálculo Diferencial e Integral para estudiar sus propiedades.

Clasificación AMS 2000: 35Q53, 37L05.

Palabras Clave: *Ecuaciones dispersivas no lineales, flujo en un canal de fluidos no viscosos, incompresibles e irrotacionales.*

¹ *Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias, UNALM.*

² *Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias, PUCP.*

1. Introducción

La ecuación de Korteweg-de Vries (KdV)

$$u_t + \frac{3}{2} \frac{c_0}{h_0} u u_x + \frac{1}{6} h_0^2 c_0 u_{xxx} = 0$$

es una ecuación que tiene efectos no lineales y dispersivos en el contexto de aguas rasas. Esta ecuación modela la propagación de ondas en un canal de aguas rasas. La situación física es la siguiente: se considera un cuerpo de agua, de profundidad finita bajo la influencia de la gravedad, acotada inferiormente por una superficie impermeable. Ignorando los efectos de viscosidad y suponiendo que el fluido es incompresible e irrotacional, el movimiento es gobernado por las ecuaciones de Euler con condiciones convenientes de frontera en la superficie rígida y sobre la interfase agua-aire. La función u representa la superficie libre. Esta ecuación fue deducida por Korteweg y de Vries. Para hacer la deducción de la KdV será necesario presentar algunos temas directamente relacionados con ella.

1.1. Algo sobre la Mecánica de Fluidos

Un fluido es una sustancia que se deforma continuamente, cuando se le aplica una fuerza, por muy pequeña que ésta sea.

Esta afirmación no hace ninguna diferencia entre un líquido y un gas, pues los principios de la mecánica de fluidos se aplican igualmente. Las moléculas de un gas están mucho más separadas que las de un líquido. En consecuencia, un gas es altamente compresible, y cuando se quita toda presión externa, tiende a expandirse indefinidamente. Es así que un gas solo está en equilibrio cuando está completamente encerrado. Un líquido es relativamente incompresible, y si se quita toda presión, la cohesión entre las moléculas las mantiene unidas, por lo que el líquido no se expande indefinidamente. Por tanto, un líquido puede tener una superficie libre, esto es, una superficie que no experimenta ninguna presión.

Consideramos un sistema el cual se define como una porción fija de materia. Lo esencial de la definición es que la masa del material que comprende el sistema no se altere con el tiempo, aunque su forma y su tamaño puedan variar. Ejemplo de un sistema es una cierta masa de agua encerrada en un recipiente flexible. El agua puede pasar al estado de vapor por medio del calentamiento, con un aumento considerable del volumen en cuestión. Mientras no se produzca una transferencia de masa a través de las paredes del recipiente, no se viola el concepto de sistema. La energía puede cruzar las fronteras del sistema, en forma de calor o trabajo, pero, por definición, no puede existir una transferencia de masa. Todo lo que rodea a un sistema específico se llama *contornos de sistema*.

Para el análisis de fluidos en movimiento los conceptos de sistema y volumen de control son útiles. Las leyes básicas de la mecánica de fluidos establecen la interacción de un sistema con sus alrededores.

Un sistema fluido se refiere a una masa específica de fluido que se encuentra dentro de contornos definidos por una superficie cerrada. La forma del sistema y por tanto de sus contornos pueden cambiar con el tiempo, como cuando un líquido fluye a través de un estrechamiento o cuando un gas se comprime; así como un fluido se mueve y se deforma, así el sistema que lo contiene se mueve y se deforma. El tamaño y la forma de un sistema es completamente opcional.

En contraste, un *volumen de control* se refiere a una zona fija en el espacio que no se mueve y no cambia de forma. Esto es, es una región del espacio a través de la cual circula un fluido.

Sus contornos cerrados se denominan *superficie de control*. De nuevo, el tamaño y la forma del volumen de control es completamente opcional, aunque los contornos se eligen a menudo para hacerlos coincidir con algún contorno sólido u otro contorno natural del flujo. En realidad, la superficie de control puede estar en movimiento por el espacio con respecto a algún sistema de referencia absoluto; esto será aceptable siempre que el movimiento esté limitado a una traslación a velocidad constante.

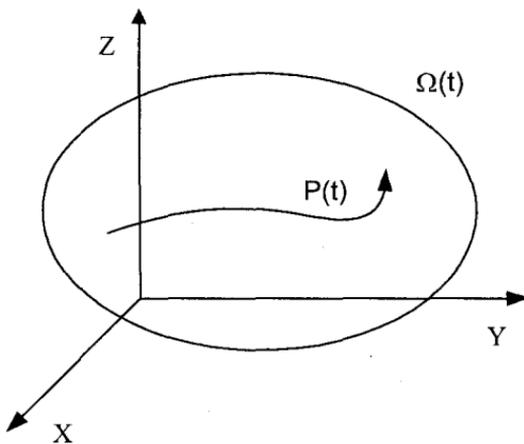
En el estudio de la mecánica de fluidos conviene suponer que tanto gases como líquidos están continuamente distribuidos por toda una región de interés, esto es, el fluido se trata como un medio continuo.

Con la suposición de medio continuo, las propiedades de fluido pueden ser aplicadas uniformemente en todos los puntos en la región en cualquier instante particular. Por ejemplo, la densidad ρ se define en todos los puntos del fluido; puede variar de un punto a otro y de un instante a otro; esto es, en coordenadas cartesianas ρ es una función continua de x, y, z y t , escrita como $\rho(t, x, y, z)$.

2. Las Ecuaciones de Euler y Stokes

Para modelar el movimiento del agua debemos considerar, inicialmente, las ecuaciones de Stokes, las cuales describen la dinámica de los fluidos incompresibles y no viscosos.

Consideremos, por tanto, una porción de fluido que, en un instante dado t , ocupa una región del espacio $\Omega(t)$ y que se mueve siguiendo un campo de velocidades $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{x} = (x, y, z)$.



