ESTUDIO DEL PROBLEMA DE VALOR INICIAL ASOCIADO CON LA ECUACIÓN DE KORTEWEG-DE VRIES III

Aldo Mendoza Uribe[1] *y Juan Montealegre Scott*[2]

Febrero, 2010

Resumen

En este artículo es probado que el problema de valor inicial asociado con la ecuación de Korteweg-de Vries es bien formulado globalmente si el dato inicial pertenece a los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ con $s \geq 2$.

Clasificación AMS 2010: 35Q53, 37K05.

Palabras clave: *Ecuaciones dispersivas no lineales, Buena formulación global, Regularización parabólica, Leyes de conservación.*

[1] *Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias, UNALM.*

[2] *Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias, PUCP.*

1. Introducción

Con el propósito de mostrar un conjunto de métodos aplicables al estudio de las ecuaciones dispersivas no lineales, iniciamos en [16] y [17] la presentación del problema de valor inicial asociado a la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV)

$$\begin{cases} \partial_t u(t) + u(t)\,\partial_x u(t) + \partial_x^3 u(t) = 0, & x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ u_\mu(0) = \varphi(x). \end{cases} \tag{1}$$

La ecuación de KdV modela la propagación de ondas en un canal de aguas rasas. La situación física es la siguiente: se considera un cuerpo de agua de profundidad finita bajo la influencia de la gravedad, acotada inferiormente por una superficie impermeable. Ignorando los efectos de viscosidad y suponiendo que el fluido es incompresible e irrotacional, el movimiento es gobernado por las ecuaciones de Euler con condiciones convenientes de frontera en la superficie rígida y sobre la interfase agua-aire (ver [15] o [20]).

En los artículos [16] y [17] demostramos la buena formulación local del problema (1) en los espacios de Sobolev H^s cualquiera sea $s \in \mathbb{R}$ mayor que 3/2; es decir, si $\varphi \in H^s$, $s > 3/2$, el problema tiene solamente una solución que depende continuamente de los datos iniciales. Para ello usamos los métodos de regularización parabólica [16] y de los estimados de Bona-Smith [17].

Los métodos presentados han mostrado su gran flexibilidad al ser aplicados al estudio de las propiedades de las soluciones de otros problemas de valor inicial, como se puede ver en [1], [2], [3], [9], [19], [18] y [21]. Sin embargo, es oportuno señalar que el análisis del problema (1) también es posible usando la teoría cuasi lineal de Kato [11], [12] y [13].

El objetivo de este trabajo es demostrar un resultado de buena formulación global del problema (1) en los espacios H^s, $s \geq 2$. El método que utilizamos combina la buena formulación local y las cantidades conservadas por la ecuación de KdV.

Este artículo está organizado como sigue. En la sección 2, brevemente presentamos los resultados de la teoría local desarrollada en [16] y [17]. En la sección 3, después de unas definiciones son estudiadas algunas cantidades conservadas por la ecuación de KdV y sus respectivas derivadas de Gateaux. Ellas serán el ingrediente principal para derivar estimados a priori que permitan probar en la sección 4 que la solución local puede ser extendida globalmente. En la sección 4 usaremos las siguientes propiedades.

Teorema 1. *Sean* $1 < p_0,\ p_1 < \infty$, $0 \leq s_0 < s < s_1$ *y* $u \in \mathcal{S}$. *Si* $s = \theta s_0 + (1-\theta)\, s_1$ *y* $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}$ *donde* $0 \leq \theta \leq 1$ *entonces existe* $C = C\,(s_0, s_1, \theta, p_0, p_1) > 0$ *tal que*

$$\|J^s u\|_{L^p} \leq C \,\|J^{s_0} u\|_{L^{p_0}}^{\theta}\, \|J^{s_1} u\|_{L^{p_1}}^{1-\theta}. \tag{2}$$

Además, si $u \in H^s$, $s > \frac{3}{2}$ *tenemos*

$$\|u\|_{L^\infty} \leq \sqrt{2}\, \|u\|_0^{1/2}\, \|\partial_x u\|_0^{1/2}. \tag{3}$$

El siguiente resultado se debe a Kato [13].

Teorema 2. *Sean* $u, v \in \mathcal{S}$, $s > 3/2$ *y* $t \geq 1$. *Entonces existe una constante* $C = C\,(s,t) > 0$ *tal que*

$$|\langle u, v\partial_x u\rangle_{H^t}| \leq C\left(\|\partial_x v\|_{H^{s-1}}\, \|u\|_{H^t}^2 + \|\partial_x v\|_{H^{t-1}}\, \|u\|_{H^s}\, \|u\|_{H^t}\right). \tag{4}$$

Proposición 3. *Si* $0 < \alpha < 2$ *y* $\beta > 0$, *entonces dado* $\eta > 0$ *y tomando* $C_{\alpha,\beta}(\eta) = \frac{2-\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{2\eta}\right)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}$ *tenemos,*

$$x^\alpha y^\beta \leq \eta x^2 + C_{\alpha,\beta}(\eta)\, y^{\frac{2\beta}{2-\alpha}}, \quad x, y > 0. \tag{5}$$

En el desarrollo del trabajo, entre otras notaciones comunes, por L^p designaremos al espacio (de clases) de funciones definidas sobre $\mathbb{R}$ cuya p-ésima potencia es integrable con norma

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^p\, dx\right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Por L^∞ representamos al espacio de funciones medibles esencialmente acotadas sobre R con norma

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \operatorname{ess} |u(x)| \, .$$

Para cada $s \in \mathbb{R}$ con H^s designamos al espacio de Sobolev de s, definido como la compleción del espacio de Schwartz S con respecto a la norma

$$\|u\|_s = \left(\int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 \, dx \right)^{1/2} .$$

La transformada de Fourier es definida por

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} u(x) \; dx$$

y la transformada de Fourier inversa por

$$\check{u}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} u(\xi) \; d\xi.$$

Si X es un espacio de Banach fijo designaremos por $C([0,T] : X)$ al espacio de funciones continuas $u : [0,T] \to X$. Distintas constantes positivas serán representadas por C, pero observemos que ellas pueden variar de una línea a otra. Cuando sea necesario anotaremos su dependencia sobre otros parámetros.

