TENSOR DE RIEMANN-CHRISTOFFEL

Francisco Pasquel[1]

Febrero, 2010

Resumen

Se presentan algunos conceptos básicos tensoriales, junto con el desarrollo de una forma práctica del tensor de curvatura de Riemann-Christoffel, tensor que es de mucha utilidad en diferentes aplicaciones.

Clasificación AMS 2010: 15A99.

Palabras Clave: *Tensor, Curvatura, Derivada covariante, Conexión afín, Espacios de Riemann, Símbolos de Christoffel.*

1. *Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias, PUCP.*

Introducción

Como se conoce, en un espacio de Riemann, el elemento longitud de arco: ds, presenta la forma cuadrática diferencial:

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j. \tag{1}$$

(Lo que estamos escribiendo usando la convención de índices repetidos o convención de Einstein).

g_{ij} es un tensor covariante de segundo orden, denominado tensor métrico fundamental o simplemente tensor fundamental, del espacio de Riemann.

Las componentes de un tensor en general $T^{i_1 i_2 \ldots ip}_{j_1 j_2 \cdots j_q}$ (p veces contravariante y q veces covariante) entre sistemas coordenados en general, digamos x^i y $\overline{x}^i$ se transforman de acuerdo a la ecuación:

$$\overline{T}^{i_1 i_2 \ldots ip}_{j_1 j_2 \cdots j_q} = \frac{\partial \overline{x}^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial \overline{x}^{i_2}}{\partial x^{k_2}} \cdots \frac{\partial \overline{x}^{i_p}}{\partial x^{k_p}} \frac{\partial x^{r_1}}{\partial \overline{x}^{j_1}} \frac{\partial x^{r_2}}{\partial \overline{x}^{j_2}} \cdots \frac{\partial x^{r_q}}{\partial \overline{x}^{j_q}} T^{k_1 k_2 \ldots kp}_{r_1 r_2 \ldots r_q}. \tag{2}$$

Si derivamos parcialmente el tensor $\frac{\partial T^{i_1 i_2 \cdots ip}_{j_1 j_2 \cdots j_q}}{\partial x^s}$ (donde utilizaremos la notación simplificada de una coma, para indicar la derivada:

$$\frac{\partial T^{i_1 i_2 \ldots ip}_{j_1 j_2 \cdots j_q}}{\partial x^s} = T^{i_1 i_2 \ldots ip}_{j_1 j_2 \cdots j_q}\, , s \qquad \text{(notación))}$$

se observa que, exceptuando el caso de coordenadas cartesianas, el resultado no es un tensor (las componentes resultantes de la derivada, no cumplen la ecuación (2)).

Una nueva derivada, denominada derivada covariante, (donde utilizaremos la notación simplificada de un punto y coma, para indicar esta derivada:

$$\left. T^{i_1 i_2 \ldots ip}_{j_1 j_2 \cdots j_q}\, ; s \right) \tag{3}$$

resuelve este problema, estableciéndose para este fin, un conjunto de funciones: Γ^i_{jk}, denominado conexión afín del espacio (componentes Γ^i_{jk} que no cumplen la ecuación (2)), pero permiten que el resultado (3) sean componentes tensoriales (estas componentes (3) si cumplen con la ecuación (2)).

Luego, se establece por ejemplo, que la derivada covariante, de un tensor covariante t_{ij} de segundo orden viene dada por la expresión:

$$t_{ij;h} = t_{ij,h} - \Gamma^k_{ih}\ t_{kj} - \Gamma^k_{jh}\ t_{ik}. \tag{4}$$

Los espacios en los cuales se definen las componentes Γ^i_{jk}, son denominados espacios de conexión afín.

Cada conexión afín que se defina, implicará una derivada covariante en particular, ligada a dicha conexión.

La diferencia entre las componentes de una conexión:

$$\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj} = T^i_{jk} \tag{5}$$

establece una entidad tensorial T^i_{jk} (T^i_{jk} cumple la ecuación (2)) denominada: Tensor de torsión del espacio. Se observa que si el tensor de torsión es nulo, la conexión afín será simétrica: $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$.

Si se busca ahora las condiciones para que las derivadas covariantes segundas, sean independientes del orden de derivación, esto es, por ejemplo, considerando un tensor de orden uno contravariante:

$$t^i_{;kl} = t^i_{;lk} \tag{6}$$

(donde $t^i_{;k} = t^i_{,k} + \Gamma^i_{jk}\ t^j$).

