INTRODUCCIÓN A LAS APLICACIONES ARMÓNICAS

Christiam Figueroa[1]

Noviembre, 2009

Resumen

En este trabajo se presenta una breve introducción a las aplicaciones armónicas entre variedades Riemannianas. Hacemos esto desde el punto de vista tensorial. Es decir, una aplicación es armónica si el trazo de su segunda forma fundamental es cero.

Clasificación AMS 2000: 53C42, 53C43

Palabras Clave: *Aplicaciones armónicas, inmersión mínima, campo de tensiones.*

1. *Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias, PUCP.*

1. Introducción

Es conocido que el estudio de las superficies mínimas en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$ se pueden estudiar como punto crítico de un problema variacional de la función área y también como aquellas superficies cuya curvatura media, es decir la traza del diferencial de la aplicación normal de Gauss, es constante e igual a cero. Generalizando esta última situación, trabajaremos con aplicaciones diferenciables entre dos variedades riemannianas, $f : M \to N$, y definir su campo de tensiones, $\tau(f)$, el cual aparece como punto crítico de un problema variacional de la función energía y también como el trazo de la segunda forma fundamental de f. Y de manera análoga, diremos que la aplicación f es armónica si el campo de tensiones $\tau(f)$ es nulo es decir es punto crítico del problema variacional o la traza de la segunda forma fundamental es cero.

En este trabajo presentaremos las aplicaciones armónicas desde el punto de vista tensorial es decir como trazo de una aplicación bilineal la cual viene a ser la segunda forma fundamental de f.

Para ver éste y otros aspectos de la teoría de las aplicaciones armónicas entre variedades riemannianas ver [2].

2. Fibrados Vectoriales

Recordemos algunos conceptos sobre fibrados vectoriales que serán utilizados más adelante. Sea M una variedad diferenciable (C^∞) conexa y orientable.

Definición 2.1. *Un fibrado vectorial de rango n sobre M es una aplicación*

$$\zeta : V \to M$$

tal que $\zeta^{-1}(x) = V_x$ *es un espacio vectorial de dimensión* n.

Denotaremos por $C(V)$ al espacio vectorial de las secciones diferenciables de V; i.e.

$$C(V) = \{\sigma : M \to V : \zeta \circ \sigma(x) = x\}$$

Un ejemplo típico de fibrado vectorial es el fibrado tangente, donde

$$V = TM = \{(p, v) : v \in T_pM\},$$

la proyección está dada por $\zeta(p, v) = p$ y las secciones, en este caso son los campos vectoriales C^∞.

A partir de fibrados vectoriales dados podemos construir otros fibrados. Por ejemplo, tenemos el fibrado dual $\zeta^* : V^* \to M$ donde $(\zeta^*)^{-1}(x) = V_x^*$ y las secciones están dadas por funcionales $\sigma(x) : V_x \to \mathbb{R}$.

Si $\eta : W \to M$ es otro fibrado sobre M construimos el fibrado producto tensorial

$$\zeta \otimes \eta : V \otimes W \to M$$

donde las fibras $(\zeta \otimes \eta)^{-1}(x) = V_x \otimes W_x$. Si $\sigma \in C(V)$ y $\theta \in C(W)$ entonces una sección en el fibrado producto tensorial está dada por $(\sigma \otimes \theta)(x) = \sigma(x) \otimes \theta(x)$ para todo $x \in M$.

Finalmente, dada una aplicación diferenciable $f : M \to N$ y $\eta : W \to N$ un fibrado vectorial sobre N, entonces el fibrado sobre M inducido por la aplicación f se define de tal manera que la fibra sobre $x \in M$ está dada por $W_{f(x)}$, y las secciones en este fibrado son de la forma $\theta \circ f$ donde $\theta \in C(W)$. Tal fibrado lo denotaremos por $f^{-1}W$ y se llamará el fibrado inducido por f.