2. Revisión de la Teoría Local

En esta sección recordaremos los principales resultados de la teoría local presentada en [16] y [17]. Consideremos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \partial_t u(t) + u(t)\,\partial_x u(t) + \partial_x^3 u(t) - \mu \partial_x^2 u(t) = 0, & x \in \mathbb{R},\, t \geq 0, \\ u_\mu(0) = \varphi, \end{cases} \tag{6}$$

el cual corresponde con (1) cuando $\mu = 0$.

El estudio local del problema de valor inicial (6) se inicia con el siguiente teorema.

Teorema 4. *Sean $\mu \geq 0$ y $s \geq 0$. El operador $-A_\mu : H^{s+3} \to H^s$ definido para $u \in H^{s+3}$ por $-A_\mu u = -\partial_x^3 u + \mu \partial_x^2 u$, es el generador de un semigrupo de contracciones $\{W_\mu(t)\}_{t\geq 0}$ sobre H^s tal que*

$$\widehat{W_\mu(t)v}(\xi) = e^{(i\xi^3 - \mu\xi^2)t}\widehat{v}(\xi),$$

y cualquiera sea $v \in H^s$ la función

$$W_\mu(\cdot)v \in C\left(\mathbb{R}_0^+ : H^s\right) \cap C^1\left(\mathbb{R}_0^+ : H^{s-3}\right)$$

es la única solución del problema de valor inicial lineal

$$\begin{cases} \partial_t u(t) + A_\mu u(t) = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(0) = \varphi. \end{cases}$$

Cuando $\mu = 0$ el semigrupo $\{W_0(t)\}_{t\geq 0}$ se extiende a un grupo de operadores unitarios sobre H^s. Además, si $\mu > 0$, para cada $t \geq 0$ se tiene $W_\mu(t) \in \mathcal{L}(H^s : H^{s+r})$ con

$$\|W_\mu(t)v\|_{s+r} \leq K_r \sqrt{1 + \frac{1}{(2\mu t)^r}}\,\|v\|_s \tag{7}$$

para todo $r \geq 0$ y $v \in H^s$.

Demostración. Ver los teoremas 1.1 y 1.2 de [16]. □

El teorema 4 revela que es imposible aplicar el teorema de contracción para resolver el problema de valor inicial (1), por ello, para demostrar la buena formulación local, se usan el método de *regularización parabólica* y las *aproximaciones de Bona-Smith.*

En el método de regularización parabólica primero se demuestra que el problema (6) es bien formulado localmente.

Teorema 5. *Sean $\mu > 0$, $\varphi \in H^s$ con $s > \frac{3}{2}$.*

1. *Existen $T_\mu = T_\mu\left(\|\varphi\|_s, s, \mu\right) > 0$ y una función*

$$u_\mu \in C\left([0, T_\mu] : H^s\right) \cap C^1\left([0, T_\mu] : H^{s-3}\right)$$

que satisface la ecuación integral

$$u_\mu(t) = W_\mu(t)\varphi - \int_0^t W_\mu(t-\tau)\,\partial_x F\left(u_\mu(\tau)\right) d\tau. \tag{8}$$

y es la solución única de (6). Además, para todo $r \geq 0$

$$u_\mu \in C\left([0, T_\mu] : H^{s+r}\right) \cap C^1\left([0, T_\mu] : H^{s-3+r}\right).$$

2. *Existe $T = T\left(\|\varphi\|_s, s\right) > 0$ tal que u_μ se puede extender al intervalo $[0, T]$. Además, existe $\rho \in C\left([0, T], \mathbb{R}\right)$ tal que*

$$\begin{cases} \left\|u_\mu(t)\right\|_s^2 \leq \rho(t), \quad 0 \leq t \leq T \\ \sup\limits_{[0,T]} \rho(t) \leq C\left(\|\varphi\|_s, s, T\right) \end{cases}, \tag{9}$$

donde ρ satisface

$$\begin{cases} \rho'(t) = 2c_s \rho^{3/2}(t), \quad t > 0 \\ \rho(0) = \|\varphi\|_s^2. \end{cases} \tag{10}$$

También, si $\varphi \in H^{s+r}$ para $r \geq 0$, entonces para cada $\mu > 0$ se tiene

$$\sup_{[0,T]} \left\|u_\mu(t)\right\|_{s+r} \leq C\left(\|\varphi\|_s, s, T\right) \tag{11}$$

en donde $C(\cdot,\cdot,\cdot)$ es creciente en cada uno de sus argumentos. Más aún, T puede ser elegido independiente de s.

3. *Sea $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión en H^s convergente en H^s a φ. Si para cada $n \geq 1$, $u_{\mu,n} : [0, T_n] \to H^s$ es la solución de (6) con $u_{\mu,n}(0) =$*

φ_n, entonces para todo $\overline{T} \in]0, T[$ se cumple que para n suficientemente grande $u_{\mu,n}$ está definida en $\left[0, \overline{T}\right]$ y

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{\left[0,\overline{T}\right]} \left\| u_{\mu,n}(t) - u_\mu(t) \right\|_s = 0.$$

Demostración. Ver en [16] el teorema 2.1 para la prueba de la primera parte y los teoremas 3.1 y 3.2 para la demostración de la segunda parte.

