

# HOMOLOGÍA DE HOCHSCHILD Y HOMOLOGÍA CÍCLICA PARA INTERSECCIÓN COMPLETA CON SINGULARIDADES AISLADAS

*Rubén E. Burga Barboza*<sup>1</sup>

Diciembre, 2009

## *Resumen*

*Sea  $R$  el anillo local de un punto  $P$  de una variedad algebraica suave. Cuando el álgebra  $R/I$  es suave la homología de Hochschild y cíclica es conocida. Nosotros tratamos el caso en que el anillo  $R/I$  tiene una singularidad aislada e  $I$  es intersección completa.*

Clasificación AMS 2000: 09C05

*Palabras Clave: Singularidades aisladas, Homología de Hochschild, Homología Cíclica.*

1. *Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, UNPRG, Lambayeque-Perú*

## 1. Introducción

En el presente trabajo desarrollaremos herramientas para calcular la homología cíclica y la homología de Hochschild para  $A = R/\langle f, g \rangle$ ; aquí  $R$  es el anillo local de un punto racional regular de un esquema de tipo finito sobre un cuerpo  $k$  de característica cero. Es decir  $R = (k[x_1, \dots, x_s]/I')_\eta$  y  $\eta = (x_1 - a_1, \dots, x_s - a_s)$ . El ideal  $I = \langle f, g \rangle$  es de tipo intersección completa con una singularidad aislada en  $(R, \eta)$ . Este anillo es un caso particular de un anillo regular local esencialmente de tipo finito (r.l.e.t.f). Los cálculos que aquí se obtienen generalizan los resultados de Michler, Hülb, Bach, [21], [8], [5].

Como  $R$  es proyectivo como  $k$ -módulo, podemos escribir la homología de Hochschild como  $HH_*(R) = Tor_*^{R^e}(R, R)$ . En particular, si el ideal  $J = \ker(R \otimes R \rightarrow R)$  es localmente generado por una secuencia regular, tenemos una descripción concreta de la homología de Hochschild:  $HH_*(R) = \Omega_R^*$  (Teorema de Hochschild Kostant Rosenberg). Las álgebras con esta propiedad se llaman suaves. En esta dirección, podemos indicar que la homología de Hochschild caracteriza la suavidad de un anillo regular local e.t.f: Por un lado si  $A$  es suave entonces la homología de Hochschild en grado  $n$  se anula para todo  $n > m := \dim(R)$ , por otro lado tenemos el siguiente resultado de Avramov-Vigué [2] y de BACH [6]:

**Teorema 1.1.** *Sea  $A$  un álgebra f.g. sobre un cuerpo  $k$  tal que la homología de Hochschild se anule en grados  $i$  y  $j$  para algún  $i$  par y  $j$  impar entonces  $A$  es suave.*

En el caso suave podemos describir a la homología cíclica por medio de la cohomología de deRham

$$HC_n(A) = \frac{\Omega_A^n}{d\Omega_A^{n-1}} \oplus (\oplus_{i \geq 1} H_{DR}^{n-2i}(A)),$$

según [18, Teorema 2.9].

Sea  $A$  un álgebra de la forma  $A = k[x_1, \dots, x_m]/I$  donde  $I$  es un ideal de tipo intersección completa. En [4] se define la homología cíclica y de Hochschild para álgebras diferenciales graduadas. Sea  $V$  un espacio vectorial graduado concentrado en grado uno. Identificando el álgebra graduada  $\wedge V$  con el módulo graduado del complejo Koszul se proporciona un diferencial a  $\wedge V$ . Esto convierte a  $(\wedge V, d)$  en un álgebra diferencial graduada. Mostrando una versión graduada del teorema de Hochschild Kostant Rosenberg para el álgebra  $(\wedge V, d)$  hallan una fórmula explícita,  $HH_n(\wedge V, d) = \bigoplus_{p \geq 0} HH_n^{(p)}$ ,  $HC_n(\wedge V, d) = HC_n(k) \oplus \bigoplus_{p \geq 0} HC_n^{(p)}$ , que calcula la homología de Hochschild y cíclica de  $A$  (ver [4]). En [9] se usa un método similar para hallar una fórmula que calcula la homología cíclica y de Hochschild para álgebras de la forma  $R/I$ , donde  $R$  es homológicamente regular e  $I$  es localmente una intersección completa. Estas fórmulas (ver [9, Corolario 3.4]), que en el caso  $R$  regular fueron obtenidas por [12], expresan la homología de Hochschild y cíclica en función de los complejos  $L_j$  y  $D_j$  para  $j > 0$  respectivamente, definidos de la siguiente manera

$$L_j : 0 \longrightarrow \frac{I^j \Omega_R^0}{I^{j+1} \Omega_R^0} \xrightarrow{d_{DR}} \frac{I^{j-1} \Omega_R^1}{I^j \Omega_R^1} \xrightarrow{d_{DR}} \dots \xrightarrow{d_{DR}} \frac{I \Omega_R^{j-1}}{I^2 \Omega_R^{j-1}} \xrightarrow{d_{DR}} \frac{\Omega_R^j}{I \Omega_R^j}$$

y

$$D_j : 0 \longrightarrow \frac{\Omega_R^0}{I^{j+1} \Omega_R^0} \xrightarrow{d_{DR}} \frac{\Omega_R^1}{I^j \Omega_R^1} \xrightarrow{d_{DR}} \dots \xrightarrow{d_{DR}} \frac{\Omega_R^{j-1}}{I^2 \Omega_R^{j-1}} \xrightarrow{d_{DR}} \frac{\Omega_R^j}{I \Omega_R^j}$$

Basados en la fórmula de [9, Corolario 3.4] en adelante nos dedicaremos a calcular la cohomología de los complejos  $L_j$  y de los  $D_j$ .

## 2. La Homología de Hochschild

En el caso que el ideal  $I$  es principal, para el cálculo de los módulos de cohomología de los complejos  $L_j$  se usa el siguiente método: Primero

se prueba que  $L_j$  es quasiisomorfo a  $K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m}) \otimes_R R/I$ , donde  $K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m})$  es el complejo de Koszul de la secuencia  $f_{x_1}, \dots, f_{x_m}$ . Si la singularidad de  $I$  en  $\eta$  es aislada y  $(R, \eta)$  es r.l.e.t.f, entonces  $K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m})$  es una resolución de  $R/J_f$ . Aquí  $J_f$  es el ideal jacobiano de  $f$ , y en general  $J_F$  representa el ideal jacobiano de  $F = (f_1, \dots, f_r)$ .

Esto nos permite describir la cohomología de  $L_j$  de la siguiente manera.

**Proposición 2.1.** *Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f,  $I = \langle f \rangle$  un ideal con una singularidad aislada en  $\eta$  entonces*

$$H^*(L_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } * \neq m, m-1 \\ \frac{(J_f:f)}{J_f} & \text{si } *=m-1 \\ \frac{R}{\langle f, J_f \rangle} & \text{si } *=m \end{cases} \quad (1)$$

para  $j \geq m = \dim R$ .

**Prueba.** Será suficiente hallar una resolución de  $R/\langle f \rangle$ . Como  $R$  es un dominio, el complejo

$$K(f) : R \xrightarrow{f} R$$

es una resolución de  $R/\langle f \rangle$ . Por lo tanto el complejo  $K(f) \otimes R/J_f$  se escribe como

$$K(f) \otimes R/\langle J_f \rangle : 0 \longrightarrow R/\langle J_f \rangle \xrightarrow{f} R/\langle J_f \rangle.$$

De aquí se sigue que  $H^i(L_j) = 0$  si  $i \neq m, m-1$ ,  $H^{m-1}(L_j) = \frac{(J_f:f)}{J_f}$ , y  $H^m(L_j) = R/\langle f, J_f \rangle$ .  $\square$

Este resultado se encuentra en [8] cuando  $R = k[x_1, \dots, x_n]$ , y se usa en [16] en el caso de un álgebra r.l.e.t.f. Todos ellos se limitan al caso en que  $I = \langle f \rangle$ .