2.1. Conexión Lineal

Una conexión lineal en un fibrado vectorial $\zeta : V \to M$ es una aplicación bilineal ∇ en el espacio de las secciones

$$\nabla : C(TM) \times C(V) \to C(V)$$

tal que para cada función diferenciable h en M, se cumple que:

1. $\nabla_{hX}\sigma = h\nabla_X\sigma$
2. $\nabla_X h\sigma = X(h)\sigma + h\nabla_X\sigma$, con $\sigma \in C(V)$.

$\nabla_X\sigma$ es la derivada covariante de la sección σ en la dirección del campo X.

A partir de la conexión lineal en un fibrado se puede construir otra conexión en otro fibrado. Por ejemplo si ∇^V es una conexión lineal en el fibrado V, definimos la conexión dual en V^*como

$$(\nabla_X^*\theta)(\sigma) = X(\theta(\sigma)) - \theta\left(\nabla_X^V\sigma\right)$$

donde $\theta \in C(V^*)$ y $\sigma \in C(V)$.

Si ∇^W es una conexión en el fibrado W, entonces la conexión producto tensorial en $V \otimes W$ está dada por

$$\nabla_X(\sigma \otimes \lambda) = \left(\nabla_X^V\sigma\right) \otimes \lambda + \sigma \otimes \left(\nabla_X^W\lambda\right).$$

Si $f : M \to N$ es una aplicación diferenciable y $\eta : W \to N$ un fibrado vectorial sobre N con conexión lineal ∇^W, entonces definimos la conexión para el fibrado vectorial $f^{-1}W$ de la siguiente manera: Sea $x \in M$, $y = f(x) \in N$, $X \in T_xM$ y $\theta \in C(W)$, entonces

$$\nabla_X(f^*\theta) = f^*\nabla_{df(X)}^W(\theta)$$

donde $f^*\theta = \theta \circ f \in C\left(f^{-1}W\right)$. En particular si $W = TN$ y $df(Y) \in C(TN)$, con $Y \in C(TM)$, entonces

$$\nabla_X df(Y) = \nabla_{df(X)}^W df(Y) \tag{1}$$

2.2. Diferencial Covariante

Sea $\zeta : V \to M$ un fibrado vectorial sobre M y ∇ una conexión lineal en este fibrado. Si $\sigma \in C(V)$, entonces, la aplicación

$$\nabla(\sigma) : C(TM) \to C(V)$$

dada por $\nabla\sigma(X) := \nabla_X\sigma$ resulta lineal. Es decir, podemos considerar $\nabla(\sigma)$ como una sección en el fibrado $TM^* \otimes V$ y lo llamaremos el diferencial covariante de la sección σ. De manera análoga, consideremos la conexión producto tensorial en este último fibrado,

$$\nabla : C(TM) \times C(TM^* \otimes V) \rightarrow C(TM^* \otimes V).$$

Si $\delta \otimes w \in C(TM^* \otimes V)$, entonces la aplicación

$$\nabla(\delta \otimes w) : C(TM) \rightarrow C(TM^* \otimes V)$$

resulta también una transformación lineal, luego el diferencial covariante $\nabla(\delta \otimes w)$, pertenece al espacio

$$C(TM^* \otimes (TM^* \otimes V)) = C\left(\otimes^2 TM^* \otimes V\right)$$

y representa el diferencial covariante de la sección $\delta \otimes w$.

3. Segunda Forma Fundamental

Sean (M, g) y (N, h) dos variedades riemannianas y $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable entre ellas. Sabemos que el diferencial

$$df_x : T_xM \rightarrow T_{f(x)}N$$

es una transformación lineal y por lo tanto $df_x \in T_xM^* \otimes T_{f(x)}N$. Desde este punto de vista, df es una sección del fibrado producto tensorial $TM^* \otimes f^{-1}TN$ sobre M, luego el diferencial covariante de esta sección, $\nabla(df)$, pertenece al espacio $C\left(\otimes^2 TM^* \otimes f^{-1}TN\right)$, es decir, $\nabla(df)$ es una aplicación bilineal en TM con valores en $f^{-1}TN$. Esto nos lleva a la siguiente

