

# EL MÉTODO HOMOGÉNEO Y AUTO-DUAL PARA EL PROBLEMA DINÁMICO LINEAL DE DISTRIBUCIÓN/INVENTARIO AMBIENTE MATLAB

*Luis Ernesto Torres Guardia*<sup>1</sup>

Octubre, 2009

## *Resumen*

*Presentamos aquí el método homogéneo y auto-dual para el problema dinámico de programación lineal de distribución/inventario, formulado como un problema de flujo lineal en red. Este método es combinado con una estrategia de Mehrotra de predictor-corrector, con la misma matriz de coeficientes en cada iteración. El sistema lineal resultante, pero con diferentes lados derechos, es resuelto mediante el método de Cholesky de descomposición de la matriz asociada al sistema lineal. El referido método homogéneo y auto-dual es aplicado a este modelo de distribución dinámica en diferentes dimensiones, y la experiencia computacional muestra que este método es eficiente para la solución de este tipo especial de problema lineal.*

Clasificación 90C05, 90C51, 90B06

**Palabras Clave:** Programación lineal, Método Homogéneo y Auto-Dual,  
Logística

1. Departamento de Engenharia de Produção, Univ. Federal Fluminense.

## 1. Introducción

Después de que Karmarkar [6] propusiera su método de punto interior para resolver problemas de programación lineal con mejores resultados que los obtenidos por el método simplex, muchos otros métodos basados en sus estudios se han desarrollado.

Entre los métodos desarrollados tenemos el método primal-dual, analizado por ejemplo en el libro de Wright [12] y el predictor-corrector, desarrollado por Mehrotra [7].

El método de punto interior requiere un esfuerzo computacional para resolver los sistemas de ecuaciones lineales de Newton, que provienen de la aparición gradual de sus iteraciones, y en la práctica, ocurre de la descomposición de la matriz asociada con el Sistema lineal, y se pueden realizar diversas veces tales descomposiciones si las soluciones del sistema lineal ayudan a reducir el número total de iteraciones del método. Esta es la idea básica propuesta por Mehrotra [7] en su denominado método predictor-corrector.

Otro paso fundamental para el método de puntos interiores es determinar un punto de partida que sea viable, lo que podría ser obtenido usando el método de las II-Fases o el método de la M-Grande. Este problema se puede evitar si se utiliza la técnica llamada homogénea y auto-dual propuesta en primer lugar por Ye et al. [14]. Esta técnica fue posteriormente simplificada por Xu et al. [13] combinando con la técnica de Mehrotra [7]. de predictor-corrector, de modo que, en cada iteración del método homogéneo y auto-dual, la matriz del sistema lineal sea la misma, para el paso predictor-corrector, pero con diferentes lados derechos. El método homogéneo y autodual es aplicado por Berkelaar et al. [3] y por Sun y Liu [10] en la solución del problema lineal estocástico formulado a través de escenarios, lo que deviene en un problema de programación lineal de gran porte dependiendo del número de escenarios.

En este trabajo presentamos el método homogéneo y auto-dual de Xu et al. [13] para resolver un problema de programación lineal, mediante la combinación con la técnica predictor-corrector de Mehrotra [7] y la aplicamos en la determinación de la solución del problema dinámico lineal de distribución/inventario formulado como un problema lineal de flujo en red, el cual es un problema de gran porte debido a su estructura de red que forma la matriz de restricciones.

Para una mayor comprensión de la teoría del flujo en red y de sus aplicaciones, se sugiere consultar el libro de Ahuja et al. [1]. Para una mejor comprensión acerca de la teoría de puntos interiores y otros métodos, se sugiere la lectura de Wright [12] y Vanderbei [11].

Este trabajo se ha organizado como sigue: la sección 2 describe el método homogéneo y auto-dual para resolver el problema de programación lineal; en la sección 3, se presenta la formulación matemática del problema dinámico lineal de distribución/inventario formulado como un problema lineal de flujo en red; en la sección 4, se dan los resultados computacionales del método homogéneo y auto-dual aplicado al caso mencionado anteriormente en diferentes dimensiones, usando el ambiente Matlab; y, finalmente, en la última sección, se presentan las conclusiones de este estudio.