Nosotros generalizamos estos cálculos al caso en que  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  sea una intersección completa. La generalización natural directa de las fórmulas anteriores al caso de dos polinomios sería

$$H^*(L_m) = \text{Tor}_{m-*}(R/\langle f, g \rangle, R/\langle J_f, J_g \rangle).$$

Sin embargo, esta nueva fórmula no se cumple en general, como se ve en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.2.** Sea  $f = x^2 + y^2 + z^2$  y  $g = xy + z^2$  en  $(R, \eta) = (k[x, y, z]_{(x,y,z)}, \eta)$ . Se prueba que  $f, g$  forman una secuencia regular. Un cálculo muestra que  $j_{f,g} = \langle x^2 - y^2, z(2x - y), z(2y - x) \rangle$ ,  $ht(\langle J_{f,g}, f, g \rangle) = 3$ . Es decir el ideal  $I = \langle f, g \rangle$  tiene una singularidad aislada de intersección completa en  $\eta$ . Más aún como  $J_f = J_g = \eta$  entonces  $ht(J_f) = ht(J_g) = 3 = \dim \text{Krull}(R)$ . Esta última conclusión significa que  $f$  y  $g$  tienen una singularidad aislada en  $\eta$ . Esto a su vez equivale a tener que los complejos  $K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m})$  y  $K(g_{x_1}, \dots, g_{x_m})$ , tienen cohomología cero para todo  $i \neq m$ , donde  $df = \sum_{i=1}^m f_{x_i} dx_i$  y  $dg = \sum_{i=1}^m g_{x_i} dx_i$ .

Debido a que el complejo  $L_m$  se puede escribir como

$$\begin{array}{ccccccc}
 L_m : & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & \Omega^{m-1} & \xleftarrow{dg} & \Omega^{m-2} & \xleftarrow{dg} & \Omega^{m-3} & \xleftarrow{\dots} \\
 & \downarrow df & & \downarrow df & & \downarrow df & \\
 & \Omega^m & \xleftarrow{dg} & \Omega^{m-1} & \xleftarrow{dg} & \Omega^{m-2} & \xleftarrow{\dots}
 \end{array}$$

tenemos la secuencia exacta corta

$$0 \longrightarrow K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m}) \otimes_R R/I \longrightarrow L_m \longrightarrow L_{m-1} \longrightarrow 0,$$

donde, en  $L_m$ , identificamos la primera columna de la izquierda con el complejo  $K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m}) \otimes_R R/I$ , y el cociente con  $L_{m-1}$ . Como  $f$  tiene



$dg \wedge \eta_2 = df \wedge \eta'_2$ . Por lo tanto podemos escribir

$$(f \cdot dg \wedge \eta_1 + g \cdot dg \wedge \eta_2) = (f \cdot df \wedge \eta'_1 + g \cdot df \wedge \eta'_2).$$

De aquí se sigue que la ecuación (2) se escribe como

$$dg \wedge df \wedge w_1 - (f \cdot df \wedge \eta'_1 + g \cdot df \wedge \eta'_2) = 0.$$

Si factorizamos  $df$  obtenemos

$$df \wedge (dg \wedge w_1 + f \cdot \eta'_1 + g \cdot \eta'_2) = 0.$$

Como  $df$  es el diferencial del complejo  $K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m})$  que tiene cohomología cero en todos los grados salvo en nivel  $m$  (pues  $ht(J_f) = m$ ), tenemos que  $dg \wedge w_1 + (f \cdot \eta'_1 + g \cdot \eta'_2) = df \wedge \eta_2$ , para algún  $\eta_2$ . Es decir  $\overline{dg \wedge w_1} = \overline{df \wedge \eta_2}$  en  $\overline{\Omega}^{m-1}$  y

$$\delta_1([\overline{w_1}, \overline{w_2}]) = [\overline{dg \wedge w_1}] = [\overline{df \wedge \eta_2}] = 0$$

en  $H^{m-1}(K(f_1, \dots, f_m))$ . Por lo tanto tenemos la secuencia exacta corta

$$0 \longrightarrow Tor_1\left(\frac{R}{I}, \frac{R}{J_f}\right) \longrightarrow H^{m-1}(L_m) \longrightarrow \frac{\overline{\Omega}^{m-1}}{df \wedge \overline{\Omega}^{m-2} + dg \wedge \overline{\Omega}^{m-2}} \longrightarrow 0 \quad (3)$$

A continuación calculamos el módulo  $(Tor_1(\frac{R}{I}, \frac{R}{J_f})) = 2$ . Si usamos la hipótesis que el ideal  $I = \langle f, g \rangle$  es intersección completa tenemos que el complejo de Koszul  $K(f, g)$ :

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{(f,g)} R \oplus R \xrightarrow{(-g,f)} R \longrightarrow 0$$

es una resolución de  $\frac{R}{I}$ . Si efectuamos el producto tensorial  $\otimes_R \frac{R}{J_f} = \otimes_R k$  en el complejo anterior obtenemos

$$0 \longrightarrow k \xrightarrow{0} k \oplus k \xrightarrow{0} k \longrightarrow 0$$

Esto significa que  $Tor_1\left(\frac{R}{I}, \frac{R}{J_f}\right) = k \oplus k$ . Antes de continuar un lema que nos permitirá demostrar que  $\frac{\overline{\Omega}^{m-1}}{df \wedge \overline{\Omega}^{m-2} + dg \wedge \overline{\Omega}^{m-2}}$  es un módulo no nulo.

**Lema 2.3.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f, y  $\langle f \rangle$  un ideal con una singularidad aislada. La aplicación

$$df : \frac{\Omega^{m-1}}{df \wedge \Omega^{m-2} + dg \wedge \Omega^{m-2}} \rightarrow \frac{J_f \Omega^m}{J_{f,g} \Omega^m} \simeq \frac{J_f}{J_{f,g}}$$

definida por  $\overline{w} \mapsto \overline{df \wedge w}$  es un isomorfismo.

**Prueba.** Sólo la inyectividad no es clara. Si  $\overline{df \wedge w} = 0$  entonces  $df \wedge w = df \wedge dg \wedge w_1$ , por lo tanto  $df \wedge (w - dg \wedge w_1) = 0$ . Como  $H^i(K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m})) = 0$  para todo  $i \neq m$  entonces existe  $w_2 \in \Omega^{m-2}$  tal que  $w = dg \wedge w_1 + df \wedge w_2$ , es decir  $\overline{w} = 0$ .  $\square$

Notemos que,  $\frac{\overline{\Omega}^{m-1}}{df \wedge \overline{\Omega}^{m-2} + dg \wedge \overline{\Omega}^{m-2}} \simeq \frac{J_f}{J_{f,g}} \otimes_R \frac{R}{I} \neq 0$  por que si no  $M = \frac{J_f}{J_{f,g}}$  cumpliría que  $\frac{M}{IM} = 0$  y por el Lema de Nakayama se tendría  $M = 0$ . Pero  $J_f = \eta$  y  $J_{f,g} \subset \eta^2$  nos dice que  $M \neq 0$ . Por (3),  $\dim(H^{m-1}(L_m)) > 2$  y no puede ser isomorfo a

$$Tor_1(R/I, R/\langle J_f, J_g \rangle) = Tor_1(R/I, R/J_f).$$

Esto finaliza el Ejemplo 2.2.

**Observación.** La Proposición 2.1 se obtuvo gracias al hecho que  $ht(J_f) = \dim(R) = m$ . En el caso que  $I = \langle f, g \rangle$  se tiene que  $ht(J_F) = m - 1$ . Cuando el ideal  $I$  es generado por una secuencia regular de  $r$  elementos obtenemos que  $ht(J_F) = m - r + 1$ . Esta es la principal obstrucción para seguir el método empleado para el caso de un solo polinomio. Sin embargo el cálculo de la altura del ideal jacobiano nos permite brindar información sobre los ideales de tipo intersección completa con una singularidad aislada (icis por sus siglas en inglés). Estas propiedades permitirán calcular la homología de Hochschild y serán descritas más adelante. A continuación describimos los resultados obtenidos sobre la cohomología de los complejos  $L_j$  y  $L'_j$ .

Para el caso en que el ideal esté generado por una secuencia regular de longitud dos,  $I = \langle f, g \rangle$ , obtenemos :

**Proposición 2.4.** *Los complejos  $L'_j$  cumplen que  $H^i(L'_j) = 0$  para todo  $i \neq j$  e  $i < m - 1$ .*

**Prueba.** Para todo primo  $P$ , que no contiene al ideal  $J_{f,g}$  el complejo  $L'_j$  localizado en  $P$  es exacto para todo  $j > m - 1$  y exacta excepto en nivel  $j$  cuando  $j < m - 1$  (ver [3, Teorema 2.47]). Sea  $P$  un primo de altura menor que  $m - 1$ . Como  $ht(J_{f,g}) = m - 1$  (ver Teorema 3.1) entonces  $P$  no contiene al ideal  $J_{f,g}$ . Por lo tanto  $L'_j$  localizado en  $P$  satisface el enunciado presentado al inicio de la prueba. Si aplicamos el Corolario 1.4.14 de [7] tenemos que  $H^i(L'_j) = 0$  para todo  $i < m - 1$  e  $i \neq j$  si  $j < m$ .  $\square$

El significado de esta afirmación se refleja en el siguiente teorema.