Definición 3.1. *Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable entre dos variedades riemannianas. Se define la segunda forma fundamental de f como el diferencial covariante de la sección df, es decir $\nabla(df)$.*

Veamos la regla de correspondencia de este diferencial. Como df pertenece a espacio $C\left(TM^{*}\otimes f^{-1}TN\right)$, entonces

$$\nabla\left(df\right):C\left(TM\right)\rightarrow C\left(TM^{*}\otimes f^{-1}TN\right)$$

y $\nabla\left(df\right)\left(X\right)=\nabla_{X}\left(df\right)\in C\left(TM^{*}\otimes f^{-1}TN\right)$ para todo $X\in C\left(TM\right)$. De donde, $\nabla_{X}\left(df\right):TM\rightarrow f^{-1}TN$, y por lo tanto

$$\nabla\left(df\right)\left(X,Y\right)=\left(\nabla_{X}\left(df\right)\right)\left(Y\right).$$

Por otro lado, desde el punto de vista tensorial podemos escribir df de la siguiente manera,

$$df=\sum_{i}\delta_{i}\otimes w_{i}$$

con $\delta_{i}\in C\left(TM^{*}\right),w_{i}\in C\left(f^{-1}TN\right)$. Entonces

$$\begin{aligned}\left(\nabla_{X}\left(df\right)\right)\left(Y\right) &= \sum_{i}\nabla_{X}\left(\delta_{i}\otimes w_{i}\right)\left(Y\right)\\ &= \sum_{i}\left(\nabla_{X}^{*}\delta_{i}\otimes w_{i}+\delta_{i}\otimes\nabla_{X}w_{i}\right)\left(Y\right) \qquad (2)\\ &= \sum_{i}\nabla_{X}^{*}\delta_{i}\left(Y\right)w_{i}+\delta_{i}\left(Y\right)\nabla_{X}w_{i}\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la conexión en el fibrado dual TM^{*} tenemos que

$$\nabla_{X}^{*}\delta_{i}\left(Y\right)=X\left(\delta_{i}\left(Y\right)\right)-\delta_{i}\left(\nabla_{X}Y\right).$$

Reemplazando en (2) y reordenando convenientemente,

$$\begin{aligned}\left(\nabla_{X}\left(df\right)\right)\left(Y\right) &= \sum_{i}\left[X\left(\delta_{i}\left(Y\right)\right)w_{i}+\delta_{i}\left(Y\right)\nabla_{X}w_{i}\right]-\delta_{i}\left(\nabla_{X}Y\right)w_{i}\\ &= \sum_{i}\nabla_{X}\delta_{i}\left(Y\right)w_{i}-\delta_{i}\left(\nabla_{X}Y\right)w_{i}\\ &= \nabla_{X}\sum_{i}\delta_{i}\otimes w_{i}\left(Y\right)-\sum_{i}\delta_{i}\otimes w_{i}\left(\nabla_{X}Y\right).\end{aligned}$$

Usando esta última igualdad y la conexión del fibrado inducido, ver (1), concluimos que

$$\nabla\left(df\right)\left(X,Y\right)=\nabla_{X}^{f}df\left(Y\right)-df\left(\nabla_{X}Y\right)=\nabla_{df(X)}df\left(Y\right)-df\left(\nabla_{X}Y\right). \qquad (3)$$

Hallemos localmente una expresión para el diferencial $\nabla(df)$. Sean (X_i, U_i) e (Y_α, V_α) dos parametrizaciones en p y en $f(p)$ respectivamente, $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}$ y $\left\{\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right\}$ los campos coordenados asociados a sus respectivas parametrizaciones, entonces

$$\nabla(df)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \nabla^f_{\frac{\partial}{\partial x_i}} df\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) - df\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \tag{4}$$