## 2. Método Homogéneo y Auto-dual

En esta sección se presenta el método homogéneo y auto-dual para resolver el problema de programación lineal, siguiendo el trabajo de Xu et al. [13]. Consideremos el siguiente problema primal de programación lineal dado en el formato estándar:

$$\begin{aligned} (P) \quad & \text{mín } c^T x, \\ & \text{sujeito a: } Ax = b, \\ & \quad \quad x \geq 0, \end{aligned}$$

donde  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $A$  es una matriz de rango completo,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $m < n$  y  $b \in \mathbb{R}^m$  son dados, y  $x$  es el vector de decisión,  $x \in \mathbb{R}^n$ . El problema dual de (P) puede ser descrito como:

$$(D) \quad \begin{aligned} & \text{máx } b^T y, \\ \text{sujeto a: } & A^T y + z = c, \\ & z \geq 0, \end{aligned}$$

donde  $y \in \mathbb{R}^m$  y  $z \in \mathbb{R}^n$  es el vector dual de holgura.

En general, para resolver (P) y (D) es importante tener una solución inicial factible para iniciar el proceso de optimización. Este punto inicial puede ser obtenido por la fase I del método de las II-Fases o usando el método de la M-Grande. Para evitar el uso del método II-Fases o el de la M-Grande, Ye et al. [14] usaron el algoritmo homogéneo y auto-dual para (P) y (D), que tiene el siguiente formato:

$$(1) \quad \begin{aligned} Ax - b\tau &= 0, \\ -A^T y + c\tau &\geq 0, \\ b^T y - c^T x &\geq 0, \\ x, \tau &\geq 0. \end{aligned}$$

El sistema (1) es transformado en un sistema con restricciones de igualdad incluyendo variables adicionales. Así tenemos el sistema denominado  $H$ :

$$H : \quad \begin{aligned} Ax - b\tau &= 0, \\ -A^T y - z + c\tau &= 0, \\ b^T y - c^T x - \kappa &= 0, \\ x, z, \tau, \kappa &\geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Si el sistema  $H$  tiene una solución  $(x^*, y^*, z^*, \tau^*, \kappa^*)$ , tal que  $\tau^* > 0$  y  $\kappa^* = 0$ , entonces una solución óptima para (P) es  $x^*/\tau^*$  y una solución óptima para (D) es  $\left(\frac{y^*}{\tau^*}, \frac{z^*}{\tau^*}\right)$ . Por otro lado, la solución  $(x^*, y^*, z^*, \tau^*, \kappa^*)$

es tal que

$$x^* + z^* > 0 \quad \text{y} \quad \tau^* + \kappa^* > 0$$

y, por tanto, debemos analizar cualquier solución  $(x, y, z, \tau, \kappa)$  de  $H$ , la que necesariamente debe satisfacer

$$x^T z + \tau \kappa = 0.$$

Consideremos un punto interior para el sistema  $H$  tal que  $x^k > 0, y^k, z^k > 0, \tau^k > 0$  y  $\kappa^k > 0$ . Partiendo de este punto interior, se aplica el método modificado de Newton para resolver el sistema  $H$ . En cada iteración, el método homogéneo y auto-dual resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales, para determinar la dirección  $(dx, dy, dz, d\tau, d\kappa)$ :

$$\begin{aligned} Adx - bd\tau &= \eta r_P^k, \\ -A^T dy - dz + cd\tau &= -\eta r_D^k, \\ b^T dy - c^T dx - d\kappa &= \eta r_G^k, \\ Z^k dx + X^k dz &= \gamma \mu e - X^k z^k, \\ \kappa^k d\tau + \tau^k d\kappa &= \gamma \mu - \tau^k \kappa^k, \end{aligned} \tag{3}$$

donde  $r_P^k = b\tau^k - Ax^k$ ,  $r_D^k = c\tau^k - A^T y^k - z^k$ ,  $r_G^k = c^T x^k - b^T y^k + \kappa^k$ ,  $\eta$  y  $\gamma$  son dos parámetros positivos, y:

$$\mu^k = \frac{(x^k)^T z^k + \tau^k \kappa^k}{n + 1}.$$

En las expresiones anteriores se denomina  $e = (1, \dots, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $X^k$  y  $Z^k$  indican matrices diagonales con  $x^k$  y  $z^k$  sus respectivas diagonales.