Eso significa que una cualquiera de sus partículas individuales describe una trayectoria $\mathbf{P}(t)$ tal que

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{u}(t, \mathbf{P}).$$

Sea $\rho = \rho(t, \mathbf{x})$ la densidad del fluido en la posición \mathbf{x} en el instante t , entonces la masa del fluido que ocupa la región $\Omega(t)$ está dada por

$$m(t) = \int_{\Omega(t)} \rho(t, \mathbf{x}) dV,$$

donde $dV = dx dy dz$ denota el elemento de volumen.

La ley de la conservación de la masa dice que $m(t)$ es constante en el tiempo, esto es, $m'(t) = 0$ para todo t . Luego, derivando la expresión anterior respecto de t tenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(t, \mathbf{x}) dV = \int_{\Omega(t)} \rho_t(t, \mathbf{x}) dV + \int_{\partial\Omega(t)} \rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (2.1)$$

donde $\partial\Omega(t)$ denota la superficie que delimita $\Omega(t)$ y \mathbf{n} denota el vector unitario normal exterior a $\partial\Omega(t)$ en el punto $\mathbf{x} \in \partial\Omega(t)$.

Por el Teorema de Gauss obtenemos que (2.1) se escribe como

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} [\rho_t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u})] dV = 0.$$

Como $\Omega(t)$ es arbitrario tenemos la ecuación

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0,$$

que describe la ley de conservación de la masa (cuando no hay fuentes y sumideros), en términos de la ecuación de continuidad.

Si suponemos que el fluido es incompresible, $\rho_t = 0$, y homogéneo, $\rho_x = \rho_y = \rho_z = 0$, entonces $\rho(t, \mathbf{x}) = \rho_0 > 0$, la ecuación de continuidad se reduce a

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \quad (2.2)$$

y (2.1) se escribe como

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} dV = 0$$

lo que dice que el volumen de la región $\Omega(t)$ no varía en el tiempo. La cantidad de movimiento del fluido en $\Omega(t)$ es dada por

$$Q(t) = \int_{\Omega(t)} \rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) dV = \rho_0 \int_{\Omega(t)} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) dV.$$

La ley de Newton afirma que la variación de la cantidad de movimiento $Q'(t)$ es igual a la resultante de las fuerzas externas que actúan en $\Omega(t)$. En nuestro problema, podemos suponer que las fuerzas externas que actúan en $\Omega(t)$ son: \mathbf{F}_1 la que es la resultante de la acción de la gravedad actuando en cada partícula de fluido en $\Omega(t)$ y \mathbf{F}_2 la resultante de las fuerzas de interacción del fluido exterior a $\Omega(t)$. Como el campo gravitacional (que se supone constante) es dado por $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$, donde g es la aceleración de la gravedad, tenemos

$$\mathbf{F}_1(t) = \int_{\Omega(t)} \rho_0 \mathbf{g} dV = \int_{\Omega(t)} (0, 0, -\rho_0 g) dV = (0, 0, -gm(t)).$$

Para determinar $\mathbf{F}_2(t)$ vamos a considerar que la viscosidad del fluido es nula (lo que físicamente es razonable para el agua en la mayoría de los casos). Esta hipótesis significa que el fluido que circunscribe una partícula dada actúa sobre la misma exclusivamente por medio de fuerzas provocadas por la presión normal, esto es, fuerzas de la forma $-\mathbf{p}ndS$, donde $\mathbf{p} = p(\mathbf{x})$ es la intensidad de la presión en \mathbf{x} . Asimismo, la resultante de las fuerzas generadas por la presión actuando sobre las partículas de $\Omega(t)$ es dada por

$$\mathbf{F}_2(t) = - \int_{\partial\Omega(t)} p(\mathbf{x}) \mathbf{n} dS,$$

y el Teorema de Gauss nos proporciona

$$\mathbf{F}_2(t) = - \int_{\partial\Omega(t)} p(\mathbf{x}) \mathbf{n} dS = - \int_{\Omega(t)} \nabla p(\mathbf{x}) dV.$$

Por tanto, la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre $\Omega(t)$ es

$$\mathbf{F}(t) = \int_{\Omega(t)} [\rho_0 \mathbf{g} - \nabla p(\mathbf{x})] dV,$$

donde $\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_1(t) + \mathbf{F}_2(t)$.

Por la ley de Newton

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho_0 \mathbf{u} dV = \int_{\Omega(t)} [\rho_0 \mathbf{g} - \nabla p(\mathbf{x})] dV. \quad (2.3)$$

Calculamos ahora la derivada del lado izquierdo de la ecuación anterior. Para cada componente $u_i(t, \mathbf{x})$ del vector velocidad $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ tenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho_0 u_i dV = \int_{\Omega(t)} \rho_0 \frac{\partial u_i}{\partial t} dV + \int_{\partial\Omega(t)} \rho_0 u_i \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS,$$

donde, para simplificar la notación, se han omitido las variables. Por el teorema de Gauss podemos escribir

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho_0 u_i dx = \int_{\Omega(t)} \rho_0 \frac{\partial u_i}{\partial t} dV + \int_{\Omega(t)} \rho_0 \operatorname{div}(u_i, \mathbf{u}) dV.$$

Pero

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u_i, \mathbf{u}) &= \frac{\partial}{\partial x}(u_i, u_j) + \frac{\partial}{\partial y}(u_i, u_j) + \frac{\partial}{\partial z}(u_i, u_j) \\ &= \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial u_i}{\partial z} \right) u_j + u_i \operatorname{div} \mathbf{u}, \end{aligned}$$

y como $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ tenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho_0 u_i dV = \int_{\Omega(t)} \rho_0 \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial u_i}{\partial z} \right) \right) dV.$$

Las ecuaciones anteriores se pueden escribir en forma vectorial como sigue

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega(t)} \rho_0 \mathbf{u} dV \right] = \int_{\Omega(t)} \rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) dV. \quad (2.4)$$

Como $\Omega(t)$ fue elegido arbitrariamente, tenemos de (2.3) y (2.4)

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = \mathbf{g},$$

ecuación que se conoce como la *ecuación de Euler* del movimiento de un fluido.