Probemos la tercera parte. De (9) para todo n tenemos

$$\left\| u_{\mu,n}(t) \right\|_s^2 \leq \rho_n(t), \quad 0 \leq t \leq T_n, \tag{12}$$

donde ρ_n satisface (10) en $[0, T_n^*[$ con $T_n^* = \frac{1}{C_s \|\varphi_n\|_s}$ y $T_n \in]0, T_n^*[$. Ahora, para $\overline{T} \in]0, T[$ consideremos $\varepsilon = \varepsilon\left(\overline{T}, \|\varphi\|_s\right) > 0$ tal que

$$\varepsilon + \|\varphi\|_s = \left(\frac{T}{\overline{T}}\right) \|\varphi\|_s, \tag{13}$$

entonces, existe $N_0 = N(\varepsilon)$ tal que $\|\varphi_n - \varphi\|_s < \varepsilon$ para $n \geq N_0$. Entonces de la definición de ρ_n tenemos para $n \geq N_0$,

$$\rho_n^{1/2}(t) = \frac{\|\varphi_n\|_s}{1 - C_s t \|\varphi_n\|_s} \leq \frac{\varepsilon + \|\varphi\|_s}{1 - C_s \overline{T}\left(\varepsilon + \|\varphi\|_s\right)} \equiv \rho_{\overline{T}}(t), \text{ para } t \in \left[0, \overline{T}\right]$$

pues de (13)

$$C_s t \|\varphi_n\|_s \leq C_s t\left(\varepsilon + \|\varphi\|_s\right) \leq C_s\left(\varepsilon + \|\varphi\|_s\right)\overline{T} \leq C_s \|\varphi\|_s T < 1,$$

donde la última desigualdad sigue de la elección de T. De este modo tenemos,

$$\sup_{\left[0,\overline{T}\right]} \rho_n(t) \leq C\left(s, \overline{T}, \|\varphi\|_s\right). \tag{14}$$

Así, $u_{\mu,n}$ puede ser extendida a $\left[0, \overline{T}\right]$, satisfaciendo (12).

Consideremos ahora $v = u_\mu - u_{\mu,n}$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} \partial_t v(t) &= -\partial_x^3 v(t) - \frac{1}{2}\partial_x\left(u_\mu^2(t) - u_{\mu,n}^2(t)\right) + \mu\partial_x^2 v(t) \\ &= -\partial_x^3 v(t) - \frac{1}{2}\partial_x v(t)\left(u_\mu(t) + u_{\mu,n}(t)\right) + \mu\partial_x^2 v(t). \end{aligned} \tag{15}$$

Usando la definición del producto interno en H^r e integración por partes, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\partial_t \left\|v(t)\right\|_s^2 &= \left\langle v(t), \partial_t v(t)\right\rangle_s \\
&= \left\langle v(t), -\partial_x^3 v(t)\right\rangle_s + \frac{1}{2}\left\langle v(t), -\partial_x v(t)\left(u_\mu(t) + u_{\mu,n}(t)\right)\right\rangle_s \\
&\quad + \mu\left\langle v(t), \partial_x^2 v(t)\right\rangle_s \\
&= \frac{1}{2}\left\langle \partial_x v(t), v(t)\left(u_\mu(t) + u_{\mu,n}(t)\right)\right\rangle_s - \mu\left\|\partial_x v(t)\right\|_s^2 .
\end{aligned}$$

De la desigualdad de Cauchy-Schwartz y el hecho que H^r es un álgebra de Banach si $r > \frac{1}{2}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\partial_t \left\|v(t)\right\|_s^2 \\
&\quad\leq C\left\|\partial_x v(t)\right\|_s \left\|v(t)\left(u_\mu(t) + u_{\mu,n}(t)\right)\right\|_s - \mu\left\|\partial_x v(t)\right\|_s^2 \\
&\quad\leq C\left\|v(t)\right\|_s \left\|\partial_x v(t)\right\|_s \left(\left\|u_\mu(t)\right\|_s + \left\|u_{\mu,n}(t)\right\|_s\right) - 2\mu\left\|\partial_x v(t)\right\|_s^2 .
\end{aligned}$$

Por las desigualdades (9), (12) y (14) obtenemos

$$\begin{aligned}
\partial_t \left\|v(t)\right\|_s^2 &\leq C\left\|v(t)\right\|_s \left\|\partial_x v(t)\right\|_s - \mu\left\|\partial_x v(t)\right\|_s^2 \\
&\leq \varepsilon\left\|v(t)\right\|_s^2 + \frac{C^2}{4\varepsilon}\left\|\partial_x v(t)\right\|_s^2 - 2\mu\left\|\partial_x v(t)\right\|_s^2
\end{aligned}$$

donde $C = C\left(s, \overline{T}, \left\|\varphi\right\|_s\right)$, y para deducir la última desigualdad se ha utilizado la desigualdad $ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}$ donde $a, b > 0$, con $a = \left\|v\right\|_s$, $b = C\left\|\partial_x v\right\|_s$. Eligiendo $\varepsilon = \frac{C^2}{8\mu}$ obtenemos

$$\partial_t \left\|v(t)\right\|_s^2 \leq \frac{C^2}{8\mu}\left\|v(t)\right\|_s^2 .$$

Integrando desde 0 hasta t, sigue que

$$\left\|v(t)\right\|_s^2 \leq \left\|v(0)\right\|_s^2 + \frac{C^2}{8\mu}\int_0^t \left\|v(\tau)\right\|_s^2 d\tau.$$

Aplicando la desigualdad de Gronwall tenemos

$$\|v(t)\|_s^2 \leq \|v(0)\|_s^2 \left(1 + \exp\left(\frac{C^2\overline{T}}{8\mu}\right)\right) = C_\mu \|v(0)\|_s^2$$

lo que muestra

$$\sup_{[0,\overline{T}]} \|u_{\mu,n}(t) - u_\mu(t)\|_s \leq C_\mu \|\varphi_n - \varphi\|_s^2 .$$

Esto concluye la demostración. □

El método de regularización parabólica continúa con la demostración de que el problema de valor inicial (1) tiene solución única u en H^s si $s > 3/2$. La idea consiste en demostrar que el límite de las funciones $u_\mu : [0, T_\mu] \to H^s$ cuando $\mu \to 0^+$ existe y que tal límite, al que se llama u, es la solución única de (1). La segunda parte del teorema 5 es esencial para demostrar que el problema tiene solución única, pues ahí se tiene la existencia de un intervalo $[0, T]$ independiente de μ en donde todas las soluciones u_μ pueden ser definidas.