El método genérico homogéneo y auto-dual para resolver problemas de programación lineal, presentado por Xu et al. [13], se describe a continuación:

Dado el punto inicial  $x^0 > 0$ ,  $y^0$ ,  $z^0 > 0$ ,  $\tau^0 > 0$  y  $\kappa^0 > 0$ ;  $\eta \in [0, 1]$  y  $\gamma \in [0, 1]$ ,  $k \leftarrow 0$ .

1. Sea  $r_P^k = b\tau^k - Ax^k$ ;  $r_D^k = c\tau^k - A^T y^k - z^k$ ;  $r_G^k = c^T x^k - b^T y^k + \kappa^k$ .
2. Resolver el sistema (3) para  $(dx, dy, dz, d\tau, d\kappa)$ .
3. Seleccionar el tamaño del paso  $\alpha^k > 0$ .
4. Actualizar

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k + \alpha^k dx > 0, \\ y^{k+1} &= y^k + \alpha^k dy, \\ z^{k+1} &= z^k + \alpha^k dz > 0, \\ \tau^{k+1} &= \tau^k + \alpha^k d\tau > 0, \\ \kappa^{k+1} &= \kappa^k + \alpha^k d\kappa > 0. \end{aligned}$$

5. Si el criterio de parada se cumple, parar sino,  $k \leftarrow k + 1$ , ir al paso 1.

Xu et al. [13] aplica la técnica predictor-corrector de Mehrotra [7] para resolver el sistema (3). En particular, primero usar en el paso predictor  $\eta = 1$  y  $\gamma = 0$ , y tendremos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} Adx - bd\tau &= r_P^k, \\ -A^T dy + cd\tau - dz &= -r_D^k, \\ b^T dy - c^T dx - d\kappa &= r_G^k, \\ Z^k dx + X^k dz &= -X^k z^k, \\ \kappa^k d\tau + \tau^k d\kappa &= -\tau^k \kappa^k. \end{aligned} \tag{4}$$

Realizando las sustituciones convenientes en (4), sin tener en cuenta el superíndice  $k$ , tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}
 -\left(\frac{\tau}{\kappa}\right) cc^T dx + \left[A^T + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right) cb^T\right] dy + dz &= r_D + cf, \\
 \left[A^T - \left(\frac{\tau}{\kappa}\right) bc^T\right] dx + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right) bb^T dy &= r_p + bf,
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$Zdx + Xdz = -Xz.$$

Expresando en forma matricial, el sistema (5) es dado por:

$$\left( \left[ \begin{array}{ccc} 0 & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ Z & 0 & X \end{array} \right] + \frac{\tau}{\kappa} \left[ \begin{array}{c} -c \\ -b \\ 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} c \\ -b \\ 0 \end{array} \right]^T \right) \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_D + cf \\ r_p + bf \\ -Xz \end{pmatrix} \tag{6}$$

donde  $f = \frac{\tau\kappa + \tau r_G}{\kappa}$ .