Las ecuaciones (2.2) y (2.4) proporcionan las ecuaciones generales para la dinámica de fluidos no viscosos

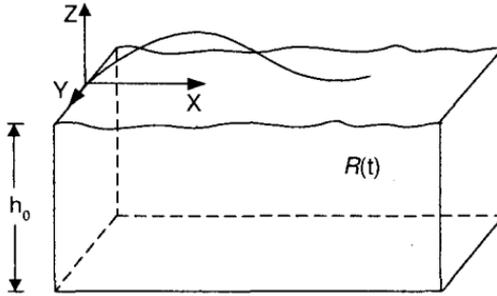
$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = \mathbf{g} \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \end{cases},$$

las que son las *ecuaciones de Stokes*.

3. Ondas en una Superficie Libre

Consideraremos una situación ideal de un canal con fondo liso, acotado en las direcciones x e y y de profundidad constante igual a $h_0 > 0$. Sea $\mathcal{R}(t)$ la región ocupada por el agua (en movimiento) en el instante t , de modo que sus bordes son el fondo fijo y la superficie libre, donde se mueven las ondas a estudiar.

En el gráfico



la superficie en reposo coincide con el plano $z = 0$. Podemos tomar el agua como un fluido homogéneo y no viscoso. Así, las partículas de fluido en contacto con el fondo liso se mueven tangencialmente a éste, esto es, si $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ es el campo de velocidades con $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $u_3 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$, donde $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$.

La descripción del movimiento de la superficie del canal no es tan simple; considerando que una superficie cualquiera de \mathbf{R}^3 se puede expresar por una ecuación de la forma $S(x, y, z) = 0$, podemos suponer que, en cada instante t , la superficie del canal está dada por $S(t, x, y, z) = 0$, donde la función S debe ser determinada. Si una partícula de fluido en esa superficie ocupa la posición $\mathbf{P}(t)$, entonces

$$S(t, \mathbf{P}(t)) = 0 \text{ para cada } t \quad (3.5)$$

y, como su velocidad es dada por la velocidad del fluido en el mismo punto, se tiene

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = \mathbf{u}(t, \mathbf{P}(t)). \quad (3.6)$$

Derivando (3.5) respecto de t se tiene

$$\frac{d}{dt} S(t, \mathbf{P}(t)) = S_t + \frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} \cdot \nabla S = S_t + \mathbf{u} \cdot \nabla S = 0, \quad (3.7)$$

la cual llamamos *ecuación cinemática* de la superficie libre.

Si supusiéramos que la superficie $S(t, \mathbf{x}) = 0$ es el gráfico de una función $z = \eta(t, x, y)$, entonces

$$\mathcal{R}(t) = \{(x, y, z); -h_0 < z < \eta(t, x, y)\}$$

y la ecuación (3.7) toma la forma

$$\eta_t + u_1\eta_x + u_2\eta_y - u_3 = 0 \text{ en } z = \eta(t, x, y). \quad (3.8)$$

Las ecuaciones anteriores nos llevan a formular el siguiente modelo para la descripción de la dinámica del agua del canal: sean $\mathbf{u}(t, x, y, z)$ y $\eta(t, x, y)$ tales que

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{u}(t, x, y, z) = 0 \\ u_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0} \nabla \mathbf{p} = \mathbf{g} \end{cases} \text{ en } \mathcal{R}(t),$$

con las condiciones de contorno

$$\begin{cases} u_3 = 0 & \text{en } z = -h_0 \\ \eta_t + u_1\eta_x + u_2\eta_y - u_3 = 0 & \text{en } z = \eta(t, x, y) \end{cases}$$

Entonces $z = \eta(t, x, y)$ describe el movimiento del agua en la superficie y $\mathbf{u}(t, x, y)$ el campo de velocidades en el interior del canal

4. La Ecuación de Bernoulli

Las ecuaciones de Stokes para modelar el movimiento del agua, como hemos visto antes, son

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0} \nabla \mathbf{p} = \mathbf{g} \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \end{cases}, \quad (4.9)$$

estas son las ecuaciones generales para la dinámica de fluidos no viscosos.

Estas ecuaciones se simplifican en el caso de un fluido irrotacional, esto es, cuando no hay rotación de las partículas individuales. Eso implica que la vorticidad es nula, esto es,

$$\text{rot} \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

En este caso, se sigue del teorema del rotacional de Stokes que existe una función $\psi(t, \mathbf{x})$ tal que $\mathbf{u} = \nabla\psi$ y la ecuación de continuidad $\text{div} \mathbf{u} = 0$ se expresa como

$$\Delta\psi(t, \mathbf{x}) = 0,$$

esto es, para cada t , $\psi(t, \mathbf{x})$ es una función armónica en la variable \mathbf{x} .

Por otro lado, usando la identidad

$$\frac{1}{2} \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \times \text{rot} \mathbf{u}$$

se tiene que

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{1}{2} |\nabla \mathbf{u}|^2 - \mathbf{u} \times \text{rot} \mathbf{u} = \frac{1}{2} |\nabla \mathbf{u}|^2$$

y así, la primera ecuación de (4.9) se escribe como

$$\nabla \left(\psi_t + \frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 + \frac{p}{\rho_0} + gz \right) = 0$$

o, equivalentemente

$$\psi_t + \frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 + \frac{p}{\rho_0} + gz = C(t) \quad (4.10)$$

donde $C(t)$ es una función que sólo depende de t .

Podemos suponer que $C(t) = 0$. De hecho, si $\varphi(t, \mathbf{x}) = \psi(t, \mathbf{x}) - D(t)$, donde $D(t)$ es una primitiva cualquiera de $C(t)$, entonces $\nabla\varphi = \nabla\psi = \mathbf{u}$ y φ satisface la ecuación (4.10) homogénea, esto es

$$\varphi_t + \frac{1}{2} |\nabla\varphi|^2 + \frac{p}{\rho_0} + gz = 0$$

la que se conoce como la *ecuación de Bernoulli*.