La tercera parte del teorema 5 queda demostrada al asegurar que

$$\|u_{\mu,n}(t) - u_\mu(t)\|_s^2 \leq \left(1 + e^{\frac{C^2\overline{T}}{8\mu}}\right) \|u_{\mu,n}(0) - u_\mu(0)\|_s^2 .$$

Esto revela la imposibilidad de usar la dependencia continua de la solución u_μ respecto del dato inicial pues $C_\mu \to +\infty$ cuando $\mu \to 0^+$. Por esta razón, para demostrar la dependencia continua de la solución respecto del dato inicial en el caso no regularizado, se utiliza las aproximaciones de Bona-Smith.

Teorema 6. *Sean $\varphi \in H^s$ y $s > \frac{3}{2}$.*

1. *Existe $T = T(\|\varphi\|_s, s) > 0$ y*

$$u \in C([0,T] : H^s) \cap C^1\left([0,T] : H^{s-3}\right)$$

solución única de (1) tal que

$$\begin{cases} \|u(t)\|_s^2 \leq \rho(t), \quad 0 \leq t \leq T \\ \sup\limits_{[0,T]} \rho(t) \leq C(\|\varphi\|_s, s, T) \end{cases},$$

donde ρ *satisface (10) y* $C(\cdot,\cdot,\cdot)$ *es creciente en cada uno de sus argumentos. Además, si* $\varphi \in H^{s+r}$ *con* $r \geq 0$*, entonces*

$$\sup_{[0,T]} \|u(t)\|_{s+r} \leq c(\|\varphi\|_s, s, T)\, \|\varphi\|_{s+r}.$$

2. *Sean* $\varphi \in H^s$ *con* $s > \frac{3}{2}$ *y* $u \in C([0,T] : H^s)$ *la solución del problema de valor inicial (1) que satisface (9). Si* $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ *es una sucesión en* H^s *convergente a* φ *en* H^s *y* $u_n : [0, T_n] \to H^s$ *es la solución de (1) con* $u_n(0) = \varphi_n$*. Entonces, para todo* $\overline{T} \in]0, T[$ *existe* $N_0 = N_0(\overline{T})$ *tal que para* $n \geq N_0$*,* u_n *está definida en* $[0, \overline{T}]$ *y*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{[0,\overline{T}]} \|u_n(t) - u(t)\|_s = 0.$$

Demostración. Ver los teoremas 3.3, 3.4, 3.5 y 3.6 de [16] para la demostración de la primera parte y [17] para la segunda. □

3. Leyes de Conservación de la Ecuación de Korteweg-de Vries

Dado X un espacio de Banach y $f : X \to \mathbb{R}$ definimos **la derivada de** f **en** u **en la dirección de** v como el límite siguiente, si existe,

$$f'_v(u) = \lim_{h\to 0} \frac{f(u+hv) - f(u)}{h}.$$

Decimos que f es **Gateaux diferenciable** en $u \in X$ si se verifica que existen las derivadas de f en u en toda dirección $v \in X$, y existe $g \in X'$

tal que

$$f'_v(u) = \langle g, v \rangle_{X',X}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X',X}$ denota el producto de dualidad.

Es fácil probar que si $f : X \to \mathbb{R}$ es Gateaux diferenciable en $u \in X$, solamente existe un elemento $g \in X'$ tal que $f'_v(u) = \langle g, v \rangle_{X',X}$; tal g será denotado por $G_f(u)$ y será llamado la **derivada de Gateaux** de f en u. Así, si f es Gateaux diferenciable en u, tenemos

$$\langle G_f(u), v \rangle_{X',X} = \frac{d}{dh} f(u + hv) \bigg|_{h=0},$$

y cuando X es un espacio de Hilbert con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$, por el teorema de Lax-Milgram, podemos escribir

$$\langle G_f(u), v \rangle_X = \frac{d}{dh} f(u + hv) \bigg|_{h=0}. \tag{16}$$

Un funcional $F : X \to \mathbb{R}$ es llamado un **funcional conservado** de la ecuación de evolución

$$\partial_t u(t) = K(u(t)) \tag{17}$$

en donde $K : X \to X$ es un operador, en general no lineal, si $F(u(t))$ es independiente de t para cualquier solución u de (17).

Teorema 7. *Si X es un espacio de Hilbert, F es un funcional conservado de (17) si para cualquier solución u se cumple*

$$\langle G_F(u), \partial_t u(t) \rangle_X = 0. \tag{18}$$

La ecuación de Korteweg-de Vries es rica en tales funcionales, cuatro de ellos son

$$\Phi_0(u) = \int_{\mathbb{R}} 3u(x)\, dx$$

$$\Phi_1(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u^2(x)\, dx$$

$$\Phi_2(u) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{6}u^3(x) - \frac{1}{2}(\partial_x u)^2(x)\right) dx$$

$$\Phi_3(u) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{5}{72}u^4(x) - \frac{5}{6}u(x)(\partial_x u)^2(x) + \frac{1}{2}\left(\partial_x^2 u\right)^2(x)\right) dx$$

y las derivadas de Gateaux de tales funcionales son presentadas en el siguiente teorema.

Teorema 8. *Para $u \in \mathcal{S}$ tenemos que*

$$G_{\Phi_0}(u) = 3$$

$$G_{\Phi_1}(u) = u$$

$$G_{\Phi_2}(u) = \frac{1}{2}u^2 + \partial_x^2 u$$

$$G_{\Phi_3}(u) = \frac{5}{18}u^3 + \frac{5}{6}\partial_x^2 u^2 - \frac{5}{6}(\partial_x u)^2 + \partial_x^4 u$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \langle G_{\Phi_0}(u), v\rangle_0 &= \left.\frac{d}{dh}\Phi_0(u+hv)\right|_{h=0} = \left.\frac{d}{dh}\int_{\mathbb{R}} 3(u+hv)(x)\, dx\right|_{h=0} \\ &= \left.\frac{d}{dh}\langle 3, u+hv\rangle_0\right|_{h=0} = \langle 3, v\rangle_0 \end{aligned}$$

entonces $G_{\Phi_0}(u) = 3$.

$$\begin{aligned} \langle G_{\Phi_1}(u), v\rangle_0 &= \left.\frac{d}{dh}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}(u+hv)^2(x)\, dx\right|_{h=0} \\ &= \left.\frac{1}{2}\frac{d}{dh}\langle u+hv, u+hv\rangle_0\right|_{h=0} \\ &= \left.\langle u+hv, v\rangle_0\right|_{h=0} \\ &= \langle u, v\rangle_0, \end{aligned}$$

es decir, $G_{\Phi_1}(u) = u$.