Una vez determinada  $(dx, dy, dz)^T$ , podemos entonces calcular:

$$d\tau = f + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right) c^T dx - \left(\frac{\tau}{\kappa}\right) b^T dy,$$

y de la tercera ecuación del sistema lineal (4), podemos determinar  $d\kappa$ :

$$d\kappa = b^T dy - c^T dx - r_G^k.$$

Por tanto, hemos determinado la dirección  $(dx, dy, dz, d\tau, d\kappa)$ . Ahora, para obtener la solución del sistema lineal (6), éste puede ser expresado como:

$$(G + gh^T)u = v, \tag{7}$$

siendo,

$$G = \begin{bmatrix} 0 & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ Z & 0 & X \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} -c \\ -b \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h = \frac{\tau}{\kappa} \begin{bmatrix} c \\ -b \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$u = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} r_D + cf \\ r_P + bf \\ -Xz \end{pmatrix}.$$

Utilizando la fórmula conocida de Sherman-Morrison-Woodbury, consultar Nocedal y Wright [9], tenemos que la solución de (7) está dada por:

$$u = G^{-1}v - \left[ \frac{h^T(G^{-1}v)}{1 + h^T(G^{-1}g)} \right] G^{-1}g. \tag{8}$$

De (8), se puede observar que precisamos determinar  $G^{-1}v$  y  $G^{-1}g$ , esto es, debemos resolver el sistema lineal digamos  $G^{-1}v = r$  o  $Gr = v$ , para el primer caso, y lo mismo para  $G^{-1}g = t$  o  $Gt = g$ . Esto significa resolver el sistema lineal:

$$\begin{bmatrix} 0 & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ Z & 0 & X \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_D + cf \\ r_P + bf \\ -Xz \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Similarmente, se resuelve también el sistema digamos  $G^{-1}g = t$  o  $Gt = g$ , esto es:

$$\begin{bmatrix} 0 & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ Z & 0 & X \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Las matrices de coeficientes de (9) y (10) tienen la misma estructura, como en los métodos de puntos interiores primal-dual para resolver problemas de programación lineal estándar, consultar, por ejemplo, Wright [12], pero los lados derechos de (9) y (10) son diferentes. Considerando estas observaciones, entonces para cualquier vector del lado derecho, la solución del sistema lineal de la forma (9) o (10), esto es:

$$\begin{bmatrix} 0 & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ Z & 0 & X \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

es dado por:

$$\begin{aligned} (AZ^{-1}XA^T)p_2 &= AZ^{-1}(Xq_1 - q_3) + q_2, \\ p_3 &= q_1 - A^T p_2, \\ p_1 &= Z^{-1}(q_3 - Xp_3). \end{aligned} \tag{12}$$

La primera ecuación de (12) se denomina sistema normal. La solución de este sistema puede ser determinada usando algún algoritmo de descomposición de la matriz  $(AZ^{-1}XA^T)$ , siendo esta última matriz, simétrica definida y positiva. En nuestro caso, usamos el método tradicional de Cholesky, consultar Nocedal y Wright [9]. Este es el método de descomposición de la matriz  $(AZ^{-1}XA^T)$  donde  $(AZ^{-1}XA^T) = U^T U$ , siendo  $U$  una matriz triangular superior. En este caso, la solución del sistema normal (12) está determinado por la solución de los dos sistemas triangulares, lo que puede calcularse fácilmente. Por tanto utilizando la primera ecuación de (12), y realizando las operaciones convenientemente, podemos determinar los vectores  $r = G^{-1}v$  y  $t = G^{-1}g$ , y así de (8), tenemos el vector  $u$  dado por:

$$u = r - \left[ \frac{h^T r}{1 + h^T t} \right] t.$$

Así, el sistema (6) se resuelve para  $(dx, dy, dz)^T$ , y usando (4) todas las otras variables  $d\tau$  y  $d\kappa$  son determinadas.