Pero, $df\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) =_\alpha f_j^\alpha \frac{\partial}{\partial y_\alpha}$, donde $f_j^\alpha = \frac{\partial(f o y_\alpha)}{\partial x_j}$, entonces, usando la segunda propiedad de toda conexión lineal, tenemos

$$\nabla^f_{\frac{\partial}{\partial x_i}} df\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) =_\alpha \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} f_j^\alpha \frac{\partial}{\partial y_\alpha} = \sum_\alpha \left[f_{ij}^a \frac{\partial}{\partial y_\alpha} + f_j^a \nabla^f_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right].$$

Y de la definición de conexión inducida, tenemos

$$\begin{aligned}\nabla^f_{\frac{\partial}{\partial x_i}} df\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) &= \sum_\alpha \left[f_{ij}^a + f_j^a \nabla_{df\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)} \frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right] \\ &= \sum_\alpha f_{ij}^a \frac{\partial}{\partial y_\alpha} + \sum_\alpha \sum_\beta f_j^a f_i^\beta \nabla_{\frac{\partial}{\partial y_\beta}} \frac{\partial}{\partial y_\alpha}\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta los símbolos de Christoffel , $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$,de la conexión lineal en TN e intercambiando las sumas convenientemente,

$$\nabla^f_{\frac{\partial}{\partial x_i}} df\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_\gamma \left[f_{ij}^a + \sum_\alpha \sum_\beta f_j^a f_i^\beta \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\right] \frac{\partial}{\partial y_\gamma}.$$

Por otro lado,

$$df\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_\gamma df^\gamma \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial y_\gamma}$$

con $f^{\gamma} = y_{\gamma} \circ f : M \to \mathbb{R}$. Considerando la conexión en el fibrado dual y que df^{γ} es un funcional

$$(\nabla df^{\gamma})_{ij} = \left(\nabla^{*}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} df^{\gamma}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = f^{\gamma}_{ij} - df^{\gamma}\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}\right).$$

Reemplazando en la igualdad inmediatamente superior,

$$df\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{\gamma}\left[f^{\gamma}_{ij} - (\nabla df^{\gamma})_{ij}\right]\frac{\partial}{\partial y_{\gamma}}$$

En (4)

$$\nabla (df)_{ij} = \nabla (df)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{\gamma}\left[(\nabla df^{\gamma})_{ij} + \sum_{\alpha}\sum_{\beta} f^{\alpha}_{j} f^{\beta}_{i} \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\right]\frac{\partial}{\partial y_{\gamma}}. \tag{5}$$

Denotaremos por $\nabla (df)^{\gamma}_{ij}$ cada componente de la segunda forma fundamental $\nabla (df)_{ij}$.

Definición 3.2. *Sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable entre dos variedades riemannianas. Definimos el campo de tensiones de f como*

$$\tau (f) = Tr (\nabla (df))$$

Recordemos que ∇df es una bilineal con valores vectoriales y por lo tanto el campo de tensiones $\tau (f)$ toma valores vectoriales en $T_{f(x)}N$. Dado que N es una variedad riemanniana, podemos escoger una base ortonormal $\{E_i\}$ en $f(x)$ y expresar la segunda forma fundamental de f en función de esta base,

$$\nabla df (X, Y) = \sum_{i} < \nabla df (X, Y), E_i > E_i,$$

con $X, Y \in TM$.

Esto nos lleva a definir las siguientes formas bilineales

$$H_i (X, Y) =< \nabla df (X, Y), E_i >,$$

con $i = 1, \ldots, \dim N$ las cuales tienen asociadas un operador lineal A_i, en T_xM tal que $H_i(X,Y) =< A_i(X), Y >$. Luego el campo de tensiones está dada por

$$\tau(f) = \sum_i (TrA_i) E_i.$$

Notemos que la traza no depende de la base ortonormal escogida. En efecto, sea $\{F_j\}$ otra base ortonormal en $T_{f(x)}N$ tal que $F_j = \sum_i a_{ij} E_i$ y B_j es el operador en T_xM asociado a la forma cuadrática

$$< \nabla df(X,Y), F_j > .$$

Si $\{e_k\}$ es una base ortonormal en T_xM entonces

$$\begin{aligned} Tr(B_j) &= \sum_k < B_j(e_k), e_k > \\ &= \sum_k < \nabla df(e_k, e_k), F_j > \\ &= \sum_i \sum_k a_{ij} < \nabla df(e_k, e_k), E_i > \;=\; \sum_i a_{ij} Tr(A_i). \end{aligned}$$