Se establece que:

$$t^i_{;kl} - t^i_{;lk} = R^i_{jlk}\ t^j - T^h_{kl}\ t^i_{;h} \tag{7}$$

donde:

$$R^i_{jlk} = \Gamma^i_{jk,l} - \Gamma^i_{jl,k} + \Gamma^h_{jk}\,\Gamma^i_{hl} - \Gamma^h_{jl}\,\Gamma^i_{hk} \tag{8}$$

es una entidad tensorial, denominada tensor de curvatura del espacio.

(Se demuestra en general, que si el tensor de curvatura y torsión son nulos, las derivadas covariantes segundas de cualquier tensor, son independientes del orden de derivación).

Si en un espacio de Riemann, se busca una conexión afín en particular, que cumpla con las condiciones:

que dicha conexión sea simétrica y que la derivada covariante, ligada a esta conexión, del tensor fundamental sea nula, esto es:

$$g_{ij;h} = 0. \tag{9}$$

Se establece utilizando (4) que:

$$\Gamma^k_{ij}\, g_{hk} = \frac{1}{2}\left(g_{ih,j} + g_{jh,i} - g_{ij,h}\right). \tag{10}$$

Para el segundo miembro de la ecuación (10) se utiliza la notación:

$$[ij,h] = \frac{1}{2}\left(g_{ih,j} + g_{jh,i} - g_{ij,h}\right) \tag{11}$$

(11) es denominado: Símbolos de Christoffel de 1ra. clase.

Despejando en (10) la conexión Γ^k_{ij} (g_{hk} multiplicado por su forma contravariante g^{hs} es igual al delta de kronecker: $g_{hk}\, g^{hs} = \delta^s_k$) se establece:

$$\Gamma^s_{ij} = g^{hs}\,[ij,h] \tag{12}$$

(12) es denominado: Símbolos de Christoffel de 2da. clase y define una conexión afín en particular, con las condiciones dadas, conexión que es denominada conexión de Levi-Civita.

(Algunos autores utilizan la notación $\left\{ \begin{array}{c} s \\ ij \end{array} \right\} = \Gamma^s_{ij}$ para indicar esta conexión).

Se demuestra que esta conexión de Levi-Civita es única para un espacio de Riemann.

Tensor de Riemann Christoffel

El tensor de curvatura en un espacio de Riemman, considerando como las componentes de la conexión afín, los Símbolos de Christoffel de 2da. clase (conexión de Levi-Civita); tiene la misma expresión dada en (8):

$$R^i_{jlk} = \Gamma^i_{jk,l} - \Gamma^i_{jl,k} + \Gamma^h_{jk}\,\Gamma^i_{hl} - \Gamma^h_{jl}\,\Gamma^i_{hk}\,. \tag{13}$$

Como una observación sobre este tensor, tenemos que por contracción del último índice se obtiene el denominado tensor de Ricci: R_{mn}

Esto es, escribiendo:

$$R^n_{mkp} = \Gamma^n_{mp,k} - \Gamma^n_{mk,p} + \Gamma^l_{mp}\,\Gamma^n_{lk} - \Gamma^l_{mk}\,\Gamma^n_{lp} \tag{14}$$

contrayendo el último índice ($p = n$) en (14) y renombrando índices tenemos:

$$R_{mn} = \Gamma^p_{pm,n} - \Gamma^p_{mn,p} + \Gamma^l_{mp}\,\Gamma^p_{nl} - \Gamma^p_{mn}\,\Gamma^l_{lp}\,. \tag{15}$$

En los espacios de Riemann, como se dispone del tensor fundamental g_{ij}, se puede establecer la forma covariante del tensor de curvatura de Riemann-Christoffel (13):

$$R_{hjlk} = g_{ih}\,R^i_{jlk}. \tag{16}$$

Luego, buscaremos establecer una expresión útil en aplicaciones, de este tensor. Para ello tenemos que:

$$g_{ih}\, R^i_{jlk} \;=\; g_{ih}\, \Gamma^i_{jk,l} \;-\; g_{ih}\, \Gamma^i_{jl,k} \;+\; g_{ih}\, \Gamma^h_{jk}\, \Gamma^i_{hl} \;-\; g_{ih}\, \Gamma^h_{jl}\, \Gamma^i_{hk} \quad (17)$$

lo que ordenamos y escribimos como:

$$R_{hjlk} \;=\; g_{ih}\, \Gamma^i_{jk,l} \;-\; g_{ih}\, \Gamma^i_{jl,k} \;-\; g_{ih}\, \Gamma^i_{hk}\, \Gamma^h_{jl} \;+\; g_{ih}\, \Gamma^i_{hl}\, \Gamma^h_{jk} \quad (18)$$

pero conocemos en base a (10) que:

$$g_{ih}\, \Gamma^i_{jk} \;=\; [jk, h] \quad (19)$$

luego:

$$[jk, h]_{,l} \;=\; g_{ih,l}\, \Gamma^i_{jk} \;+\; g_{ih}\, \Gamma^i_{jk,l} \quad (20)$$

o sea:

$$[jk, h]_{,l} \;-\; g_{ih,l}\, \Gamma^i_{jk} \;=\; g_{ih}\, \Gamma^i_{jk,l} \text{ (1er. sumando de (18)).} \quad (21)$$