En términos de la función φ , la condición de contorno en el fondo del canal se expresa por

$$\varphi_t(t, x, y, -h_0) = 0, \text{ para todas } x, y \text{ en } \mathbf{R}$$

y la condición (3.8)

$$\eta_t + \varphi_x \eta_x + \varphi_y \eta_y - \varphi_z = 0 \text{ en } z = \eta(t, x, y).$$

Tenemos, en este caso, el siguiente modelo para la descripción de la dinámica del agua del canal; sean $\varphi(t, x, y, z)$ y $\eta(t, x, y)$ tales que

$$\begin{cases} \Delta \varphi(t, x, y, z) = 0, \\ \varphi_t + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 + \frac{p}{\rho_0} + gz = 0 \end{cases} \text{ en } \mathcal{R}(t) \quad (4.11)$$

con las condiciones de contorno

$$\begin{cases} \varphi_z = 0 & \text{en } z = -h_0 \\ \eta_t + \varphi_x \eta_x + \varphi_y \eta_y - \varphi_z = 0 & \text{en } z = \eta(t, x, y). \end{cases} \quad (4.12)$$

Entonces $z = \eta(t, x, y)$ describe el movimiento del agua en la superficie y

$$\mathbf{u}(t, x, y) = \nabla \varphi(t, x, y, z)$$

el campo de velocidades en el interior del canal.

5. La Dispersión

Desde el punto de vista de la Matemática, las ecuaciones (4.11) y (4.12) presentan algunas dificultades. Primero, la región $\mathcal{R}(t)$, variable en el tiempo depende de la función $\eta(t, x, y)$ que es la incógnita del problema (*problema de frontera libre*). Además, esas ecuaciones contienen términos no lineales; por tanto, sin necesitar resolverlos explícitamente,

podemos obtener información importante sobre el comportamiento de las ondas en la superficie, haciendo algunas aproximaciones.

Para eso, inicialmente, reescribimos los sistemas (4.11) y (4.12) restringiendo la segunda ecuación de (4.11) a los puntos de la frontera libre, esto es

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\varphi = 0 & \text{en } \mathcal{R}(t) \\ \varphi_z = 0 & \text{en } z = -h_0 \\ \varphi_t + \frac{1}{2} |\nabla\varphi|^2 + \frac{p}{\rho_0} + gz = 0 & \text{en } z = \eta(t, x, y) \\ \eta_t + \varphi_x\eta_x + \varphi_y\eta_y - \varphi_z = 0 & \text{en } z = \eta(t, x, y). \end{array} \right. \quad (5.13)$$

Suponiendo la presión constante en la superficie, el simple cambio de variables

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(t, x, y, z) &= \varphi(t, x, y, z) + \frac{pz}{\rho_0}, \\ \bar{\eta}(t, x, y) &= \eta(t, x, y), \end{aligned}$$

nos permite reescribir el sistema anterior en la forma

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\varphi = 0 & \text{en } \mathcal{R}(t) \\ \varphi_z = 0 & \text{en } z = -h_0 \\ \varphi_t + \frac{1}{2} |\nabla\varphi|^2 + g\eta = 0 & \text{en } z = \eta(t, x, y) \\ \eta_t + \varphi_x\eta_x + \varphi_y\eta_y - \varphi_z = 0 & \text{en } z = \eta(t, x, y). \end{array} \right. \quad (5.14)$$

Podemos verificar fácilmente que $\bar{\varphi}$ y $\bar{\eta}$ satisfacen (5.14) si y sólo si φ y η satisfacen (5.13).

Para simplificar, vamos a suponer que la amplitud de las oscilaciones en cada punto de la superficie es suficientemente pequeña, de modo que las condiciones en $z = \eta(t, x, y)$ son aproximadamente válidas también para $z = 0$; y que las variaciones de φ y η en relación a las variables t, x y y son muy pequeñas, esto es, $|\eta_t|, |\varphi_t|, |\eta_x|, \dots \ll 1$, de modo que los términos no lineales en las dos últimas ecuaciones de (5.14) pueden ser descartadas.

En estas condiciones, podemos sustituir la región $\mathcal{R}(t)$ por

$$\mathcal{R} = \{(x, y, z); -h_0 < z < 0\},$$

y el problema se reduce a

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\varphi = 0 & \text{en } \mathcal{R} \\ \varphi_z = 0 & \text{en } z = -h_0 \\ \varphi_t + g\eta = 0 & \text{en } z = 0 \\ \eta_t - \varphi_z = 0 & \text{en } z = 0. \end{array} \right. \quad (5.15)$$

Podemos eliminar la incógnita η en (5.15) derivando la tercera ecuación con respecto a t y utilizando la cuarta. Obtenemos entonces

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\varphi = 0 & \text{en } \mathcal{R} \\ \varphi_z = 0 & \text{en } z = -h_0 \\ \varphi_{tt} + g\varphi_z = 0 & \text{en } z = 0. \end{array} \right. \quad (5.16)$$

Las soluciones de estas ecuaciones nos permiten describir algunos fenómenos que ocurren en las ondas de agua, denominadas *fenómenos de dispersión*. Por una cuestión de simplicidad, vamos inicialmente a restringirnos al caso en el que las funciones no dependen de la variable y . Como (5.16) es un sistema lineal, podemos resolverlo por el método de separación de variables, buscando soluciones no nulas en la forma

$$\varphi(t, x, z) = T(t) X(x) Z(z). \quad (5.17)$$

De la primera ecuación obtenemos

$$\frac{X''}{X} + \frac{Z''}{Z} = 0,$$

de modo que

$$\frac{Z''}{Z} = \mu \text{ y } \frac{X''}{X} = -\mu, \mu \in \mathbf{R} \quad (5.18)$$

Se puede verificar que $\mu < 0$ implica soluciones no acotadas en la variable x , que, en este contexto, no tiene significado físico. Además de eso, $\mu = 0$ implica soluciones constantes, que no reflejan las oscilaciones que queremos estudiar.