**Teorema 2.5.** *Sea  $j \in \mathbb{N}$  entonces*

$$H^i(L_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < \min\{j, m - 2\}. \\ \frac{df \wedge \Omega^j}{df \wedge dg \wedge \Omega^{j-1}} \otimes R/I & \text{si } i = j \text{ y } j \leq m. \\ \text{Tor}_{m-1-i}\left(\frac{J_f}{J_{f,g}}, R/I\right) & \text{si } j = m - 1. \\ \text{Tor}_1(H^{m-1}(C_{p+1}), R/I) & \text{si } j > m - 1 \text{ e } i = m - 2, \end{cases} \quad (4)$$

donde  $C_{p+1} = (L'_{m+p})^{\leq m-1}$  y  $f$  tiene una singularidad aislada. Para los términos en nivel  $m - 1$  y  $m$  presentamos una secuencia espectral

$$E_{2,0}^1 = \text{Tor}_2(M_p, \frac{R}{I}) \quad (5)$$

$$E_{1,0}^1 = \text{Tor}_1(M_p, \frac{R}{I}) \xleftarrow{d^1} E_{1,1}^1 = \text{Tor}_1\left(\frac{J_g}{J_{f,g}}, \frac{R}{I}\right)$$

$$E_{0,0}^1 = \text{Tor}_0(M_p, \frac{R}{I}) \xleftarrow{d^1} E_{0,1}^1 = \text{Tor}_0\left(\frac{J_g}{J_{f,g}}, \frac{R}{I}\right),$$

donde  $Gr(M_p) = \bigoplus_{i=0}^p R/J_f$  y  $d^1$  es el producto exterior con  $dg$ .

**Prueba.** Para todo primo  $P$  en  $(R/I, \bar{\eta})$  diferente del ideal maximal se prueba que  $H^i((L_j)_P) = 0$  para todo  $i \neq j$  (ver [3, Teorema 2.48]). De esta propiedad y de [7, Corolario 1.4.14] se desprende que  $H^i(L_j) = 0$  para todo  $i < m - 1$  e  $i \neq j$ . La segunda igualdad de (4) se sigue del hecho que  $f$  tiene una singularidad aislada (la prueba es similar a la presentada en el Lema 2.3). De la Proposición 2.4 obtenemos que  $H^i(L'_{m-1}) = 0$  para todo  $i < m - 1$ . Es decir  $L'_{m-1}$  es una resolución de  $H^{m-1}(L'_{m-1}) \simeq J_f/J_{f,g}$ . Como  $L_{m-1} = L'_{m-1} \otimes R/I$  entonces

$$H^i(L_{m-1}) = \text{Tor}_{m-1-i}(R/I, J_f/J_{f,g}).$$

La última afirmación de (4) se demuestra de manera similar. La secuencia espectral se obtiene al escribir  $L_{m+p}$  de la siguiente manera

$$\begin{array}{ccccccc}
 L_{m+p} : & & \vdots & & & & \\
 & & \downarrow df & & & & \\
 & & \bar{\Omega}_{1,p+1}^{m-1} & \xleftarrow{dg} \cdots \xleftarrow{dg} \cdots & & & \\
 & & \downarrow df & \downarrow df & \downarrow df & & \\
 & & \bar{\Omega}_{0,p}^m & \xleftarrow{dg} \bar{\Omega}_{1,p}^{m-1} & \xleftarrow{dg} \cdots \xleftarrow{dg} \cdots & & \\
 & & & \downarrow df & \downarrow df & \downarrow df & \\
 & & & \cdots & \xleftarrow{dg} \bar{\Omega}_{1,1}^{m-1} & \xleftarrow{dg} \bar{\Omega}_{2,1}^{m-2} & \xleftarrow{dg} \cdots \\
 & & & & \downarrow df & \downarrow df & \downarrow df \\
 & & & & \bar{\Omega}_{0,0}^m & \xleftarrow{dg} \bar{\Omega}_{1,0}^{m-1} & \xleftarrow{dg} \cdots,
 \end{array} \tag{6}$$

donde  $\bar{\Omega}_{*,*}^i = \Omega_{*,*}^i \otimes R/I$ . Como  $L_{m+p} = L'_{m+p} \otimes R/I$ , el complejo  $L'_{m+p}$  se escribe, como un bicomplejo, de manera similar. Si  $f$  tiene una singularidad aislada, el complejo  $M_p$ , definido como,

$$\begin{array}{c}
 M_p : \quad \vdots \\
 \downarrow df \\
 \Omega_{1,p+1}^{m-1} \leftarrow \cdots \leftarrow \Omega_{1,p}^{m-1} \leftarrow \cdots \\
 \downarrow df \quad \downarrow df \quad \downarrow df \\
 \Omega_{0,p}^m \leftarrow \Omega_{1,p}^{m-1} \leftarrow \cdots \\
 \downarrow df \quad \downarrow df \\
 \cdots \leftarrow \Omega_{1,1}^{m-1} \\
 \downarrow df \\
 \Omega_{0,0}^m
 \end{array} \tag{7}$$

es una resolución de  $H^m(M_p)$ . El complejo  $L'_{m+p}/M_p$  es quasiisomorfo a  $L'_{m-1}$ . Esto implica que  $L_{m+p}$  se escribe como un bicomplejo cuyas dos únicas columnas son los complejos  $E_* = M_* \otimes R/I$  y  $L_{m-1}$ . La filtración por columnas nos proporcionan la secuencia espectral (5).  $\square$

En el caso que  $J_g$  este contenido en el ideal  $J_f$ , se tiene el siguiente resultado.

**Corolario 2.6.** *Si  $J_g \subset J_f$  entonces la secuencia espectral del Teorema 2.5 cumple que  $E^1 = E^\infty$ .*

**Prueba.** Una propiedad que usaremos en repetidas ocasiones en la prueba del corolario es la que pasamos a demostrar:

Supongamos que ninguno de los generadores del ideal  $I$  es regular, es decir  $J_f \neq R$ . Si un generador es regular el resultado es trivial. Si  $J_g \subset J_f$  entonces  $ht(J_f) = m$ . En efecto, como  $f \in \sqrt{J_f}, g \in \sqrt{J_g}$  se tiene que  $ht(J_f) = ht(\sqrt{J_f}) \geq ht(\langle f, g, J_{f,g} \rangle) = m$ . Esto a su vez significa que  $H^i(K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m})) = 0$  para todo  $i \neq m$ . Es decir si  $w \in \Omega^*$  y  $df \wedge w = 0$  entonces existe  $w' \in \Omega^{*-1}$  tal que  $w = df \wedge w'$ .

Por otro lado para demostrar el corolario será suficiente probar que los morfismos de conexión, dados por  $\wedge dg$ , de la secuencia exacta larga en cohomología de la secuencia exacta corta.

$$0 \longrightarrow E_p \longrightarrow L_{m+p} \longrightarrow L_{m-1} \longrightarrow 0$$

son nulos. En efecto, si tomamos la secuencia exacta larga en cohomología a la secuencia anterior obtenemos la secuencia

$$H^{m-2}(E_p) \longrightarrow H^{m-2}(L_{m+p}) \longrightarrow H^{m-2}(L_{m-1}) \xrightarrow{\delta_1} \longrightarrow$$

$$H^{m-1}(E_p) \longrightarrow H^{m-1}(L_{m+p}) \longrightarrow H^{m-1}(L_{m-1}) \xrightarrow{\delta_0} \longrightarrow$$

$$H^m(E_p) \longrightarrow H^m(L_{m+p}) \longrightarrow 0.$$

La condición  $J_g \subset J_f$  implica que  $\delta_0 = 0$ , y  $\delta_1 = 0$ . Verificaremos sólo que  $\delta_1 = 0$ , pues el otro caso es similar.