Cambiando la denominación de los índices:

$$[j\,l, h]_{,k} \;-\; g_{ih,k}\, \Gamma^i_{jl} \;=\; g_{ih}\, \Gamma^i_{jl,k} \text{ (2do. sumando de (18)).} \quad (22)$$

Además:

$$\text{(3er. sumando de (18)) } g_{ih}\, \Gamma^i_{hk}\, \Gamma^h_{jl} \;=\; [s\,k, h]\, \Gamma^s_{jl}\,. \quad (23)$$

Cambiando la denominación de los índices:

$$\text{(4to. sumando de (18)) } g_{ih}\, \Gamma^i_{hl}\, \Gamma^h_{jk} \;=\; [s\,l, h]\, \Gamma^s_{jk}\,. \quad (24)$$

Luego reemplazando (21),(22),(23) y (24) en (18) :

$$\begin{aligned} R_{hjlk} \;=\; & [jk, h]_{,l} - g_{ih,l}\Gamma^i_{jk} - [j\,l, h]_{,k} + g_{ih,k}\Gamma^i_{jl} - [sk, h]\Gamma^s_{jl} + \\ & + [s\,l, h]\Gamma^s_{jk} \end{aligned} \quad (25)$$

Pero podemos escribir (2do. y 6to. sumando de (25) y renombrando índices):

$$-g_{ih,l}\,\Gamma^{i}_{jk} \;+\; [s\,l,h]\,\Gamma^{s}_{jk} \;=\; \Gamma^{s}_{jk}([s\,l,h]-g_{sh,l}) \tag{26}$$

(4to. y 5to. sumando de (25)):

$$g_{ih,k}\Gamma^{i}_{jl} - [s\,k,h]\Gamma^{s}_{jl} = \Gamma^{s}_{jl}\,(g_{sh,k} - [sk,h]) = -\Gamma^{s}_{jl}\,([s\,k,h] - g_{sh,k}) \tag{27}$$

Luego reemplazando (26) y (27) en (25) :

$$R_{hjlk} = [jk,h]_{,l} - [jl,h]_{,k} + \Gamma^{s}_{jk}\,([sl,h] - g_{sh,l}) - \Gamma^{s}_{jl}\,([sk,h] - g_{sh,k}) \tag{28}$$

Pero conocemos que la derivada covariante del tensor fundamental es nula, luego (en base a (4)):

$$g_{ij,h} = \Gamma^{k}_{ih}\;g_{kj} \;+\; \Gamma^{k}_{jh}\;g_{ik} \tag{29}$$

esto es (en base a (10)):

$$g_{ij,h} \;=\; [i\,h,j] \;+\; [j\,h,i] \tag{30}$$

renombrando índices:

$$g_{sh,l} \;=\; [s\,l,h] \;+\; [h\,l,s] \tag{31}$$

$$g_{sh,k} \;=\; [s\,k,h] \;+\; [h\,k,s]. \tag{32}$$

Reemplazando (31) y (32) en (28):

$$R_{hjlk} = [j\,k,h]_{,l} - [j\,l,h]_{,k} - \Gamma^{s}_{jk}\;[h\,l,s] + \Gamma^{s}_{jl}\;[h\,k,s]. \tag{33}$$

Pero (en base a (11)):

$$[j\,k,h] = \frac{1}{2}\,(g_{kh,j} + g_{jh,k} - g_{jk,h}) \tag{34}$$

$$-[j\,l,h] = \frac{1}{2}\,(-g_{lh,j} - g_{jh,l} + g_{jl,h}) \tag{35}$$

luego:

$$[j\,k,h]_{,l} = \frac{1}{2}\left(g_{kh,jl} + g_{jh,kl} - g_{jk,hl}\right) \tag{36}$$

$$-[j\,l,h]_{,k} = \frac{1}{2}\left(-g_{lh,jk} - g_{jh,lk} + g_{jl,hk}\right). \tag{37}$$