Por otro lado, si $\mu = k^2 > 0$, la primera ecuación de (5.18) tiene una solución general de la forma

$$Z(z) = C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz}, \quad C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

A partir de la condición de frontera en el fondo $z = -h_0$, obtenemos $C_1 e^{-kh_0} = C_2 e^{kh_0} = \frac{C}{2}$, para alguna constante C . De esto obtenemos que

$$C_1 = \frac{C}{2} e^{kh_0}, \quad C_2 = \frac{C}{2} e^{-kh_0}$$

y así

$$Z(z) = \frac{C}{2} e^{kh_0} e^{kz} + \frac{C}{2} e^{-kh_0} e^{-kz} = C \left(\frac{e^{kz+kh_0} + e^{-kz-kh_0}}{2} \right).$$

Luego

$$Z(z) = C \cosh(kz + kh_0).$$

Podemos escribir la segunda ecuación de (5.18) en la forma $X'' + k^2 X = 0$, cuya solución general es

$$X(x) = A_1 \cos(kx) + A_2 \sin(kx), \quad A_1, A_2 \in \mathbf{R}.$$

Podemos ahora determinar $T(t)$ usando la tercera ecuación de (5.16). De hecho reemplazando en $\varphi(t, x, z)$ las funciones $X(x)$ y $Z(z)$ encontradas antes, obtenemos

$$T''(t) + w^2 T(t) = 0,$$

donde, necesariamente, $w^2 = kg \tanh(kh_0)$. Como una solución general de esta última ecuación es

$$T(t) = T_1 \cos(wt) + T_2 \sin(wt),$$

obtenemos, para cada $k > 0$

$$\varphi(t, x, z) = \cosh(kz + kh_0) [A_1 \cos(kx) + A_2 \sin(kx)] \cdot [T_1 \cos(wt) + T_2 \sin(wt)] \quad (5.19)$$

donde

$$w(k) = \sqrt{gk \tanh(kh_0)} \quad (5.20)$$

es llamada *relación de dispersión*.

Se sigue de la tercera ecuación de (5.15) que las ondulaciones en la superficie del canal serán dadas, en este caso particular, por

$$\eta(t, x) = -\frac{w(k)}{g} \cosh(kh_0) [A_1 \cos(kx) + A_2 \sin(kx)] \cdot [T_1 \cos(wt) + T_2 \sin(wt)] \quad (5.21)$$

Es de notar que k , convencionalmente llamado *número de onda* en el caso unidimensional, tiene dimensiones físicas del inverso de la longitud; en tanto que w , llamada *frecuencia angular*, tiene dimensiones del inverso del tiempo. Se ve claramente de la última ecuación que $\eta(t, x)$ es periódica, tanto espacial como temporalmente (se puede comprobar que el período espacial, conocido como la longitud de onda, es $2\pi/k$; también que el período temporal es $2\pi/w$). Esto quiere decir que lo que sucede en el medio en el instante t en el punto x , se reproduce en el instante $t + 2\pi/w$, en el punto $x + 2\pi/k$; es decir, la perturbación viaja una distancia $2\pi/k$ (una longitud de onda) en el intervalo $2\pi/w$ (en un período temporal) de modo uniforme. Asimismo, podemos afirmar que la velocidad de la propagación de la onda (5.21), llamada *velocidad de fase*, es igual a $c = w/k$. En el caso de la relación de dispersión (5.20), esta velocidad se escribe

$$c(k) = \sqrt{\frac{g \tanh(kh_0)}{k}}, \quad k \neq 0 \quad (5.22)$$

Un análisis simple nos permite verificar que $w(k)$ es creciente con respecto a k , mientras que $c(k)$ es decreciente. Asimismo, las ondas de alta

frecuencia se tienden a mover más lentamente que las de baja frecuencia. El perfil de las ondas descritas por la ecuación (5.21) no se deforma con el transcurso del tiempo, ya que la velocidad (fijado un k) es la misma para todos los puntos. Pero estas soluciones son, digamos, parciales en el sentido que todas ellas satisfacen las ecuaciones con sus condiciones de frontera; sin embargo, no necesariamente las condiciones iniciales. Debido a la aproximación lineal antes establecida, la solución general del problema se podrá escribir como una combinación lineal de soluciones del tipo (5.21). Entonces, como consecuencia de (5.22), cada componente se va a mover con velocidad diferente y, por tanto, el perfil de la onda resultante no se conserva en el tiempo. Esto es lo que entendemos aquí como *fenómeno de dispersión*.

La relación de dispersión (5.20) no es exclusiva de las ondas unidimensionales. Para verificar esto, vamos a repetir los argumentos anteriores en una situación general, donde las funciones dependen de la variable y . En este caso, el método de separación de variables consiste en la búsqueda de soluciones no nulas en la forma

$$\varphi(t, x, y, z) = T(t) X(x) Y(y) Z(z).$$

De la primera ecuación de (5.16) obtenemos

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0,$$

de modo que

$$\frac{Z''}{Z} = \mu \text{ y } \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\mu, \mu \in \mathbf{R}. \quad (5.23)$$

Como en el caso anterior, es fácil verificar que $\mu \leq 0$ implica soluciones sin significado físico o triviales. Por otro lado, si $\mu = k^2 > 0$, la primera ecuación de (5.23) tiene solución general

$$Z(z) = C \cosh(kz + kh_0).$$

Podemos escribir la segunda ecuación de (5.23) en la forma

$$\frac{X''}{X} = -k^2 v_1^2 \text{ y } \frac{Y''}{Y} = -k^2 v_2^2,$$

donde $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ es un vector unitario del plano XY .

Si denotamos por $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$, donde $k_j = kv_j, k > 0, v_1^2 + v_2^2 = 1$, obtenemos para cada $\mathbf{k} \in \mathbf{R}^2$, solución de la forma

$$\varphi(t, x, z) = CT(t) \cosh(kz + kh_0) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}},$$

donde $\mathbf{k}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ y $C \in \mathbf{C}$.