En efecto, sea  $[(\bar{w}_1, \bar{w}_0)]$  una clase de módulo  $H^{m-2}(L_{m-1})$  con  $(w_1, w_0) \in \Omega^{m-2} \otimes \Omega^{m-2}$ . Entonces

$$df \wedge w_1 + dg \wedge w_0 = f \cdot \eta_1^1 + g \cdot \eta_1^2 \in \Omega^{m-1}.$$

Si multiplicamos por  $dg$  a la igualdad anterior obtenemos

$$dg \wedge df \wedge w_1 = f \cdot dg \wedge \eta_1^1 + g \cdot dg \wedge \eta_1^2. \quad (8)$$

Como  $dg \wedge \eta_1^1, dg \wedge \eta_1^2 \in \Omega_R^m \simeq R$  y  $J_g \subset J_f$  se tiene que existe  $\eta_2^1, \eta_2^2$  en  $\Omega^{m-1}$  tal que  $dg \wedge \eta_1^1 = -df \wedge \eta_2^1$  y  $dg \wedge \eta_1^2 = -df \wedge \eta_2^2$ . Por lo tanto la ecuación (8) se escribe de la siguiente forma

$$dg \wedge df \wedge w_1 = -f \cdot dg \wedge \eta_2^1 - g \cdot df \wedge \eta_2^2.$$

Si factorizamos  $df$  tenemos

$$df \wedge (dg \wedge w_1 - f\eta_2^1 - g\eta_2^2) = 0.$$

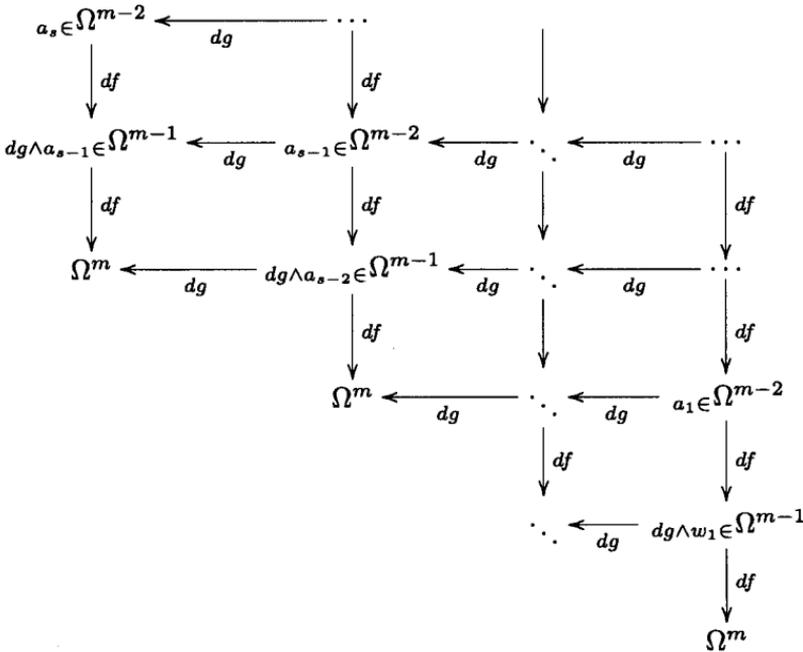
Como  $H^i(K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m})) = 0$  para todo  $i \neq m$ , existe  $a_1 \in \Omega^{m-1}$  tal que

$$dg \wedge w_1 = f \cdot \eta_2^1 + g \cdot \eta_2^2 + df \wedge a_1.$$

Si  $k = 0$  la prueba terminó pues  $[dg \wedge w_1] = 0 \in H^{m-1}(E_0)$ . De lo contrario definamos  $a_0 := w_1$  y continuamos la demostración por un proceso inductivo. Admitamos como hipótesis inductiva que

$$-dg \wedge a_{s-2} = \eta_s + df \wedge a_{s-1} \tag{9}$$

con  $\eta_s \in I\Omega^{m-1}$ . Es decir  $\eta_s = \eta_s^1 \cdot f + \eta_s^2 \cdot g$ . Por el método de la escalera en el diagrama



tenemos que existe  $a_s$  tal que  $\eta_{s+1} = dg \wedge a_{s-1} + df \wedge a_s \in I\Omega^{m-1}$ . En efecto de la hipótesis inductiva se tiene

$$-dg \wedge a_{s-2} = \eta_s + df \wedge a_{s-1} \tag{10}$$

con  $\eta_s \in I\Omega^{m-1}$ . Es decir  $\eta_s = \eta_s^1 \cdot f + \eta_s^2 \cdot g$ . Si multiplicamos por  $dg$  en (10) tenemos

$$dg \wedge (\eta_s + df \wedge a_{s-1}) = 0. \tag{11}$$

Como  $\eta_s \in I\Omega^{m-1}$  entonces  $\eta_s = f \cdot \eta_s^1 + g \cdot \eta_s^2$ . De la relación  $J_g \subset J_f$  se tiene que  $dg \wedge \eta_s = df \wedge \eta_{s+1}$ , para algún  $\eta_{s+1} \in I\Omega^{m-1}$ . Por lo tanto la ecuación (11) se escribe como

$$df \wedge (\eta_{s+1} - dg \wedge a_{s-1}) = 0.$$

Como  $H^i(K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m})) = 0$  para todo  $i \neq m$ , existe  $a_s$  tal que

$$\eta_{s+1} = dg \wedge a_{s-1} + df \wedge a_s \in I\Omega^{m-1}.$$

Esto finaliza la inducción y demuestra que

$$dg \wedge a_{l-2} + df \wedge a_{l-1} = \eta_l \in I\Omega_R^{m-1}$$

para todo  $l = 1, \dots, p$ . Esto significa que

$$\begin{aligned} & [(0, \dots, \overline{dg \wedge w_1})] = \\ & [\overline{(df \wedge a_{p+1} + dg \wedge a_p, \dots, df \wedge a_2 + dg \wedge a_1, df \wedge a_1)}] = 0 \end{aligned}$$

□

Aunque la condición  $J_g \subset J_f$  simplifica significativamente los cálculos, esta se da en muchos ejemplos conocidos. Ello nos permite calcular los módulos de cohomología de los complejos  $L_{m+p}$  para el caso en que  $R/I$  es de dimensión cero y la singularidad es simple (clasificación de Guisti [13]) [19, 7.19], a excepción de  $H_\mu$  para  $\mu \geq 7$ , y **las singularidades simples de curvas inmersas en dimensión tres** (ver [3, Ejemplo 2.67]). El cálculo de estos grupos de cohomología fue una de las motivaciones originales de este trabajo.

En general, cuando el ideal  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  es una intersección completa y tiene una singularidad aislada en  $\eta$  llegamos al siguiente resultado.

**Teorema 2.7.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f.,  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  una icis. Si  $f_r$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$  entonces existe una secuencia espectral  $E_{p,q}^*$  tal que  $E^\infty = E^r$ , y converge a la cohomología del complejo  $L_{m+p}$ .

**Prueba.** Ver [3, Teorema 2.76]. □

Respecto a los módulos de cohomología nulos de los complejos  $L_j$  demostramos el siguiente hecho.

**Proposición 2.8.** Sean  $(R, \eta)$  un a.r.l.e.t.f e  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  una icis entonces

$$H^i((L_j)) = 0$$

para todo  $i < m - r$  e  $i > m$  si  $j > m - r$ ; y si  $j \leq m - r$  e  $i \neq j$ .

**Prueba.** Sea  $P$  un ideal primo en el anillo  $R/I$  diferente del maximal. Entonces  $P \not\subseteq J_F$ , por lo tanto el complejo  $(L_j)_P$  es exacto para todo  $j > m - r$  y tiene cohomología cero para todo grado  $i \neq j$  si  $j < m - r + 1$ . Del Corolario 1.4.14 de [7] se sigue la prueba de la Proposición. □

Este último resultado significa que los complejos  $L_{m+k}$  tienen a lo más  $r + 1$  términos de cohomología no nulos. Del cálculo de  $ht(J_F) = m - r + 1$  donde  $F = (f_1, \dots, f_r)$ , se desprenden los siguientes resultados.

**Proposición 2.9.** Sea  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  una icis y  $s > m - r + 1$  un entero entonces

$$H^*(L_{m-r+1}) = \text{Tor}_{m-r-1-*}(H^{m-r+1}(L'_{m-r+1}), R/I)$$

y

$$H^{m-r}(L_s) = \text{Tor}_1((L'_s)^{\leq m-r+1}, R/I).$$

**Prueba.** Notemos que la longitud del complejo  $L'_{m-r+1}$  es  $m - r + 1$ , y  $ht(J_F) = m - r + 1$ . Sea  $P$  un primo de altura menor que  $m - r + 1$  entonces  $P$  no contiene a  $J_F$ , el ideal jacobiano de  $F$ . De [3, Corolario 2.70] se sigue que

$$H^i((L'_{m-r+1})_P) = 0$$

para todo  $i \neq m - r + 1$ . De [7, Corolario 1.4.14] tenemos que el complejo  $L'_{m-r+1}$  es una resolución de  $H^{m-r+1}(L'_{m-r+1})$ . De aquí se desprende directamente que

$$H^*(L_{m-r+1}) = \text{Tor}_{m-r+1-*}(H^{m-r+1}(L'_{m-r+1}), R/I).$$

Finalmente

$$H^{m-r}(L_s) = \text{Tor}_1((L'_s)^{\leq m-r+1}, R/I)$$

es una generalización de la última igualdad de (4) en el Teorema 2.5 y la prueba es similar a la presentada anteriormente.  $\square$

### 3. Singularidades Aisladas

Para poder establecer las propiedades mencionadas anteriormente, en el camino probamos los siguientes resultados algebraicos, que no se encuentran en la literatura. Una de las piedras angulares en el trabajo es el siguiente resultado.