Luego

$$\tau(f) = \sum_j (TrB_j) F_j = \sum_i Tr(A_i) \sum_j a_{ij} F_j = \sum_i (TrA_i) E_i.$$

Antes de hallar una expresión local para el campo de tensiones de la aplicación f, recordemos el concepto del laplaciano de una función diferenciable $h : M \to \mathbb{R}$ en una variedad riemanniana (M,g), ver [3],

$$\Delta h = Div(grad(h)) = Tr(X \longmapsto \nabla_X grad(h)),$$

donde $X \in C(TM)$ y ∇ es la conexión riemanniana en M. Si (X_i, U_i) es una parametrización en $p \in M$ y $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}_i$ la base asociada a esta parametrización, entonces

$$\Delta h = \sum_{i,j} g^{ij} < \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} grad(h), \frac{\partial}{\partial x_j} >$$

donde (g^{ij}) es la matriz inversa del producto interno g. Usando la compatibilidad de la conexión riemanniana con el producto interno y la definición de gradiente

$$\begin{aligned}
\Delta h &= \sum_{i,j} g^{ij}\left[\tfrac{\partial}{\partial x_i} < grad\,(h)\,, \tfrac{\partial}{\partial x_j} > - < grad\,(h)\,, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \tfrac{\partial}{\partial x_j} >\right] \\
&= \sum_{i,j} g^{ij}\left[\tfrac{\partial}{\partial x_i}\left(dh\left(\tfrac{\partial}{\partial x_j}\right)\right) - dh\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \tfrac{\partial}{\partial x_j}\right)\right].
\end{aligned}$$

Considerando el diferencial covariante del funcional dh, obtenemos

$$\triangle h = \sum_{i,j} g^{ij}\left(\nabla dh\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right) = \sum_{i,j} g^{ij}\,(\nabla dh)_{ij}\,. \tag{6}$$

Luego, la expresión local para el campo de tensiones de f está dada por

$$\tau\,(f) = \sum \tau^{\gamma} \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}}$$

donde

$$\tau\,(f)^{\gamma} = \sum_{i,j} g^{ij}\left(\nabla\,(df)^{\gamma}_{ij}\right) = \sum_{i,j} g^{ij}\left[(\nabla df^{\gamma})_{ij} + \sum_{\alpha}\sum_{\beta} f^{\alpha}_{j} f^{\beta}_{i} \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\right].$$

Teniendo en cuenta la expresión local del laplaciano, ver (6), obtenemos,

$$\tau^{\gamma} = \Delta f^{\gamma} + \sum_{i,j}\sum_{\alpha,\beta} f^{\alpha}_{j} f^{\beta}_{i} \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} g^{ij}$$

con $\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, \dim N$. Observemos que Δ es el laplaciano asociado a la variedad riemanniana M y τ es un sistema de operadores semielípticos de segundo orden.

Definición 3.3. *Sean (M, g) y (N, h) dos variedades riemannianas y $f : M \to N$ una aplicación C^{∞}. Decimos que f es armónica si $\tau\,(f) = 0$.*

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 3.1. *Si $N = \mathbb{R}$ entonces f es una aplicación armónica si f es una función armónica en el sentido (6).*

Ejemplo 3.2. *La aplicación identidad en M es armónica dado que $\nabla df\,(X,Y) = 0$ para todo $X, Y \in TM$, ver (3).*

En general, decimos que una aplicación $f : M \to N$ es totalmente geodésica si su segunda forma fundamental es nula, es decir, $\nabla\,(df) = 0$. En particular toda aplicación totalmente geodésica es armónica.