Sustituyendo $\varphi(t, x, z)$ en la tercera ecuación de (5.16), obtenemos $T''(t) + w^2 T(t) = 0$, donde, necesariamente, $w^2 = kg \tanh(kh_0)$. Por tanto, para cada vector $\mathbf{k} \in \mathbf{R}^2$, obtenemos una solución

$$\varphi(t, x, z) = \cosh(kz + kh_0) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \left(A e^{iw(k)t} + B e^{-iw(k)t} \right) \quad (5.24)$$

donde $A, B \in \mathbf{C}$ y $w(k)$ satisface la relación (5.20).

Es de notar que la fórmula (5.22) nos muestra, también, el comportamiento especial de aguas rasas, donde la profundidad h_0 se supone pequeña (relativa a la longitud λ de la onda). De hecho, si $h_0 \ll \lambda = 2\pi/k$, podemos escribir

$$c(k) = \sqrt{gh_0} \sqrt{\frac{\tanh(kh_0)}{kh_0}} \approx c_0 = \sqrt{gh_0} \quad (5.25)$$

lo que nos muestra un hecho interesante: sin considerar los efectos no lineales, la velocidad de propagación de las ondas de baja frecuencia en aguas rasas no depende de su longitud, de modo que una superposición de esas ondas no presenta dispersión.

6. Deducción de la KdV

La KdV es una ecuación más simple que las que hemos visto y tiene efectos no lineales y dispersivos en el contexto de aguas rasas. Para

deducirla es importante transformar todas las variables en magnitudes adimensionales, lo que es esencial para poder determinar cuáles términos son dominantes y cuáles pueden ser descartados en un proceso de aproximación. Haremos esto como sigue; en el proceso se podrá apreciar los puntos importantes en la deducción.

Primero consideremos el sistema (5.14) suponiendo las funciones independientes de la variable y (el perfil de las ondas en el tiempo), esto es

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi_{xx} + \varphi_{zz} = 0 & \text{en } \mathcal{R}(t) \\ \varphi_z = 0 & \text{en } z = -h_0 \\ \varphi_t + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_z^2) + g\eta = 0 & \text{en } z = \eta(t, x) \\ \eta_t + \varphi_x \eta_x - \varphi_z = 0 & \text{en } z = \eta(t, x). \end{array} \right. \quad (6.26)$$

donde $\mathcal{R}(t) = \{(x, z); -h_0 < z < \eta(t, x)\}$.

Como hemos visto antes, para ondas que tienen longitud λ mucho mayor que la profundidad h_0 del agua, podemos considerar la aproximación (ver (5.25))

$$c(k)^2 \approx c_0^2 = gh_0 \quad (6.27)$$

lo que nos permite definir $t_0 = \lambda/c_0$ como unidad típica para la escala de tiempo. Asimismo, podemos transformar las variables independientes del problema en variables adimensionales, considerando

$$\xi = x/\lambda, \tau = t/t_0, \zeta = 1 + z/h_0 \quad (6.28)$$

En lo que se refiere a la variable dependiente η , vamos a introducir una *amplitud típica* a , de modo que $v = \eta/a$ expresa la amplitud adimensional de las oscilaciones en la superficie.

Para reemplazar esas nuevas variables en la primera ecuación de (6.26) tenemos primero que

$$\varphi_t = \frac{1}{t_0} \varphi_\tau, \varphi_x = \frac{1}{\lambda} \varphi_\xi, \varphi_z = \frac{1}{h_0} \varphi_\zeta, \eta = va$$

de modo que

$$\varphi_{xx} = \frac{1}{\lambda^2} \varphi_{\xi\xi} \text{ y } \varphi_{zz} = \frac{1}{h_0^2} \varphi_{\zeta\zeta}.$$

Luego

$$\frac{1}{\lambda^2} \varphi_{\xi\xi} + \frac{1}{h_0^2} \varphi_{\zeta\zeta} = \frac{h_0^2}{\lambda^2} \varphi_{\xi\xi} + \varphi_{\zeta\zeta} = 0; \quad (6.29)$$

la segunda ecuación, obviamente resulta ser

$$\varphi_{\zeta} = 0. \quad (6.30)$$

En la tercera ecuación de (6.26) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_0} \varphi_{\tau} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{\lambda} \varphi_{\xi} \right)^2 + \left(\frac{1}{h_0} \varphi_{\zeta} \right)^2 \right) + gva &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{c_0}{\lambda} \varphi_{\tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda^2} \varphi_{\xi}^2 + \frac{1}{h_0^2} \varphi_{\zeta}^2 \right) + gva &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{c_0}{ag\lambda} \varphi_{\tau} + \frac{1}{2agh_0^2} \left(\frac{h_0^2}{\lambda^2} \varphi_{\xi}^2 + \varphi_{\zeta}^2 \right) + v &= 0; \end{aligned}$$

obtenemos así la condición de contorno

$$\frac{c_0}{ag\lambda} \varphi_{\tau} + \frac{1}{2agh_0^2} \left(\frac{h_0^2}{\lambda^2} \varphi_{\xi}^2 + \varphi_{\zeta}^2 \right) + v = 0 \text{ en } \zeta = 1 + \frac{a}{h_0} v. \quad (6.31)$$

Para la cuarta ecuación consideramos $\eta_t = \frac{a}{t_0} v_{\tau}$, $\eta_x = \frac{a}{\lambda} v_{\xi}$ y así

$$\frac{a}{t_0} v_{\tau} + \frac{a}{\lambda^2} \varphi_{\xi} v_{\xi} - \frac{1}{h_0} \varphi_{\zeta} = 0 \quad (6.32)$$