Denominamos la solución resultante del sistema de ecuaciones (4) como la dirección afín  $(dx^a, dy^a, dz^a, d\tau^a, d\kappa^a)$ , y calculamos el tamaño del paso  $\alpha$  dado por:

$$\alpha = \frac{\theta}{\min \left( X^{-1}dx^a, Z^{-1}dz^a, \frac{d\tau^a}{\tau^a}, \frac{d\kappa^a}{\kappa^a}, -\theta \right)}. \tag{13}$$

Así, en el paso predictor, podemos determinar  $(x', y', z', \tau', \kappa')$  dado por

$$(x', y', z', \tau', \kappa') = (x^k, y^k, z^k, \tau^k, \kappa^k) + \alpha(dx^a, dy^a, dz^a, d\tau^a, d\kappa^a), \tag{14}$$

$$y \quad \mu^k = \frac{(x^k)^T z^k + \tau^k \kappa^k}{n+1}, \quad \mu_a = \frac{(x')^T z' + \tau' \kappa'}{n+1}$$

y calculamos:

$$\gamma = \begin{cases} \left( \frac{\mu_\alpha}{\mu^k} \right)^2 & \text{si } \left( \frac{\mu_\alpha}{\mu^k} \right) \leq 0,01 \\ \text{mín} \left\{ 0,1; \text{máx} \left[ \left( \frac{\mu_\alpha}{\mu^k} \right)^3 ; 0,0001 \right] \right\} & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (15)$$

y hacer  $\eta = 1 - \gamma$ .

Se puede ver que  $\gamma \leq 0,1$ , luego  $\eta \geq 0,9$ . La elección anterior dada por Xu et al. [13] debe ser apropiadamente calculada para que garantice una mayor eficiencia del método predictor-corrector.

Hecho esto, realizamos el paso corrector que consiste en resolver el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} A dx - b d\tau &= \eta r_P^k, \\ -A^T dy + c d\tau - dz &= -\eta r_D^k, \\ b^T dy - c^T dx - d\kappa &= \eta r_G^k, \\ Z^k dx + X^k dz &= -X^k z^k - D_x^a d_z^a + \gamma \mu^k e, \\ \kappa^k d\tau + \tau^k d\kappa &= -\tau^k \kappa^k - d_\tau^a d_\kappa^a + \gamma \mu^k, \end{aligned} \quad (16)$$

donde se añadieron  $D_x^a d_z^a$  y  $d_\tau^a d_\kappa^a$  respectivamente, y  $D_x^a = \text{diag} (d_x^a)$  es la matriz diagonal con las componentes del vector  $d_x^a$ .

La solución del sistema (16) es determinada siguiendo el mismo esquema realizado para la obtención de la solución del sistema (14). Se denomina

la solución (16) por  $(dx', dy', dz', d\tau', d\kappa')$  y calculamos el tamaño del paso  $\alpha$  en forma semejante a lo hecho en (13), esto es:

$$\alpha = -\frac{\theta}{\min\left(X^{-1}dx', Z^{-1}dz', \frac{d\tau'}{\tau'}, \frac{d\kappa'}{\kappa'}, -\theta\right)}. \quad (17)$$

Hacer luego:

$$(x^{k+1}, y^{k+1}, z^{k+1}, \tau^{k+1}, \kappa^{k+1}) = (x', y', z', \tau', \kappa') + \alpha(dx', dy', dz', d\tau', d\kappa')$$

Si el criterio de parada no se cumple, realizar el paso predictor con  $\gamma = 0$  y  $\eta = 1$ , esto es, resolver el sistema (4). Después aplicar el paso corrector, esto es, resolver el sistema (16). En caso contrario, si el criterio de parada fuera satisfecho, consultar Xu et al. [13], tenemos una solución óptima aproximada dada por:

$$(x^*, y^*, z^*) = \left(\frac{x^{k+1}}{\tau^{k+1}}, \frac{y^{k+1}}{\tau^{k+1}}, \frac{z^{k+1}}{\tau^{k+1}}\right).$$

### 3. El Problema Dinámico de Distribución

Una cadena de suministros puede ser entendida como una forma de colaboración entre los proveedores minoristas y consumidores para la creación del valor de participación de los flujos físicos, de información, financieros y de conocimiento, cuyo objetivo es satisfacer las necesidades del consumidor final con productos y servicios de diversos proveedores vinculados (Ayers [2]). Problemas similares se pueden observar también en los trabajos de Cheung y Powell [4], Nagurney, et al. [8], y Dong, et al. [5].