**Teorema 3.1.** *Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f.,  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  un ideal con una icis en  $\eta$ . Entonces  $ht(J_F) = m - r + 1$ .*

**Prueba.** Sea  $P \supseteq J_F$  un ideal primo.

Si  $f_i \in P$ , para algún  $i = 1, \dots, r$ , sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $f_1 \in P$ . Sea  $Q(x_1, \dots, x_r) = x_1$  polinomio no nulo entonces  $Q(f_1, \dots, f_r) = f_1 \in P$ . Como  $ht(P, I) = m = \dim(R)$ , de [3, Lema 2.15] se tiene que

$$ht(P) \geq m - r + 1.$$

Si  $f_i \notin P$  para todo  $i = 1, \dots, r$  debemos probar que  $ht(P) \geq m - r + 1$ . De [3, Corolario 1.41] tenemos que en  $K = Q(D)$ , el cuerpo de fracciones de  $D = R/P$ , los elementos  $f_1, \dots, f_r$  no forman un conjunto algebraicamente independiente sobre  $k$  -el cuerpo base- ( $f_i$  denota también a la clase  $f_i$  en  $R/P$ ). Es decir, existe un polinomio  $S(x_1, \dots, x_r) \in$

$k[x_1, \dots, x_r]$  no nulo tal que  $S(f_1, \dots, f_r) = 0$  en el cuerpo  $K$ . Como  $D$  es un dominio y  $D \hookrightarrow K$  entonces  $S(f_1, \dots, f_r) = 0$  en el anillo  $(D, \eta)$ . Esta última condición significa que  $S(f_1, \dots, f_r) \in P$ . Finalmente, como  $ht(\langle I, J_F \rangle) = m$  y  $P \supset J_F$  se tiene que  $ht(\langle P, I \rangle) = m$ . De aquí se sigue que  $ht(P) \geq m - r + 1$ . Esto significa que  $ht(J_F) \geq m - r + 1$ . La desigualdad contraria  $ht(J_F) \leq m - r + 1$  se sigue de [10, Teorema A. 2.54].  $\square$

**Notemos que en el caso  $r = 1$ , obtenemos  $ht(J_f) = m$ .**

En general en una icis  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  pueden existir elementos  $f_i$  tales que la hipersuperficie  $\{f_i = 0\}$  sea regular, esto significa que el anillo  $R/\langle f_i \rangle$  es regular. Por ejemplo los polinomios  $f = x^2 + xy + z$ ,  $g = x^2 + y^2 + z$ , y  $h = z$  en el anillo  $R = k[x, y, z]_{(x, y, z)}$  nos proporcionan una icis  $\langle f, g, h \rangle$ . Es evidente que  $R/\langle h \rangle \simeq k[x, y]_{(x, y)}$  es un anillo r.l.e.t.f. Para evitar estos casos triviales ponemos como condición que ninguna de las hipersuperficies  $\{f_i = 0\}$  sea regular. Ésto equivale a pedir que el ideal  $J_{f_i}$  esté contenido en el maximal  $\eta$ ; notemos que esta condición significa, en el caso particular que  $R = k[x_1, \dots, x_m]_{(x_1, \dots, x_m)}$ , que el jacobiano evaluado en  $0 = (0, \dots, 0)$  tiene rango cero. En estos casos puede suceder que el lugar singular de  $f_i$  sea más grande que un punto, es decir  $ht(J_{f_i}) < m = \dim(R)$ . Notemos que  $ht(J_{f_i}) = m$  si sólo si la singularidad de  $f_i$  es aislada. Si embargo nosotros tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 3.2.** *Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f.  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  una icis. Entonces existen generadores  $g_1, \dots, g_r$  tal que  $I = \langle g_1, \dots, g_r \rangle$  y cada  $g_i$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$ .*

**Prueba.** El proceso se desarrollará de manera inductiva sobre  $r \geq 2$  el número de polinomios. Para dos polinomios se sigue de [3, Colorario 2.23].

Supongamos que el teorema se cumple para toda  $I_r = \langle f_i; i = 1, \dots, r \rangle$  icis. Sea  $I_{r+1} = \langle f_i; i = 1, \dots, r+1 \rangle$  una icis. De la Proposi-

ción 3.4 podemos fijar  $f_{r+1}$  y hallar elementos  $g_i$  con  $i = 1, \dots, r$ , generadores de  $I_{r+1} = \langle f_i; i = 1, \dots, r+1 \rangle$  de tal forma que  $I_{r+1} = \langle g, f_{r+1}, i = 1, \dots, r \rangle$  y el ideal  $I_r = \langle g_i : i = 1, \dots, r \rangle$  sea una icis. De la hipótesis inductiva podemos asumir que cada  $g_i; i = 1, \dots, r$  tiene una singularidad aislada. Nuevamente para no cargar la notación denotemos los  $g_i$  por  $f_i$ . Este análisis previo nos permite afirmar que para  $I_{r+1} = \langle f_i; i = 1, \dots, r+1 \rangle$ , al menos un generador tiene una singularidad aislada en  $\eta$ ; que sin pérdida de generalidad podemos suponer que es  $f_{r+1}$ . Si fijamos este último y usamos la Proposición 3.4 podemos hallar nuevos generadores  $g_1, \dots, g_r$  tales que  $I'_r = \langle g_i; i = 1, \dots, r \rangle$ , sea una icis e  $I_{r+1} = \langle I'_r, f_{r+1} \rangle$ . De la hipótesis inductiva los generadores de  $I'_r = \langle g_i; i = 1, \dots, r \rangle$ , se pueden cambiar, **sin cambiar el ideal**, por generadores  $g'_i$  para  $i = 1, \dots, r$  tales que cada uno tenga una singularidad aislada en  $\eta$ ; a estos los denotaremos nuevamente por  $\{f_i; i = 1, \dots, r\}$ . Con ellos tenemos que  $I_{r+1}$  tiene generadores  $\{f_i; i = 1, \dots, r+1\}$ , para los cuales cada  $\langle f_i \rangle$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$ . Más aún, como los nuevos  $f_i$  hallados cumplen que  $I_{r+1} = \langle f_i; i = 1, \dots, r+1 \rangle$  entonces  $r+1 = ht(\langle f_i; i = 1, \dots, r+1 \rangle) = profundidad(\langle f_i; i = 1, \dots, r+1 \rangle)$  lo que nos permite afirmar que los nuevos elementos  $\{f_i; i = 1, \dots, r+1\}$  forman una secuencia regular.  $\square$

Este teorema nos permite reducir el lugar singular de cada uno de los generadores de  $I$  a un punto. En el siguiente ejemplo se muestra un ideal  $I$  generado por una secuencia regular de dos elementos en  $k[x, y]_{(x,y)}$ , que tiene una singularidad aislada en  $\eta$ , y no podemos hallar un representante que sea regular. Esto significa que, bajo las hipótesis planteadas anteriormente, no podemos reducir más el lugar singular de los generadores de una icis.

**Ejemplo 3.3.** Sea  $(R, \eta) = (k[x, y]_{(x,y)}, \eta)$ , el anillo regular local y  $f = x^2 + y^2$ ,  $g = xy + y^2$  entonces  $J_F = \langle x(2y + x) - y^2 \rangle$ . Se prueba que  $I = \langle f, g \rangle$  es una icis. Se cumple que  $I \subset \eta^2$ . Si  $I = \langle f', g' \rangle$  donde al menos  $f'$  es regular entonces se prueba que  $J_{f'} = R$ . Esto significa

que  $f' = P + ax + by$ , donde  $P \in \eta^2$  y  $a$  o  $b$  es diferente de cero. Esto significa que  $f' \notin \eta^2$  y por lo tanto  $I \not\subseteq \eta^2$ , una contradicción.

El Teorema 3.2 también se puede interpretar como un teorema de **clasificación local de las singularidades aisladas de tipo intersección completa**; y nos garantiza que todas ellas se pueden formar a partir de polinomios con singularidades aisladas.