Ejemplo 3.3. *Sea $f : S \to \mathbb{R}^3$ una inmersión isométrica de una superficie regular en $\mathbb{R}^3$, localmente parametrizada por coordenadas isotérmicas, es decir, $g_{ij} = \lambda^2\delta_{ij}$. Entonces,*

$$\tau^\gamma = \Delta^S f^\gamma = \lambda^2 \Delta f^\gamma, \quad \gamma = 1, 2, 3$$

donde Δ es el laplaciano en el plano $\mathbb{R}^2$.Por lo tanto es f una inmersión mínima si y solamente si cada f^γ es una función armónica en el sentido euclidiano.

En general, si $f : M \to N$ es una inmersión isométrica entonces la segunda forma fundamental de f está dada por, ver (3) y [3], capítulo 6,

$$\nabla\,(df)\,(X,Y) = B\,(X;Y) = \nabla^N_X Y - \nabla_X Y$$

donde X e Y son identificados con $df\,(X)$ y $df\,(Y)$ respectivamente y la conexión riemanniana en M está dada por la parte tangente de la conexión de N, es decir $\nabla_X Y = df\left(\nabla^M_X Y\right)$. Recordando la definición de curvatura media , ver [3], tenemos

$$H = Tr\,(B\,(X;Y)) = \tau\,(f)\,.$$

Teorema 3.1. *Sea $f : (M,g) \to (N,h)$ una inmersión isométrica. Entonces*

$$\tau\,(f) = mH$$

donde $m = \dim M$ y H es el vector curvatura media. En particular, una inmersión isométrica es mínima si y solamente si es armónica.

Finalmente, recordemos que toda aplicación $f : M \to N$, entre dos variedades riemannianas es armónica si es un extremo de un problema variacional. de la función energía, ver [1]. Es decir, si

$$E(f) = \int_M \|df\|^2 v_g$$

es la energía de f donde v_g es el elemento de volumen en M , $\|df\|$ es la traza de la forma cuadrática $f^*(h)$ según la métrica g. Y si consideramos la siguiente variación $f_t : M \to N$ tal que $f_t(x) = \exp_{f(x)} tv(x)$ donde $v \in C(f^{-1}TN)$ entonces f es armónica si $\frac{d}{dt}E(f_t)\big|_{t=0} = 0$. Por lo tanto se ha obtenido una generalización para aplicaciones entre variedades riemannianas de la siguiente situación particular:" *Una inmersión isométrica f es mínima, es decir, el trazo de la segunda forma fundamental (vector curvatura media de f) es cero es equivalente a que f sea extremo de un problema variacional de la función volumen*". Ver [4]

Referencias

[1] J. Eells & J. Sampson. *Harmonic mappings of Riemannian manifolds.* Amer. J. Math. (86), 109-160. 1964.

[2] J. Eells & Luc Lemaire. *Selected topics in harmonic maps.* CBMS. Regional Conf. series 50, A.M.S. Providence, 1988.

[3] Manfredo do Carmo. *Geometria Riemanniana.* Projeto Euclides, 1988.

[4] H. Blaine Lawson Jr. *Lectures on minimal submanifolds, volume 1.* Mathematics Lecture Series (9), Publish or Perish, 1980.

[5] Robert Osserman, *A Survey of Minimal Surfaces,* Dover Publications, Inc. 1986

[6] S. Kobayashi & K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry, Volume 1.* Interscience Publishers, 1963.

Abstract

In this paper we present a brief introduction to harmonic maps between riemannian manifolds. We do this from tensorial stand point. That is, a map is harmonic if the trace of its second fundamental form is zero.

Keywords: Harmonic maps, minimal inmersion, tension field.

Christiam Figueroa
Sección Matemáticas,
Departamento de Ciencias,
Pontificia Universidad Católica del Perú
cfiguer@pucp.edu.pe