Para ilustrar la eficiencia del método homogéneo y auto-dual, consideremos el problema de distribución dinámica en un horizonte de planificación  $T$ , el cual puede ser formulado como un PPL de la siguiente forma:

$$\min \sum_{i \in P} \sum_{j \in A} c_{ij}(t)x_{ij}(t) + \sum_{j \in A} \sum_{k \in C} q_{jk}(t)y_{jk}(t)$$

sujeto a:

$$\sum_{j \in A} x_{ij}(1) + x_{ii}(1) = a_i(1); i \in P,$$

$$-\sum_{i \in A} x_{ij}(1) + y_{jj}(1) + \sum_{k \in C} y_{jk}(1) = 0; j \in A,$$

$$\sum_{j \in A} x_{ij}(t) + x_{ii}(t) = a_i(t) + x_{ii}(t-1); i \in P,$$

$$-\sum_{i \in A} x_{ij}(t) + y_{jj}(t-1) + \sum_{k \in C} y_{jk}(t) + y_{jj}(t) = 0; j \in A,$$

$$\sum_{j \in A} y_{jk}(t) = d_k(t); k \in C,$$

$$x_{ij} \geq 0; i \in P; j \in A,$$

$$y_{jk} \geq 0; j \in A; k \in C,$$

donde  $P$  es el centro de producción, con  $i \in P$ ,  $A$  representa el centro de almacenamiento, con  $j \in A$ ,  $C$  representa el centro de consumo con  $k \in C$ ,  $x_{ij}(t)$  es el número de unidades transportadas del centro de producción  $i$  al centro de almacenamiento  $j$ , en el período  $t$ , y  $x_{ii}(t)$  es el número de unidades que quedan en el centro de producción  $i$ , que ocasionan un costo de almacenaje  $c_{ii}(t)$ , en el período  $t$ ,  $y_{jk}(t)$  representa el número de unidades transportadas del centro de almacenamiento  $j$  al

centro de consumo  $k$ , en el período  $t$ , siendo  $y_{jj}(t)$  el número de unidades que quedan en el centro de almacenamiento  $j$ , y que ocasionan un costo de almacenaje  $q_{jj}(t)$ , en el período  $t$ ,  $a(t)$  representa la cantidad de bienes producidos en el período  $t$  en el centro de producción  $i \in P$ ,  $d_k(t)$  es la cantidad de bienes consumidos en el período  $t$  en el centro de consumo  $k, k \in C$ .

En la figura siguiente:

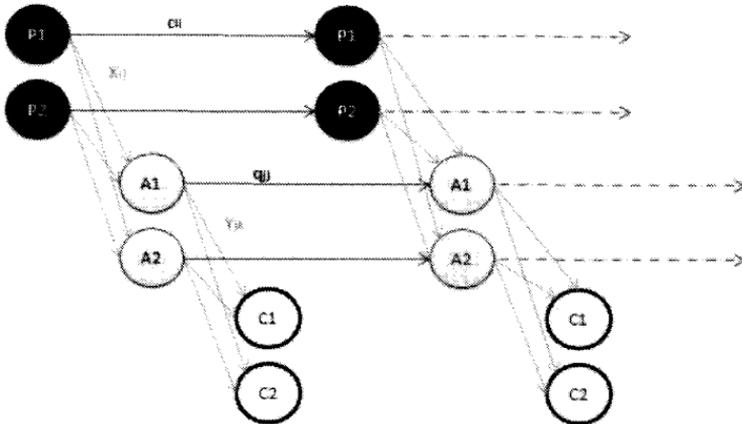


Figura 1: Problema de distribución dinámica

En un período de observación  $t$  los centros de fabricación producen bienes que son enviados a los centros de almacenamiento que atienden las necesidades de cada centro de consumo en el mismo período. En  $t + 1$  los centros de fabricación continúan produciendo bienes para ser distribuidos a los centros de consumo, pero es posible que aún haya bienes residuales (inventarios del período anterior dentro de los propios centros de producción o de los centros de almacenamiento). Tales inventarios