El teorema anterior es consecuencia inmediata de la siguiente proposición:

**Proposición 3.4.** *Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f e  $I = \langle f_i, i = 1, \dots, r \rangle$  una icis entonces podemos modificar los generadores  $f_1, \dots, f_r$  de  $I$  para tener que los primeros  $r - 1$  sean una icis.*

**Prueba.** Sea  $J_F = (\cap_{i=1}^t q_i) \cap (\cap_{j=1}^{t'} q'_j)$ , la descomposición primaria del ideal jacobiano con  $\sqrt{q_i} = p_i$ ,  $\sqrt{q'_j} = p'_j$ , donde los  $p_i$  no contienen a ningún  $f_k$  para todo  $k = 1, \dots, r$ , y los  $p'_j$  contienen al menos un  $f_k$ . Sea  $p_i$  un ideal primo en la descomposición primaria de  $J_F$ . Entonces existe  $P_i$  polinomio no nulo en  $k[x_1, \dots, x_r]$ , tal que  $P_i(f_1, \dots, f_r) = 0$  en  $\frac{R}{p_i}$  (ver [3, Corolario 1.41]). Sea  $P = \prod_{i=1}^t P_i$  entonces

$$P(f_1, \dots, f_r) = 0 \quad (12)$$

en  $\frac{R}{p_i}$  para todo  $i = 1, \dots, t$ . Por otro lado, para  $P(x_1, \dots, x_r)$  existen  $\lambda_i \in k$  para  $i = 1, \dots, r - 1$  todos diferentes de cero, tal que  $P(\lambda_1 x_r, \dots, \lambda_{r-1} x_r, x_r) \neq 0$ . A partir de las constantes  $\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}$  definamos  $g_i = f_i - \lambda_i f_r$ , y  $J_G$  como el ideal jacobiano de los  $g_i$  para  $i = 1, \dots, r - 1$ .

Los ideales  $J_G$  y  $J_F$  guardan la siguiente relación de inclusión:  $J_G \supseteq J_F$ . En efecto es claro que  $J_{g_1, \dots, g_{r-1}, f_r} = J_F$ . Por lo tanto la definición del determinante y del ideal jacobiano prueban la afirmación.

Sea  $p$  un ideal primo tal que

$$p \supseteq \langle J_G, g_i, i = 1, \dots, r - 1 \rangle$$

y  $ht(p) = ht(\langle J_G, g_i, i = 1, \dots, r - 1 \rangle)$ . De la relación  $J_G \supseteq J_F$  tenemos que

$$p \supseteq J_G \supseteq J_F = (\cap_{i=1}^t q_i) \cap (\cap_{j=1}^{t'} q'_j), \tag{13}$$

entonces  $p \supseteq q'_i$  o  $p \supseteq q_j$ .

Primer caso: Si  $p \supseteq q'_i$ , entonces al menos un  $f_k \in p$  pues  $p \supseteq \sqrt{q'_i} = p'_i$ . Si  $f_r \in p$ , como para todo  $i = 1, \dots, r - 1$  se cumple que  $f_i = g_i + \lambda_i \cdot f_r$  entonces  $f_i \in p$  para todo  $i$ . Si  $k \neq r$  como  $f_r = (f_k - g_k)/\lambda_k$  tenemos que  $f_r \in p$  y por lo tanto  $f_j \in p$  para todo  $j = 1, \dots, r$ . Recapitulando, por hipótesis

$$p \supset \langle J_G, g_i, i = 1, \dots, r - 1 \rangle,$$

sabemos que  $J_G \supset J_F$  y hemos probado  $p \supset \langle f_1, \dots, f_r \rangle$ . Entonces  $p \supset \langle J_F, f_1, \dots, f_r \rangle$ . De la hipótesis  $ht(\langle J_F, f_1, \dots, f_r \rangle) = m$  se sigue que  $ht(p) = m$ .

Segundo caso: Si  $p \supseteq q_i$  tomemos  $P(x_1, \dots, x_r)$ , el polinomio que definimos anteriormente. Notemos que en el anillo  $R/p$  tenemos  $f_i = \lambda_i f_r$  y  $P(f_1, \dots, f_r) = 0$  (ver Ecuación (12)). Entonces  $P(\lambda_1 f_r, \dots, \lambda_{r-1} f_r, f_r) = 0$  en el anillo  $\frac{R}{p}$  ( $f_i$  denota la clase de  $f_i$  en  $R/p$ ). Es decir, si definimos  $Q(f_r) := P(\lambda_1 f_r, \dots, \lambda_{r-1} f_r, f_r)$  tenemos que  $Q(f_r) \in p$ , y el polinomio  $Q(x_r) = P(\lambda_1 x_r, \dots, \lambda_{r-1} x_r, x_r)$  es **no nulo**. Por lo tanto tenemos que  $f_r \in \sqrt{p} = p$ . Como  $f_i = \lambda_i f_r = 0$  en el anillo  $R/p$  y las constantes  $\lambda_i$  son diferentes de cero para todo  $i = 1, \dots, r - 1$  entonces  $p \supseteq \langle f_1, \dots, f_r \rangle$ . Como por hipótesis  $p \supset J_F$  entonces

$$p \supseteq \langle J_F, f_1, \dots, f_r \rangle.$$

Por lo tanto  $ht(p) = m$ .

Si  $t = 0$  no necesitamos definir el polinomio  $P$ . Simplemente tomamos elementos no nulos  $\lambda_i$  para  $i = 1, \dots, r - 1$  en el cuerpo  $k$ . Con ellos formamos los elementos  $g_1 = f_i - \lambda_i \cdot f_r$  y estamos en el primer caso.

En ambos casos obtenemos  $ht(\langle J_G, g_1, \dots, g_{r-1} \rangle) = m$ . Para demostrar que  $\langle g_1, \dots, g_{r-1} \rangle$  tiene una icis, solo resta probar que los elementos  $g_i$  para  $i = 1, \dots, r-1$  forman una secuencia regular. Para demostrar esta afirmación será suficiente probar que

$$\text{profundidad}(\langle g_1, \dots, g_{r-1} \rangle) = ht(\langle g_1, \dots, g_{r-1} \rangle) = r - 1.$$

En efecto, como

$$\langle g_1, \dots, g_{r-1}, f_r \rangle = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$$

y  $ht(\langle f_1, \dots, f_r \rangle) = r$ , entonces  $ht(\langle g_1, \dots, g_{r-1}, f_r \rangle) = r$ . Por lo tanto de la desigualdad

$$ht(\langle g_i : i = 1, \dots, r-1; f_r \rangle) \leq ht(\langle g_i : i = 1, \dots, r-1 \rangle) + 1$$

tenemos que  $ht(\langle g_i : i = 1, \dots, r-1 \rangle) \geq r - 1$ . Por otro lado, el P.I.T. nos indica que  $ht(\langle g_i : i = 1, \dots, r-1 \rangle) \leq r - 1$ .  $\square$

En el caso  $k = \mathbb{C}$ , del Teorema 3.1 y del enunciado anterior se encuentran en [19] y [1, Teorema 5.4, página 157]. La demostración emplea propiedades de la topología del espacio  $\mathbb{C}^m$  donde está contenida la variedad  $Y$ . Esta versión topológica se sigue inmediatamente de nuestros resultados.

## 4. Homología Cíclica

Los complejos  $L_j$  tienen cohomología cero para todo término menor que  $m - r$ . Debido a este hecho y al Lema 6 de [5] podemos calcular los módulos de cohomología de los complejos  $D_j$  para grados menores que  $m - r - 1$ . Los demás términos se encuentran en una secuencia exacta corta, y pueden ser calculados de manera recurrente. En el caso que  $S = 0$  expresamos los módulos de cohomología de los complejos  $D_j$  en función de los módulos de cohomología de los complejos  $L_j$ . El

complejo que proporciona la homología cíclica negativa  $\Omega^{\geq m}$  se descompone en casi un producto tensorial de complejos. En el caso  $r = 2$  esto permite tomar un subcomplejo  $\Omega_f^{\geq m}$ . El complejo cociente  $\Omega^{\geq m}/\Omega_f^{\geq m}$  es isomorfo a  $\Omega_f^{\geq m}$ . Mostramos una secuencia espectral que se genera a partir de este subcomplejo. Este estudio permite presentar una secuencia espectral que converge a la cohomología de  $\Omega^{\geq m}$ .

Con respecto a la homología cíclica se llega al siguiente teorema.

**Teorema 4.1.** *Sea  $A_1 = R/\langle I \rangle$ , y  $A_t = R/I^t$ . Para  $j \in \mathbb{N}$  se tiene que*

$$H^i(D_j) = \begin{cases} H_{DR}^i(A_1) & \text{si } i < \min\{m - r - 2, j\}. \\ H_{DR}^{m-r}(A_{j-m+r+1}) & \text{si } i = m - r - 1, j > m - r - 1. \\ \frac{\Omega_A^j}{d\Omega_A^{j-1}} & \text{si } i = j \end{cases} \quad (14)$$

Si  $j \geq m - r$  para  $m - r + 1 \leq t \leq m - 1$  existe una secuencia exacta

$$0 \longrightarrow H_{DR}^{t-1}(A_{j-t+1}) \longrightarrow H^{t-1}(D_{j-1}) \longrightarrow H^t(L_j) \longrightarrow H^t(D_j) \xrightarrow{\pi^*} H_{DR}^t(A_{j-t}) \longrightarrow 0$$

**Prueba.** Ver [3, Teorema 3.1]. □

En el caso quasihomogéneo trabajamos sobre el anillo  $k[x_1, \dots, x_m]$ . El ideal  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  es generado por polinomios quasihomogéneos. Por lo tanto el álgebra  $R/I$  es graduada. Los resultados obtenidos se resumen en el siguiente Teorema.