Como $\Phi = \frac{c_0}{ag\lambda} \varphi$ es una magnitud adimensional, podemos considerarla en la ecuaciones (6.29-6.32); por tanto tendremos

$$\begin{aligned} \Phi_{\tau} &= \frac{c_0}{ag\lambda} \varphi_{\tau}, \quad \Phi_{\xi} = \frac{c_0}{ag\lambda} \varphi_{\xi}, \quad \Phi_{\xi\xi} = \frac{c_0}{ag\lambda} \varphi_{\xi\xi}, \quad \Phi_{\zeta} = \frac{c_0}{ag\lambda} \varphi_{\zeta}, \\ \Phi_{\zeta\zeta} &= \frac{c_0}{ag\lambda} \varphi_{\zeta\zeta}, \quad c_0^2 = gh_0, \quad c_0 = \frac{\lambda}{t_0} \end{aligned}$$

y así la primera ecuación resulta

$$\frac{h_0^2}{\lambda^2} \Phi_{\xi\xi} + \Phi_{\zeta\zeta} = 0,$$

la segunda

$$\Phi_\zeta = 0,$$

la tercera

$$\Phi_\tau + \frac{1}{2agh_0^2} \frac{h_0^2}{\lambda^2} \left(\frac{ag\lambda}{c_0} \right)^2 \Phi_\xi^2 + \frac{1}{2agh_0^2} \left(\frac{ag\lambda}{c_0} \right)^2 \Phi_\zeta^2 + v = 0,$$

y la cuarta

$$\frac{a}{t_0} v_\tau + \frac{a}{\lambda^2} \frac{ag\lambda}{c_0} \Phi_\xi v_\xi - \frac{1}{h_0} \frac{ag\lambda}{c_0} \Phi_\zeta = 0$$

Asimismo, definiendo los parámetros (también adimensionales)

$$\mu = \frac{h_0^2}{\lambda^2} \quad \text{y} \quad \nu = \frac{a}{h_0}, \quad (6.33)$$

obtenemos, por ejemplo, para la tercera ecuación anterior

$$\Phi_\tau + \frac{1}{2}\nu\Phi_\xi^2 + \frac{1}{2}\frac{\nu}{\mu}\Phi_\zeta^2 + v = 0 \quad \text{en } \zeta = 1 + \nu v.$$

Procediendo en forma análoga con las demás ecuaciones, obtenemos el sistema en la forma adimensional

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu\Phi_{\xi\xi} + \Phi_{\zeta\zeta} = 0 \quad \text{en } 0 < \zeta < 1 + \nu v \\ \Phi_\zeta = 0 \quad \text{en } \zeta = 0 \\ \Phi_\tau + \frac{1}{2}\nu\Phi_\xi^2 + \frac{1}{2}\frac{\nu}{\mu}\Phi_\zeta^2 + v = 0 \quad \text{en } \zeta = 1 + \nu v \\ v_\tau + \nu\Phi_\xi v_\xi - \frac{1}{\mu}\Phi_\zeta = 0 \quad \text{en } \zeta = 1 + \nu v \end{array} \right. \quad (6.34)$$

A continuación vamos a determinar una solución Φ del sistema (6.34) en la forma de series de potencias en ζ . Esto es

$$\Phi(\tau, \xi, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n f_n(\tau, \xi) \quad (6.35)$$

La condición de contorno $\zeta = 0$ implica, necesariamente, $f_1 \equiv 0$. Por otro lado, como

$$\begin{aligned}\Phi_{\xi\xi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f_n(\tau, \xi), \\ \Phi_{\zeta\zeta} &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) \zeta^n f_{n+2}(\tau, \xi),\end{aligned}$$

obtenemos, después de reemplazar en la primera ecuación de (6.34)

$$\mu \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f_n(\tau, \xi) = -(n+2)(n+1) \zeta^n f_{n+2}(\tau, \xi), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Como f_1 es idénticamente nula, solamente las funciones de índice par están presentes en la expansión (6.35), de modo que, considerando $f = f_0$, obtenemos

$$\Phi(\tau, \xi, \zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \mu^k \frac{\zeta^{2k}}{(2k)!} \frac{\partial^{2k}}{\partial \xi^{2k}} f(\tau, \xi) \quad (6.36)$$

En esta parte vamos a reemplazar (6.36) en las dos condiciones de contorno de la superficie libre $\zeta = 1 + \nu v$. Como al final, despreciaremos todos los términos que envuelvan potencias de mayor orden o igual a dos en los parámetros μ y ν , precisamos solamente poner atención en los tres primeros términos de (6.36), esto es

$$\Phi = f - \mu \frac{\zeta^2}{2} f_{\xi\xi} + \mu^2 \frac{\zeta^4}{4!} f_{\xi\xi\xi\xi} - \dots$$

Reemplazando esta expresión en la cuarta ecuación de (6.34), obtenemos

$$\begin{aligned}v_\tau + \nu \left[f_\xi - \frac{\mu}{2} (1 + \nu v)^2 f_{\xi\xi\xi} + \frac{\mu^4}{4} (1 + \nu v)^4 f_{\xi\xi\xi\xi\xi} - \dots \right] v_\xi \\ - \frac{1}{\mu} \left[-\mu (1 + \nu v) f_{\xi\xi} + \frac{\mu^3}{3!} (1 + \nu v)^3 f_{\xi\xi\xi\xi} - \dots \right] = 0\end{aligned}$$

Definiendo $w = f_\xi$ y explicitando solamente los términos de primer orden en los parámetros μ y ν , obtenemos

$$v_\tau + [(1 + \nu v) w]_\xi - \frac{\mu}{6} w_{\xi\xi\xi} + F(\mu^2, v^2, \mu\nu, \dots) = 0 \quad (6.37)$$

donde $F(\mu^2, v^2, \mu\nu, \dots)$ es una función de los términos de orden superior.