deben ahora ser considerados en la planificación de la distribución de los bienes, sabiéndose que el flujo total de entrada deberá ser igual al flujo de salida en cada nudo y aún obedecer a las siguientes restricciones:

$$\sum_{t=1}^N a_i(t) = \sum_{t=1}^N d_k(t); \quad i \in P \text{ y } k \in C.$$

## 4. Resultados Computacionales

Redes de diferentes tamaños fueron analizadas, en función del número de centros de producción, centros de almacenamiento, centros de consumo y número de períodos en el horizonte de planeamiento. Para ello fue implementado un programa específico en lenguaje MATLAB, que determina el nudo de origen y el nudo de destino que definen el arco de la red. Un punto de partida en el método homogéneo y auto-dual es el siguiente:  $x^0 = e, y^0 = -0,25, z^0 = e, \tau^0 = 1, \kappa^0 = 1$ , pero una buena elección de otro punto inicial podría hacerse, y tal vez mejorar con ello el rendimiento computacional. Para determinar el tamaño del paso  $\alpha$  correspondiente, se utilizaron en todas las pruebas computacionales el valor de  $\theta = 0,99995$ . El algoritmo homogéneo y auto-dual fue totalmente codificado en MATLAB. Todos los experimentos se realizaron en un microcomputador PC Athlon con 1,46 GB de RAM y 1,79 GHZ de frecuencia en la plataforma Windows XP.

Como se mencionó, la matriz  $(AZ^{-1}XA^T)$  es descompuesta usando el método de Cholesky de tal forma que  $(AZ^{-1}XA^T) = U^T U$ . Para realizar tal descomposición, el comando chol del ambiente MATLAB fue usado. En este caso, almacenamos la matriz  $A$  y la matriz  $(AZ^{-1}XA^T)$ , pero otros métodos de descomposición podrían ser usados de modo que se evite almacenar tales matrices. A continuación presentamos los resultados computacionales para redes de diferentes dimensiones.

<b>M</b>	<b>10</b>	<b>8</b>	<b>7</b>	<b>5</b>
<b>N</b>	<b>12</b>	<b>10</b>	<b>9</b>	<b>8</b>
<b>P</b>	<b>15</b>	<b>12</b>	<b>11</b>	<b>10</b>
<b>H</b>	<b>8</b>	<b>12</b>	<b>15</b>	<b>20</b>
<b>N-link</b>	<b>2.877</b>	<b>2.817</b>	<b>2.833</b>	<b>2.781</b>
<b>N-nudo</b>	<b>333</b>	<b>390</b>	<b>432</b>	<b>483</b>
<b>Iteración</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>6</b>	<b>6</b>
<b>Primal</b>	<b>107.999,6400139</b>	<b>135.199,9979059</b>	<b>153.999,9997912</b>	<b>157.499,9997999</b>
<b>Dual</b>	<b>107.999,6963959</b>	<b>135.199,9982127</b>	<b>153.999,9998406</b>	<b>157.499,9998878</b>
<b>Tiempo</b>	<b>11.947268</b>	<b>15.739167</b>	<b>17.478252</b>	<b>20.478829</b>

**Tabla 1.** Resultados computacionales.

Allí  $M$  es el número de centros de producción,  $N$  representa el número de centros de almacenamiento,  $P$  es el número de centros de consumo,  $H$  representa el número de períodos, siendo N-link el número de arcos, N-nudo el número de nudos, Iteración representa el número de iteraciones realizadas, Primal es el valor de la función objetivo del problema primal, Dual es el valor de la función objetivo del problema dual, Tiempo es el tiempo de procesamiento dado en segundos. De la Tabla 1, se observa que la diferencia entre los valores de la función objetivo del correspondiente problema lineal primal y dual es pequeña. Por otro lado, el número de iteraciones es típicamente muy pequeño cuando aplicamos este método homogéneo y auto-dual. Podemos decir que este método estudiado se comporta muy bien para el caso del problema lineal dinámico de flujo en red de diferentes dimensiones.