**Teorema 4.2.** Sea  $j \in \mathbb{N}$  entonces

$$H^i(D_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq \min\{j-1, m-r-1\} \\ \frac{\Omega_A^j}{d\Omega_A^{j-1}} & \text{si } i = j \text{ y } j < m-r \\ H^{m-r}(D_{m-r}) = \frac{\Omega_A^{m-r}}{d\Omega_A^{m-r-1}} & \text{si } j = m-r \\ H^{m-r}(D_j) = H^{m-r}(L_j) & \text{si } j > m-r. \end{cases} \quad (15)$$

Si  $m-r < t < m$  entonces existe una secuencia exacta

$$0 \longrightarrow H^{t-1}(D_{j-1}) \longrightarrow H^t(L_j) \longrightarrow H^t(D_j) \longrightarrow 0.$$

con  $t \leq j$ . Si  $j \geq m$  entonces  $H^m(D_j) = 0$ , y  $H^{m-1}(D_j) = H^m(L_j)$  para todo  $j \geq m-1$ .

**Prueba.** Ver [3, Teorema 3.9]. □

La homología cíclica negativa se calcula a partir de los complejos  $\Omega^{\geq p}$  para  $p > 0$  (ver [3, Definición 1.78]). A continuación tratamos el caso en que  $I = \langle f, g \rangle$ . En un primer estudio llegamos al siguiente resultado.

**Proposición 4.3.** Para todo  $p_0 > 0$  se tiene que

$$H^s(\Omega^{\geq p_0}) \simeq \varprojlim H^s(\hat{D}_j),$$

donde  $\hat{D}_j := \text{Ker}(D_j \rightarrow D_{p_0})$ , para todo  $j \geq p_0$ .

**Prueba.** La proyección  $\hat{D}_j \rightarrow \hat{D}_{j-1}$  es sobre para  $j \geq p_0$  entonces se satisface la condición de Mittag-Leffler. Debido a que  $\dim_k(H(\hat{D}_j)) < \infty$ , el sistema inverso  $(H(\hat{D}_j), \mu)$  donde  $\mu : H(\hat{D}_j) \rightarrow H(\hat{D}_{j-1})$  cumple la

condición de Mittag-Leffler. Por lo tanto se tiene que  $\lim^1 H_*(\hat{D}_j) = 0$ . De la secuencia exacta de Milnor

$$0 \longrightarrow \lim^1 H_{s+1}(\hat{D}_j) \longrightarrow H_s(\varprojlim \hat{D}_j) \longrightarrow \varprojlim H_s(\hat{D}_j) \longrightarrow 0,$$

se desprende que

$$H(\varprojlim \hat{D}_j) \simeq \varprojlim H_*(\hat{D}_j)$$

□

**Corolario 4.4.** *Los complejos  $\Omega^{\geq p_0}$  con  $p_0 \geq m$  sólo tienen tres términos de cohomología no nulos.*

**Prueba.** Los complejos  $L_j$  para  $j \geq m$  sólo tienen los últimos tres términos de cohomología no nulos (ver Proposición 2.8). Entonces  $\hat{D}_j$  tienen a lo más los tres últimos términos de cohomología no nulos. Por lo tanto

$$H^s(\Omega^{\geq p_0}) \simeq \varprojlim H^s(\hat{D}_j) = 0$$

para todo  $s < m - 2$ . Es decir el complejo  $\Omega^{\geq p_0}$  con  $p \geq m$  sólo tienen posiblemente los últimos tres términos de cohomología no nulos. □

Para poder emplear los resultados que se plantean en [16] descomponemos el complejo  $\Omega^{\geq m}$  en dos complejos; el complejo  $\Omega_{\bar{f}}^{\geq m}$  y  $\Omega_{\bar{f}}^{\geq m}y$  (ver [3, Definición 3.27]). Ambos complejos son isomorfos y dependen de  $f$ ,  $df$  y  $dg$ . En particular se tiene la secuencia exacta corta

$$0 \longrightarrow \Omega_{\bar{f}}^{\geq m} \longrightarrow \Omega^{\geq m} \longrightarrow \Omega_{\bar{f}}^{\geq m}[-1] \longrightarrow 0.$$

**Definición 4.5.** Definamos el bicomplejo  $M(f, g)$  como

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \cdots & \longleftarrow & (E_{m+2}(0))_{m-1} & \longleftarrow & (E_{m+1}(0))_{m-2} & \longleftarrow & (E_m(0))_{m-3} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \longleftarrow & (E_{m+2}(0))_m & \xleftarrow{\beta} & (E_{m+1}(0))_{m-1} & \longleftarrow & (E_m(0))_{m-2} \\
 & & & & \downarrow \delta & & \downarrow \\
 & & & & (E_{m+1}(0))_m & \xleftarrow{\beta} & (E_m(0))_{m-1} \\
 & & & & & & \downarrow \delta \\
 & & & & & & (E_m(0))_m,
 \end{array}$$

y  $H_*(M(f, g)) = H_*(Tot(M(f, g)))$ , donde  $(E_{m+p}(0))_s = (E'_{m+p}(0) \otimes K(f))_s$ , y  $E'_{m+p}(0)$  se define en [3, Definición 3.29].

**Lema 4.6.** *Si  $f$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$  entonces existe una secuencia exacta*

$$\begin{aligned}
 0 &\longrightarrow H^{m-1}(M(f, g)) \longrightarrow H^m(\Gamma(f, g)) \longrightarrow \\
 &H^m(\Gamma(f, g)) \longrightarrow H^m(M(f, g)) \longrightarrow 0, \\
 Gr(H^m(\Gamma(f, g))) &= \bigoplus_{p \geq 0} H^m(E_{m+p}(0)), \text{ y} \\
 Gr(H^m(E_{m+p}(0))) &= \bigoplus_{i=0}^p (R/J_f)_i.
 \end{aligned}$$

**Prueba.** Ver [3, Lema 3.34]. □

La cohomología del complejo cociente  $\frac{\Omega_f^{\geq m}}{M(f, g)}$  es exacto excepto en último nivel, en grado  $m-1$  el graduado es suma de los módulos  $J_g/J_{f, g} \otimes R/\langle f \rangle$ , donde  $g$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$

**Proposición 4.7.** *El complejo*

$$\frac{\Omega^{\geq m}}{M(f, g)}$$

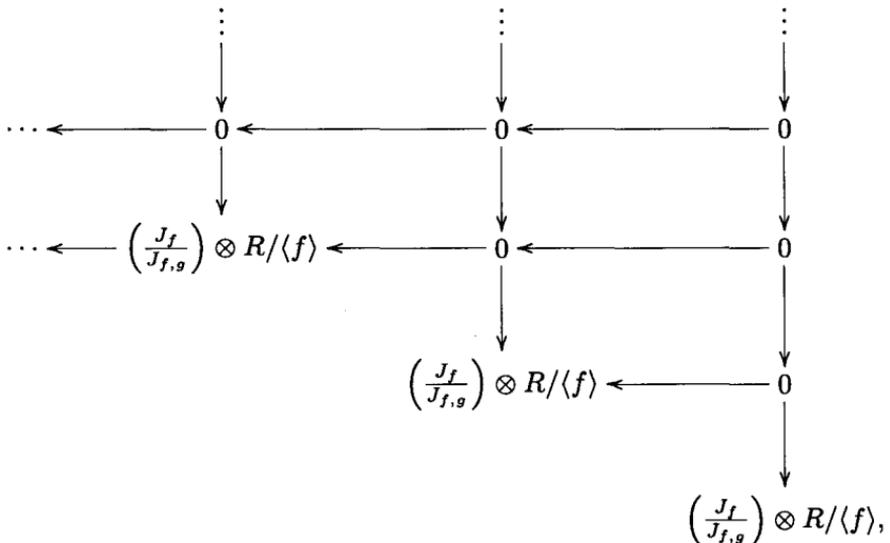
es exacto excepto en el último nivel, y

$$Gr(H_0(\frac{\Omega_f^{\geq m}}{M(f, g)})) = Gr(H^{m-1}(\frac{\Omega_f^{\geq m}}{M(f, g)})) = \bigoplus_{i>0} [(\frac{J_g}{J_{f,g}}) \otimes R/\langle f \rangle]_i$$