Procediendo análogamente con la tercera ecuación de (6.34), obtenemos

$$\begin{aligned} v + \left[f_\tau - \frac{\mu}{2} (1 + \nu v)^2 f_{\xi\xi\tau} + \frac{\mu^2}{4!} (1 + \nu v)^4 f_{\xi\xi\xi\xi\tau} - \dots \right] \\ + \frac{\nu}{2} \left[f_\xi - \frac{\mu}{2} (1 + \nu v)^2 f_{\xi\xi\xi} + \frac{\mu^2}{4!} (1 + \nu v)^4 f_{\xi\xi\xi\xi\xi} - \dots \right]^2 \\ + \frac{\nu}{2\mu} \left[-\mu (1 + \nu v) f_{\xi\xi} + \frac{\mu^2}{3!} (1 + \nu v)^3 f_{\xi\xi\xi\xi} - \dots \right]^2 = 0 \end{aligned}$$

Asimismo, sin considerar en la ecuación anterior los términos de orden mayor o igual a dos, obtenemos

$$v + f_\tau - \frac{\mu}{2} f_{\xi\xi\tau} + \frac{\nu}{2} f_\xi^2 + F(\mu^2, v^2, \mu\nu, \dots) = 0.$$

Derivando con respecto a ξ y considerando $w = f_\xi$, tenemos

$$v_\xi + w_\tau - \frac{\mu}{2} w_{\xi\xi\tau} + \nu w w_\xi + F(\mu^2, v^2, \mu\nu, \dots) = 0 \quad (6.38)$$

Las ecuaciones (6.37) y (6.38) nos proporcionan el siguiente sistema de ecuaciones para las ondas de superficie

$$\begin{cases} v_\tau + w_\xi + \nu (vw)_\xi - \frac{\mu}{6} w_{\xi\xi\xi} + F(\mu^2, v^2, \mu\nu, \dots) = 0 \\ v_\xi + w_\tau + \nu w w_\xi - \frac{\mu}{2} w_{\xi\xi\tau} + F(\mu^2, v^2, \mu\nu, \dots) = 0 \end{cases} \quad (6.39)$$

Por último, buscamos soluciones de (6.39) en la forma

$$w = v + \nu G + \mu H,$$

donde G y H son funciones de v y de sus derivadas en la variable ξ , esto es

$$G = G(v, v_\xi, v_{\xi\xi}, \dots), \quad H = H(v, v_\xi, v_{\xi\xi}, \dots).$$

Reemplazando en el sistema (6.39) obtenemos

$$\begin{cases} v_\tau + v_\xi + \nu(G_\xi + 2vv_\xi) + \mu(H_\xi - \frac{1}{6}v_{\xi\xi\xi}) + F(\mu^2, v^2, \mu\nu, \dots) = 0, \\ v_\xi + v_\tau + \nu(G_\tau + vv_\xi) + \mu(H_\tau - \frac{1}{2}v_{\xi\xi\tau}) + F(\mu^2, v^2, \mu\nu, \dots) = 0. \end{cases}$$

Eligiendo $G = -\frac{v^2}{4}$ y $H = \frac{v_{\xi\xi}}{3}$ tenemos

$$\begin{cases} v_\tau + v_\xi + \frac{3}{2}\nu vv_\xi + \frac{1}{6}\mu v_{\xi\xi\xi} + F(\mu^2, v^2, \mu\nu, \dots) = 0, \\ v_\tau + v_\xi + \nu(vv_\xi - \frac{1}{2}vv_\tau) - \frac{1}{6}\mu v_{\xi\xi\tau} + F(\mu^2, v^2, \mu\nu, \dots) = 0. \end{cases}$$

De cada una de estas ecuaciones podemos verificar que

$$v_\tau = -v_\xi + O(v, \mu),$$

de modo que las dos ecuaciones son compatibles hasta el primer orden en los parámetros, lo que significa decir que describen (aproximadamente) los mismos fenómenos.

Por tanto, despreciando los términos de orden superior, tenemos la ecuación de Korteweg-de Vries en su forma adimensional

$$v_\tau + v_\xi + \frac{3}{2}\nu vv_\xi + \frac{1}{6}\mu v_{\xi\xi\xi} = 0. \quad (6.40)$$

Regresando a las variables originales obtenemos

$$\eta_\tau + c_0\eta_x + \frac{3}{2}\frac{c_0}{h_0}\eta\eta_x + \frac{1}{6}h_0^2c_0\eta_{xxx} = 0, \quad (6.41)$$

que es la *KdV* (en el sistema de coordenadas fijas al suelo). Ella es más comúnmente expresada en un sistema de coordenadas que se mueve en relación al suelo (tal como Russell observara cuando la seguía a caballo), con velocidad c_0 . Para esto, introducimos la función $u(t, x) = \eta(t, x + c_0 t)$, de modo que

$$u_t + \frac{3}{2} \frac{c_0}{h_0} u u_x + \frac{1}{6} h_0^2 c_0 u_{xxx} = 0$$

aquí, u representa el perfil de la onda.

Referencias

- [1] Benjamin T.B., Bona, J. L., Mahony, J. J. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems. *Philos. Trans. Royal Soc. London, series A*, 272(1972), 47-48.
- [2] Franzini, J. B., Finnemore, E. J. *Mecánica de Fluidos con aplicaciones en Ingeniería*. McGraw-Hill, 1999.
- [3] Korteweg, D. J. and de Vries, G. On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves. *Philos. Mag.* 39 (1985), 422-443.
- [4] Miura, R. M. The Korteweg-de Vries equation: a model for nonlinear dispersive waves. In *Nonlinear waves* (ed. S. Leibovich & R. Seebass), ch VIII, p 212. Cornell University Press. Ithaca N.Y., 1974.
- [5] Temam, R., Miranville, A. *Mathematical Modeling in Continuum Mechanics*. Cambridge University Press, 2001.

Abstract

Is presented in some detail, a deduction of the equation of Korteweg-de Vries (KdV) using this as necessary in the theory of incompressible fluid flow and non-viscous and irrotational. It is believed here that the fluid is a continuum so that when considering a system and control volume, you can use the tools of Differential and Integral Calculus to study their properties.

Keywords: nonlinear dispersive equations, channel flow in a non-viscous fluids, incompressible and irrotational.

Carlos Rodríguez
Departamento de Matemáticas,
Facultad de Ciencias,
Universidad Nacional Agraria La Molina
carjul@lamolina.edu.pe

Sección Matemáticas,
Departamento de Ciencias,
Pontificia Universidad Católica del Perú
cjrodrig@pucp.edu.pe