## 5. Conclusiones

Este trabajo presenta el método homogéneo y auto-dual para resolver el problema de programación lineal de gran porte como es el caso

del problema dinámico de distribución/inventario formulado como un problema lineal de flujo en red y  $A$  es la matriz de restricciones lineales. El método de Cholesky, del MATLAB, es usado para determinar la descomposición de la matriz  $(AZ^{-1}XA^T)$ , y así obtener la solución de más de un sistema lineal pero con diferentes lados derechos, cuando se aplica tanto el paso predictor como el corrector, respectivamente. Los resultados numéricos obtenidos con algunas redes de diferentes dimensiones confirman la eficiencia del método homogéneo y auto-dual.

## Referencias

- [1] Ahuja, A., Magnanti, T. and Orlin, J., (1993). *Networks Flows: Theory, Algorithms and Applications*. Prentice-Hall, Inc. New Jersey.
- [2] Ayers, James B. (2001). *Introduction to the supply chain*. In AYERS, James B. ed. - Handbook of supply chain management. Boca Raton, FL: St. Lucie Press.
- [3] Berkelaar, A., Dert, C., Oldenkamp, B. and Zhang, S., (2002). *A primal-dual decomposition-based interior point approach to two-stage stochastic linear programming*. Operation Research, 50, 904-915.
- [4] Cheung, R. and Powell, W., (1996). *Models and algorithms for distribution problems with uncertain demands*. Transportation Science, 30, 43 - 59.
- [5] Dong, J., Zhang, Tan, H. and Nagurney, A., (2005). *Multitiered supply chain networks: Multicriteria decision - making under uncertainty*. Annals of Operations Research, 135, 155 - 178.
- [6] Karmakar, N., (1984). *A polynomial-time algorithm for linear programming*. Combinatorica, 4, 373-395.
- [7] Mehrotra, S., (1992). *On the implementation of a primal-dual interior point*, SIAM. Journal on Optimization, 2, 575-601.

- [8] Nagurney, A., Cruz, J. and Matsypura, D., (2003). *Dynamics of global supply chain supernetworks.* , Mathematical and Computer Modelling, 37, 963 - 983
- [9] Nocedal, J. and Wright, S., (1999). *Numerical Optimization.* Springer-Verlag, New York.
- [10] Sun, J. and Liu, X., (2006). *Scenario formulation of stochastic linear programs and the homogeneous self-dual interior-point method.* INFORMS Journal on Computing, 18, 444-454.
- [11] Vanderbei, R., (2008). *Linear Programming* 3rd. Ed. Springer, Boston.
- [12] Wright, S., (1997). *Primal-Dual Interior-Point methods.* SIAM, Philadelphia.
- [13] Xu, X., Hung, P. and Ye, Y., (1996). *A simplified homogeneous and self-dual linear programming algorithm and its implementation* Annals of Operation Research, 62, 151-171.
- [14] Ye, Y., Todd, J. and Mizuno, S., (1994) *An iteration homogeneous and self dual linear programming algorithm.* Mathematics of Operations Research, 19, 53-67.

## **Abstract**

In this work, we present the homogeneous and self-dual method for linear programming and we apply this method to the dynamic distribution/inventory problem formulated as a network flow problem. At each iteration, the homogeneous and self-dual method is combined, with the predictor and corrector strategy to solve two linear systems with the same matrix factors with different right-hand side. These systems are solved by using the Cholesky decomposition method of the matrix of the corresponding linear system. The homogeneous and self-dual method is

applied for solving different dynamic distribution/inventory problems and the computational experiments show that this method is efficient for solving this special class of linear programming

**Keywords:** linear programming, homogeneous and self-dual method, logistic.

Luis Ernesto Torres Guardia  
Universidade Federal Fluminense,  
Departamento de Engenharia de Produção,  
Rua Passos da Pátria 156, São Domingos  
24210-240, Niterói, RJ, Brasil  
tepletg@vm.uff.br