También

$$\begin{aligned}
&\langle G_{\Phi_2}(u), v\rangle_0 \\
&= \frac{d}{dh}\int_{\mathbb{R}}\left[\frac{1}{6}(u+hv)^3(x) - \frac{1}{2}(\partial_x(u+hv))^2(x)\right]dx\Big|_{h=0} \\
&= \frac{d}{dh}\left(\frac{1}{6}\left\langle (u+hv)^2, u+hv\right\rangle_0 - \frac{1}{2}\langle \partial_x(u+hv), \partial_x(u+hv)\rangle_0\right)\Big|_{h=0} \\
&= \frac{1}{3}\langle (u+hv)v, u+hv\rangle_0 + \frac{1}{6}\left\langle (u+hv)^2, v\right\rangle_0 - \langle \partial_x(u+hv), \partial_x v\rangle_0\Big|_{h=0} \\
&= \frac{1}{3}\langle uv, u\rangle_0 + \frac{1}{6}\left\langle u^2, v\right\rangle_0 - \langle \partial_x u, \partial_x v\rangle_0 \\
&= \frac{1}{2}\left\langle u^2, v\right\rangle_0 + \left\langle \partial_x^2 u, v\right\rangle_0 = \left\langle \frac{1}{2}u^2 + \partial_x^2 u, v\right\rangle_0,
\end{aligned}$$

así, $G_{\Phi_2}(u) = \frac{1}{2}u^2 + \partial_x^2 u$.

Además

$$\begin{aligned}
&\langle G_{\Phi_3}(u), v\rangle_0 \\
&= \frac{d}{dh}\left(\frac{5}{72}\left\langle (u+hv)^2, (u+hv)^2\right\rangle_0 - \frac{5}{6}\left\langle u+hv, (\partial_x(u+hv))^2\right\rangle_0\right)\Big|_{h=0} \\
&+ \frac{1}{2}\frac{d}{dh}\left\langle \partial_x^2(u+hv), \partial_x^2(u+hv)\right\rangle_0\Big|_{h=0} \\
&= \frac{5}{18}\left\langle (u+hv)^2, (u+hv)v\right\rangle_0 - \frac{5}{6}\left\langle v, (\partial_x(u+hv))^2\right\rangle_0\Big|_{h=0} \\
&- \frac{5}{3}\langle u+hv, \partial_x(u+hv)\partial_x v\rangle_0 + \left\langle \partial_x^2(u+hv), \partial_x^2 v\right\rangle_0\Big|_{h=0} \\
&= \frac{5}{18}\left\langle u^2, uv\right\rangle_0 - \frac{5}{6}\left\langle v, (\partial_x u)^2\right\rangle_0 - \frac{5}{3}\langle u, \partial_x u\partial_x v\rangle_0 + \left\langle \partial_x^2 u, \partial_x^2 v\right\rangle_0 \\
&= \frac{5}{18}\left\langle u^3, v\right\rangle_0 - \frac{5}{6}\left\langle v, (\partial_x u)^2\right\rangle_0 - \frac{5}{3}\left\langle \frac{1}{2}\partial_x u^2, \partial_x v\right\rangle_0 + \left\langle \partial_x^4 u, v\right\rangle_0 \\
&= \left\langle \frac{5}{18}u^3 - \frac{5}{6}(\partial_x u)^2 + \frac{5}{6}\partial_x^2 u^2 + \partial_x^4 u, v\right\rangle_0,
\end{aligned}$$

por lo tanto, $G_{\Phi_3}(u) = \frac{5}{18}u^3 - \frac{5}{6}(\partial_x u)^2 + \frac{5}{6}\partial_x^2 u^2 + \partial_x^4 u$. □

Observamos que

$$\begin{aligned}\partial_t u(t) &= -\partial_x^3 u(t) - u(t)\,\partial_x u(t)\\ &= -\partial_x\left(\partial_x^2 u(t) + \frac{1}{2}u^2(t)\right)\\ &= -\partial_x G_{\Phi_2}(u(t))\end{aligned}$$

por lo tanto, la ecuación de KdV es un sistema Hamiltoniano.

Para comprobar que los funcionales Φ_j, $j = 0, 1, 2, 3$, son conservados por la ecuación de Korteweg-de Vries tenemos que verificar la condición (18), con G_{Φ_j} es dada en el teorema 8 y $K(u) = -\partial_x^3 u - u\partial_x u$.

Teorema 9. *Para $u \in \mathcal{S}$ y $j = 0, 1, 2, 3$, tenemos que*

$$\left\langle G_{\Phi_j}(u(t)), \partial_t u(t)\right\rangle_0 = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{19}$$

Demostración. Escribiremos u por $u(t)$. Para $j = 1$ tenemos

$$\langle G_{\Phi_1}(u), \partial_t u\rangle_0 = \left\langle u, -\left(\partial_x^3 u + u\partial_x u\right)\right\rangle_0 = -\left\langle u, \partial_x^3 u\right\rangle_0 - \langle u, u\partial_x u\rangle_0 = 0.$$

Para $j = 2$ tenemos

$$\begin{aligned}\langle G_{\Phi_2}(u), \partial_t u\rangle_0 &= -\left\langle \frac{1}{2}u^2 + \partial_x^2 u, \partial_x^3 u + u\partial_x u\right\rangle_0\\ &= -\frac{1}{2}\left\langle u^2, \partial_x^3 u\right\rangle_0 - \frac{1}{2}\left\langle u^2, u\partial_x u\right\rangle_0\\ &\quad - \left\langle \partial_x^2 u, \partial_x^3 u\right\rangle_0 - \left\langle \partial_x^2 u, u\partial_x u\right\rangle_0\\ &= \frac{1}{2}\left\langle 2u\partial_x u, \partial_x^2 u\right\rangle_0 - \frac{1}{4}\left\langle u^2, \partial_x u^2\right\rangle_0\\ &\quad - \left\langle \partial_x^2 u, u\partial_x u\right\rangle_0\\ &= 0.\end{aligned}$$