Luego ((36)+(37)):

$$[j\,k,h]_{,l} - [j\,l,h]_{,k} = \frac{1}{2}\left(g_{kh,jl} + g_{jl,hk} - g_{jk,hl} - g_{lh,jk}\right). \tag{38}$$

Luego reemplazando (38) en (33) :

$$R_{hjlk} = \frac{1}{2}\left(g_{kh,jl} + g_{jl,hk} - g_{jk,hl} - g_{lh,jk}\right) - \Gamma^s_{jk}[h\,l,s] + \Gamma^s_{jl}[hk,s]. \tag{39}$$

Además (en base a (12)):

$$-\Gamma^s_{jk} \;=\; -g^{ts}[j\,k,t] \tag{40}$$

$$\Gamma^s_{jl} \;=\; g^{ts}[j\,l,t]. \tag{41}$$

Luego:

$$-\Gamma^s_{jk}[h\,l,s] + \Gamma^s_{jl}[h\,k,s] = -g^{ts}\left([j\,k,t][h\,l,s] - [j\,l,t][h\,k,s]\right). \tag{42}$$

Finalmente reemplazando (42) en (39) obtenemos una expresión práctica del tensor de curvatura, establecido exclusivamente en base al tensor fundamental y sus derivadas:

$$R_{hjlk} = \tfrac{1}{2}\left(g_{kh,jl} + g_{jl,hk} - g_{jk,hl} - g_{lh,jk}\right) - g^{ts}\left([j\,k,t][h\,l,s] - [j\,l,t][h\,k,s]\right) \tag{43}$$

de donde se pueden inferir fácilmente otras formas equivalentes.

Luego podemos establecer propiedades de este tensor:

$$R_{hjlk} + R_{hlkj} + R_{hkjl} = 0 \tag{44}$$

$$R_{hjlk} = -R_{hjkl} = R_{jhkl} = -R_{jhlk} \tag{45}$$

$$R_{hjlk} = R_{lkhj}. \tag{46}$$

(Como una observación, se puede demostrar en base a estas propiedades de simetría, que el número de N componentes independientes del tensor R_{hjlk} en un espacio de n dimensiones, viene dado por: $N = \frac{1}{12}n^2(n^2-1)$).

Observar por ejemplo, la simetría del tensor de Ricci:

$$\begin{aligned} R_{mn} &= R^p_{mnp} = g^{pk}R_{kmnp} = g^{pk}R_{npkm} = g^{kp}R_{nkpm} = g^{pk}R_{knmp} \\ &= R^p_{nmp} = R_{nm}. \end{aligned} \tag{47}$$

Establecer el escalar de Ricci :

$$R = g^{mn}R_{mn} = g^{mn}\, g^{pk}R_{kmnp} \tag{48}$$

luego establecer el tensor gravitatorio de Einstein:

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2}\, g_{ij}\, R \tag{49}$$

(el cual es simétrico y tiene una expresión como tensor mixto:

$$\begin{aligned} G^k_j &= g^{ki}\, G_{ij} = g^{ki}\left(R_{ij} - \tfrac{1}{2}\, g_{ij}\, R\right) \\ &= g^{ki}\, R_{ij} - \tfrac{1}{2}\, g^{ki}\, g_{ij}\, R = R^k_j - \tfrac{1}{2}\delta^k_j\, R \end{aligned} \tag{50}$$

y derivada covariante: $G^k_{j;k} = 0$).

Así como muchas otras aplicaciones.

Referencias

[1] Heinbockel J. H. (2001). *Introduction to Tensor Calculus and Continuum Mechanics.* Trafford Publishing.

[2] Lawden D. F. (2003). *Introduction to Tensor Calculus, Relativity and Cosmology.* Dover Publications.

[3] Lebedev L.P., Cloud M.J. (2003). *Tensor Analysis.* World Scientific.

[4] Mirjana D., Dalarsson N. (2005). *Tensors Relativity and Cosmology.* Academic Press.

[5] Santaló L. A. (1961). *Vectores y Tensores con sus Aplicaciones.* Buenos Aires : Eudeba.

[6] Spain B. (2003). *Tensor Calculus a Concise Course.* Dover Publications

Abstract

This article presents some basic concepts about tensor, together with the development of a practical way of the Riemann-Christoffel curvature tensor, which is used in many applications.

Keywords: Tensor, Curvature, Covariant derivative, Affine connection, Riemannian space, Christoffel symbols.

Francisco Pasquel
Sección Matemáticas,
Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú.

`fpasque@pucp.edu.pe`