**Prueba.** Las columnas del complejo  $\Omega_f^m$  están formadas por los complejos  $L'_{m+p} \otimes K(f)$ , para  $p \geq 0$ . De la definición del complejo  $M(f, g)$  se desprende que las columnas del complejo

$$\frac{\Omega^{\geq m}}{M(f, g)}$$

son isomorfas a  $L'_{m-1} \otimes K(f)$ . Estas son exactas excepto en el último nivel (ver [3, Lema 3.15]). Por lo tanto el primer término de la secuencia espectral del  $\frac{\Omega^{\geq m}}{M(f, g)}$  quedaría de la siguiente manera



Es decir  $E^1 = E^\infty$ . Esto significa que

$$Gr \left( H_0 \left( \frac{\Omega^{\geq m}}{M(f, g)} \right) \right) = Gr \left( H^{m-1} \left( \frac{\Omega^{\geq m}}{M(f, g)} \right) \right) \bigoplus_{i>0} \left[ \left( \frac{J_g}{J_{f, g}} \right) \otimes R/\langle f \rangle \right]$$

□

Otra forma de abordar el estudio de la cohomología del complejo  $M(f, g)$  es la siguiente: Tomamos un subcomplejo  $F$  de  $M(f, g)$  definido de la siguiente manera. Definamos el complejo  $E_{m+p}(p) := E'_{m+p}(p) \otimes K(f)$ ; donde  $E'_{m+p}(l)$ , para un  $l = 0, \dots, p$ , se define en [3, Definición 3.36]. Siguiendo la notación de [3] presentamos la siguiente definición.

**Definición 4.8.** Sea  $p \gg$  un número natural. Definamos el complejos  $F$  como

$$\begin{aligned} \dots &\xleftarrow{\beta} E_{m+p+*+1}(p) \xleftarrow{\beta} E_{m+p+*}(p) \xleftarrow{\beta} \dots \\ \dots &\xleftarrow{\quad} E_{m+p+1}(p) \xleftarrow{\beta} E_{m+p}(p) \end{aligned}$$

(ver Definición 3.42 de [3]).

En el complejo cociente  $\frac{M(f, g)}{F}$  presentamos una filtración

$$I_p \subset \dots \subset I_1 = \frac{M(f, g)}{F},$$

(ver [3, Definición 3.46]) y calculamos el  $E^1$  de esta filtración.

**Proposición 4.9.** *Existe dos secuencias exactas cortas*

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \bigoplus H^j(L_{m+p-i}(f); \delta) \longrightarrow H^j \left( \frac{I_{p-i+1}}{I_{p-i}} \right) \\ &\longrightarrow H^j(\Omega^{m \leq \cdot \leq m+p-i-1}(f)) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

para  $j = m, m - 1$ . La Cohomología en los demás casos es cero.

**Prueba.** La secuencia exacta larga de cohomología de la secuencia exacta corta.

$$0 \longrightarrow \bigoplus(L_{m+p-i}(f), \delta) \longrightarrow \frac{I_{p-i}}{I_{p-i+1}} \longrightarrow \Omega^{m \leq \cdot \leq m+p-i-1}(f) \longrightarrow 0$$

nos proporciona la secuencia

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \bigoplus H^{m-1}(L_{m+p-i}(f); \delta) &\longrightarrow H^{m-1}\left(\frac{I_{p-i+1}}{I_{p-i}}\right) \longrightarrow \\ \longrightarrow H^{m-1}(\Omega^{m \leq \cdot \leq m+p-i-1}(f)) &\xrightarrow{0} \bigoplus H^m(L_{m+p-i}(f); \delta) \longrightarrow \\ \longrightarrow H^m\left(\frac{I_{p-i+1}}{I_{p-i}}\right) &\longrightarrow H^m(\Omega^{m \leq \cdot \leq m+p-i-1}(f)) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

donde el morfismo conexión es nulo (Ver [3, Lema 3.47]). Esta última afirmación prueba la proposición.  $\square$

Para el complejo  $F$  existe una filtración

$$F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F,$$

(ver [3, Definición 3.43]). Esta filtración proporciona una secuencia espectral que colapsa en  $E^1$  (ver [3, Lema 3.44]), sin embargo en general no se sabe si converge.

Los cálculos del presente trabajo pueden servir para determinar la K-teoría algebraica de las intersecciones completas con singularidades aisladas.

## Referencias

- [1] Arnol'd, V.I; Gusein-Zade, S.M; Varchenko, A,N *Singularities of Differentiable Maps* ; Vol I, II; Birkhauser Boston, Switzerland 1985; Germany 1988.
- [2] Avramov, L.L.; Vigué-Poirrier, *Hochschild Homology criteria for smoothness*, Internat. Math. Res. Notices 2 [in Duke Math. J. 65 n° 2] (1992), 17-25.
- [3] Burga, R.; *Homología Cíclica y de Hochschild para Intersección Completa con singularidades Aisladas* , Tesis de doctorado IMCA, Perú 2009, [http: mate.dm.uba.ar/gcorti/](http://mate.dm.uba.ar/gcorti/)
- [4] Burghilea, D. ; Vigué-Poirrier, M., *Cyclic Homology of commutative algebra I*, Algebraic Topology Rational Homotopy, Louvain-la Neuve, 1986- , Lectures Notes in Math. 1318, Springer Verlag, 1988.
- [5] Buenos Aires Cyclic Homology Group, *Cyclic Homology of Hyper-surface*, J. Pure and App. Algebra, 83, 205 – 218.
- [6] Buenos Aires Cyclic Homology Group, *A Hochschild homology criterium for smoothness of an algebra*, Commentarii Mathematici Helvetici, v.69, p.163 - 168, 1994.
- [7] Bruns, W.; Herzog, J. ; *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge University Press 1996.
- [8] Brüderle, S., Kunz E., *Divided Powers and Hochschild Homology of Complete Intersections.*, Math. Ann 299, 57-76, (1994).
- [9] Cortiñas, G., Guccione, J.A., Guccione J.J., *Decomposition of Hochschild and Cyclic homology of Commutative Differential graded Algebra*, J. Pure and App. Algebra, 83, 219 – 235, 1992.
- [10] Eisenbud, D., *The Geometry of Syzygies. A second Course in Commutative algebra and Algebraic Geometry*, Springer-Verlag 1995.

- [11] Emmanouil, I., *The Cyclic Homology of Affine Algebra*, Invent. Math. 121, 1-19, (1995).
- [12] Feigin, B.L., Tsygan, B.L., *Additive K-theory and crystalline cohomology*, Funct. Anal. Appl., 19, 124 – 132, (1985).
- [13] Giusti, M.; *Classification des singularités isolées d'intersections complètes simples*; C.R. Acad. Sc. Paris, 284, 168-170, (1977).
- [14] Hübl, R., Swanson, I., *Derivations and the Integral Closure of Ideals*, Proc. of Amer. Math. Soc., 127, 3503 – 3511, 1999.
- [15] Hochschild, G., Kostant, B., Rosenberg, A., *Differential forms on regular affine algebras*, Trans. AMS 102 (1962), 383-408. 26 # 167  
HOOD, C, JONES, J.D.S., *Some algebraic properties of cyclic homology*
- [16] Mayorquín León, *K-teoría y homología cíclica de hipersuperficies*, Tesis de Doctorado, Universidad de la Laguna, España 2007, <http://mate.dm.uba.ar/gcorti/>.
- [17] Loday J.L., *Cyclic Homology*, Springer Verlag, 1992.
- [18] Loday J.L., Quillen D., *Cyclic homology and the lie algebra of matrices*. Comment. Math. Helv. Vol 59, (1984), p. 565-591.
- [19] Looijenga E., *Isolated Singular Points on Complete Intersections*, Cambridge University Press, 1984.
- [20] Michler, R., *Hodge-Components of Cyclic Homology for Affine Quasi-Homogeneous Hypersurfaces*, K-Theory, Strasbourg, 1992, 321 – 334.
- [21] Michler, R., *Torsion of differentials of hypersurfaces with isolated singularities*, J. Pure and App. Algebra, 104 (1995), 81-88.

**Abstract**

Let  $R$  be the local ring of a point  $P$  of smooth variety. When  $R/I$  is regular the Hochschild and cyclic homology is known. We studied the case in which the ring  $R/I$  has a isolated singularity and  $I$  is complete intersection.

**Keywords:** Isolated Singularities, Hochschild Homology, Cyclic Homology.

Rubén Burga Barboza  
Departamento de Matemática,  
Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo.  
Av. Juan XXIII 391, Lambayeque, Perú  
rrubenb@yahoo.es