Para $j = 3$,

$$\begin{aligned}
&\left\langle G_{\Phi_3}(u), \partial_t u\right\rangle_0 \\
= & -\left\langle \frac{5}{18}u^3 + \frac{5}{6}\partial_x^2\left(u^2\right) - \frac{5}{6}\left(\partial_x u\right)^2 + \partial_x^4 u, \partial_x^3 u + u\partial_x u\right\rangle_0 \\
= & -\frac{5}{18}\left\langle u^3, \partial_x^3 u\right\rangle_0 - \frac{5}{18}\left\langle u^3, u\partial_x u\right\rangle_0 - \frac{5}{6}\left\langle \partial_x^2\left(u^2\right), \partial_x^3 u\right\rangle_0 \\
& -\frac{5}{6}\left\langle \partial_x^2\left(u^2\right), u\partial_x u\right\rangle_0 + \frac{5}{6}\left\langle \left(\partial_x u\right)^2, \partial_x^3 u\right\rangle_0 + \frac{5}{6}\left\langle \left(\partial_x u\right)^2, u\partial_x u\right\rangle_0 \\
& -\left\langle \partial_x^4 u, \partial_x^3 u\right\rangle_0 - \left\langle \partial_x^4 u, u\partial_x u\right\rangle_0
\end{aligned}$$

de las propiedades $\left\langle \partial_x^k u, u\right\rangle_0 = 0$ si k impar y $\left\langle u^3, u\partial_x u\right\rangle_0 = 0$,

$$\begin{aligned}
\left\langle G_{\Phi_3}(u), \partial_t u\right\rangle_0 = & -\frac{5}{18}\left\langle u^3, \partial_x^3 u\right\rangle_0 - \frac{5}{6}\left\langle \partial_x^2\left(u^2\right), \partial_x^3 u\right\rangle_0 \\
& -\frac{5}{6}\left\langle \partial_x^2\left(u^2\right), u\partial_x u\right\rangle_0 + \frac{5}{6}\left\langle \left(\partial_x u\right)^2, \partial_x^3 u\right\rangle_0 \\
& +\frac{5}{6}\left\langle \left(\partial_x u\right)^2, u\partial_x u\right\rangle_0 - \left\langle \partial_x^4 u, u\partial_x u\right\rangle_0 .
\end{aligned}$$

Consideremos

$$I_1 = -\left(\frac{5}{18}\left\langle u^3, \partial_x^3 u\right\rangle_0 + \frac{5}{6}\left\langle \partial_x^2\left(u^2\right), u\partial_x u\right\rangle_0 - \frac{5}{6}\left\langle \left(\partial_x u\right)^2, u\partial_x u\right\rangle_0\right)$$

$$I_2 = -\left(\frac{5}{6}\left\langle \partial_x^2\left(u^2\right), \partial_x^3 u\right\rangle_0 - \frac{5}{6}\left\langle \left(\partial_x u\right)^2, \partial_x^3 u\right\rangle_0 + \left\langle \partial_x^4 u, u\partial_x u\right\rangle_0\right).$$

Probaremos $I_1 = 0$. En efecto, notemos que

$$\left\langle \partial_x^2\left(u^2\right), u\partial_x u\right\rangle_0 = -2\left\langle u\partial_x u, \partial_x\left(u\partial_x u\right)\right\rangle_0 = 0,$$

entonces

$$\begin{aligned}
-I_1 = & -\frac{5}{6}\left\langle u^2\partial_x u, \partial_x^2 u\right\rangle_0 - \frac{5}{6}\left\langle \left(\partial_x u\right)^2, u\partial_x u\right\rangle_0 \\
= & \frac{5}{6}\left\langle 2u(\partial_x u)^2 + u^2\partial_x^2 u, \partial_x u\right\rangle_0 - \frac{5}{6}\left\langle \left(\partial_x u\right)^2, u\partial_x u\right\rangle_0 \\
= & \frac{5}{6}\left\langle \left(\partial_x u\right)^2, u\partial_x u\right\rangle_0 + \frac{5}{6}\left\langle u^2\partial_x^2 u, \partial_x u\right\rangle_0 = I_1
\end{aligned}$$

luego $I_1 = 0$. Para I_2 consideremos

$$\begin{aligned}
M &= \frac{5}{6}\left\langle \partial_x^2\left(u^2\right), \partial_x^3 u\right\rangle_0 - \frac{5}{6}\left\langle (\partial_x u)^2, \partial_x^3 u\right\rangle_0 + \left\langle \partial_x^4 u, u\partial_x u\right\rangle_0 \\
&= \frac{5}{6}\left\langle \partial_x^2\left(u^2\right), \partial_x^3 u\right\rangle_0 - \frac{5}{6}\left\langle (\partial_x u)^2, \partial_x^3 u\right\rangle_0 - \left\langle \partial_x^3 u, \partial_x\left[u\partial_x u\right]\right\rangle_0 \\
&= \frac{5}{6}\left\langle \partial_x^2\left(u^2\right), \partial_x^3 u\right\rangle_0 - \frac{5}{6}\left\langle (\partial_x u)^2, \partial_x^3 u\right\rangle_0 \\
&\quad - \left\langle \partial_x^3 u, (\partial_x u)^2\right\rangle_0 - \left\langle \partial_x^3 u, u\partial_x^2 u\right\rangle_0 \\
&= \frac{5}{6}\left\langle \partial_x\left[\partial_x u^2\right], \partial_x^3 u\right\rangle_0 - \frac{11}{6}\left\langle (\partial_x u)^2, \partial_x^3 u\right\rangle_0 - \left\langle \partial_x^3 u, u\partial_x^2 u\right\rangle_0 \\
&= \frac{5}{3}\left\langle (\partial_x u)^2, \partial_x^3 u\right\rangle_0 + \frac{5}{3}\left\langle u\partial_x^2 u, \partial_x^3 u\right\rangle_0 \\
&\quad -\frac{11}{6}\left\langle (\partial_x u)^2, \partial_x^3 u\right\rangle_0 - \left\langle u\partial_x^2 u, \partial_x^3 u\right\rangle_0 \\
&= \frac{2}{3}\left\langle u\partial_x^2 u, \partial_x^3 u\right\rangle_0 - \frac{1}{6}\left\langle (\partial_x u)^2, \partial_x^3 u\right\rangle_0 \\
&= \frac{1}{6}\left\langle \partial_x^2 u, \partial_x\left(\partial_x u\right)^2\right\rangle_0 - \frac{2}{3}\left\langle \partial_x^2 u, \partial_x\left(u\partial_x^2 u\right)\right\rangle_0 \\
&= -\frac{1}{3}\left\langle \partial_x^2 u, \partial_x u \cdot \partial_x^2 u\right\rangle_0 - \frac{2}{3}\left\langle \partial_x^2 u, u\partial_x^3 u\right\rangle_0 \qquad (20)
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\left\langle \partial_x^3 u, u\partial_x^2 u\right\rangle_0 = -\left\langle \partial_x^2 u, \partial_x\left(u\partial_x^2 u\right)\right\rangle_0 = -\left\langle \partial_x^2 u, \partial_x u \cdot \partial_x^2 u\right\rangle_0 - \left\langle \partial_x^2 u, u\partial_x^3 u\right\rangle_0$$

entonces

$$\left\langle \partial_x^3 u, u\partial_x^2 u\right\rangle_0 = -\frac{1}{2}\left\langle \partial_x^2 u, \partial_x u \cdot \partial_x^2 u\right\rangle_0 \qquad (21)$$

De (20) en (21)

$$\begin{aligned}
M &= -\frac{1}{3}\left\langle \partial_x^2 u, \partial_x u \cdot \partial_x^2 u\right\rangle_0 - \frac{2}{3}\left\langle \partial_x^2 u, u\partial_x^3 u\right\rangle_0 \\
&= -\frac{1}{3}\left\langle \partial_x^2 u, \partial_x u \cdot \partial_x^2 u\right\rangle_0 - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\left\langle \partial_x^2 u, \partial_x u \cdot \partial_x^2 u\right\rangle_0\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

entonces $I_2 = 0$. Por lo tanto, $I_1 = I_2 = 0$. Así hemos demostramos que Φ_2 es una ley de conservación para la ecuación de KdV. □

Corolario 10. *Para $j = 1, 2, 3$ y $u \in S$ se tiene*

$$\left\langle G_{\Phi_j}(u), \partial_x G_{\Phi_2}(u) \right\rangle_0 = 0. \tag{22}$$

Zabusky y Kruskal [23] descubrieron que hay más funcionales conservados. Posteriormente, Gardner, Kruskal y Miura en [6] probaron que los cuatro funcionales conservados son el inicio de una sucesión de funcionales conservados Φ_n de la forma

$$\Phi_n(u) = \int_{\mathbb{R}} P_n(x)\, dx, \tag{23}$$

en donde P_n es un polinomio en u y sus derivadas hasta el orden $n - 1$. Este hecho también fue demostrado por Lax [10] basándose en una fórmula de recursión para sus gradientes (**derivadas de Gateaux**) descubierta por A. Lenart,

$$HG_n = \partial G_{n+1}$$

donde H es el operador de tercer orden antisimétrico

$$H = \partial_x^3 + \frac{2}{3} u \partial_x + \frac{1}{3} \partial_x u$$

4. Teoría Global

En esta sección trataremos el problema de extender las soluciones locales $u(t) \in H^s$ del problema de valor inicial (1) para todo $t \geq 0$ y $s \geq 2$.

Una manera estándar de conseguir tales extensiones consiste en obtener estimados globales *a priori* para $\|u(t)\|_{H^s}$ en términos de $\|\varphi\|_{H^s}$. Tales estimados se deducen usando las leyes de conservación.

A continuación deducimos un estimado a priori satisfecho para cada solución del problema (6).

Teorema 11. *Sean $\varphi \in H^s$ con $s \geq 2$, $\mu > 0$ y $u_\mu \in C([0,T] : H^s)$ la solución de (6) encontrada en el teorema 5. Entonces existe $C_t = C(\mu, s, t, \|\varphi\|_s)$ continua y creciente en sus argumentos tal que*

$$\|u_\mu(t)\|_s \leq C_t \quad \textit{para todo } t \in [0,T]. \tag{24}$$

Demostración. Probemos que

$$\|u_\mu(t)\|_0 \leq \|\varphi\|_0, \ \text{ si } t \in [0,T]. \tag{25}$$

En efecto, por el teorema 8, en el primer miembro de (6) tenemos

$$\partial_t u_\mu + \partial_x^3 u_\mu + u_\mu \partial_x u_\mu - \mu \partial_x^2 u_\mu = \partial_t u_\mu + \partial_x G_{\Phi_2}(u_\mu) - \mu \partial_x^2 u_\mu,$$

entonces

$$\partial_t u_\mu(t) + \partial_x G_{\Phi_2} u_\mu(t) - \mu \partial_x^2 u_\mu(t) = 0. \tag{26}$$

Como $u_\mu \in C([0,T] : H^\infty)$ por el teorema 5, la igualdad (26), el teorema 8, el corolario 10 e integración por partes implican

$$\begin{aligned}
\partial_t \|u_\mu(t)\|_0^2 &= 2\langle u_\mu(t), \partial_t u_\mu(t)\rangle_0 \\
&= 2\left\langle u_\mu(t), -\partial_x G_{\Phi_2} u_\mu(t) + \mu \partial_x^2 u_\mu(t)\right\rangle_0 \\
&= -2\langle G_{\Phi_1} u_\mu(t), \partial_x G_{\Phi_2}(u_\mu(t))\rangle_0 + 2\mu\left\langle u_\mu(t), \partial_x^2 u_\mu(t)\right\rangle_0 \\
&= -2\mu\langle \partial_x u_\mu(t), \partial_x u_\mu(t)\rangle_0 \\
&= -2\mu\|\partial_x u_\mu(t)\|_0^2.
\end{aligned}$$

Luego, integrando desde 0 hasta t, tenemos $\int_0^t \partial_\tau \|u_\mu(\tau)\|_0^2 \, d\tau \leq 0$, de donde obtenemos (25).

Probemos ahora que

$$\|u_\mu(t)\|_2 \leq C_t \quad \text{para todo } t \in [0,T]. \tag{27}$$

Para esto, como $\|u(t)\|_2^2 = \|u(t)\|_0^2 + \|\partial_x u(t)\|_0^2 + \left\|\partial_x^2 u(t)\right\|_0^2$, tenemos

$$
\begin{aligned}
&\Phi_3(u_\mu(t)) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{5}{72}u_\mu^4(t) - \frac{5}{6}u_\mu(t)(\partial_x u_\mu)^2(t)\right] dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(\partial_x^2 u_\mu\right)^2(t)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{5}{72}u_\mu^4(t) - \frac{5}{6}u_\mu(t)(\partial_x u_\mu)^2(t)\right] dx \\
&+ \frac{1}{2}\left(\|u(t)\|_0^2 + \|\partial_x u(t)\|_0^2 + \left\|\partial_x^2 u(t)\right\|_0^2\right) - \frac{1}{2}\left(\|u(t)\|_0^2 + \|\partial_x u(t)\|_0^2\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{5}{72}u_\mu^4(t) - \frac{5}{6}u_\mu(t)(\partial_x u_\mu)^2(t)\right] dx + \frac{1}{2}\|u_\mu(t)\|_2^2 - \frac{1}{2}\|u_\mu(t)\|_1^2 .
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
\|u_\mu(t)\|_2^2 &\leq 2\left|\Phi_3(u_\mu(t))\right| + \|u_\mu(t)\|_1^2 \\
&\quad + \left|\int_{\mathbb{R}} \left[\frac{5}{36}u_\mu^4(t) - \frac{5}{3}u_\mu(t)(\partial_x u_\mu)^2(t)\right] dx\right| \\
&\leq 2\left|\Phi_3(u_\mu(t))\right| + \|u_\mu(t)\|_1^2 + C\left|\int_{\mathbb{R}} u_\mu^4(t)\,dx\right| \\
&\quad + C\left|\int_{\mathbb{R}} u_\mu(t)(\partial_x u_\mu)^2(t)\,dx\right| . \qquad (28)
\end{aligned}
$$

Luego, se debe estimar $\Phi_3(u_\mu(t))$. El teorema 7, la igualdad (26), el corolario 10 y el teorema 8 implican

$$
\begin{aligned}
&\partial_t \Phi_3(u_\mu(t)) \\
&= \langle G_{\Phi_3}(u_\mu(t)), \partial_t u_\mu(t)\rangle_0 \\
&= \left\langle G_{\Phi_3}(u_\mu(t)), -\partial_x G_{\Phi_2}(u(t)) + \mu\partial_x^2 u(t)\right\rangle_0 \\
&= -\langle G_{\Phi_3}(u_\mu(t)), \partial_x G_{\Phi_2}(u_\mu(t))\rangle_0 + \mu\left\langle G_{\Phi_3}(u_\mu(t)), \partial_x^2 u_\mu(t)\right\rangle_0 \\
&= \mu\left\langle \frac{5}{18}u_\mu^3(t) - \frac{5}{6}(\partial_x u_\mu(t))^2 + \frac{5}{6}\partial_x^2 u_\mu^2(t) + \partial_x^4 u_\mu(t), \partial_x^2 u_\mu(t)\right\rangle_0 ,
\end{aligned}
$$

entonces

$$\begin{aligned}
&\partial_t \Phi_3 (u_\mu (t)) \\
&\quad \leq \frac{5\mu}{18} \left| \langle u_\mu^3 (t) , \partial_x^2 u_\mu (t) \rangle_0 \right| + \frac{5\mu}{6} \left| \left\langle (\partial_x u_\mu (t))^2 , \partial_x^2 u_\mu (t) \right\rangle_0 \right| \\
&\qquad + \frac{5\mu}{6} \left| \langle \partial_x^2 u_\mu^2 (t) , \partial_x^2 u_\mu (t) \rangle_0 \right| + \mu \left| \langle \partial_x^4 u_\mu (t) , \partial_x^2 u_\mu (t) \rangle_0 \right| . \qquad (29)
\end{aligned}$$

Estimaremos cada sumando de la desigualdad (29). La desigualdad de Cauchy-Schwartz, el teorema 1, interpolación de H^1 entre L^2 y H^2, el estimado (25) y (5) con $\alpha = \frac{3}{2}$ y $\beta = \frac{5}{2}$ implican

$$\begin{aligned}
&\left| \langle u_\mu^3 (t) , \partial_x^2 u_\mu (t) \rangle_0 \right| \\
&\quad \leq \left\| u_\mu^3 (t) \right\|_0 \left\| \partial_x^2 u_\mu (t) \right\|_0 \\
&\quad \leq \left(\int_{\mathbb{R}} \left| u_\mu^3 (t) \right|^2 dx \right)^{1/2} \| u_\mu (t) \|_2 \\
&\quad \leq \| u_\mu \|_{L^\infty}^2 \| u_\mu (t) \|_0 \| u_\mu (t) \|_2 \\
&\quad \leq \left(\sqrt{2} \| u_\mu (t) \|_0^{1/2} \| \partial_x u_\mu (t) \|_0^{1/2} \right)^2 \| u_\mu (t) \|_0 \| u_\mu (t) \|_2 \\
&\quad \leq 2 \| u_\mu (t) \|_0^2 \| u_\mu (t) \|_1 \| u_\mu (t) \|_2 \\
&\quad \leq 2 \| u_\mu (t) \|_0^2 \left(C \| u_\mu (t) \|_0^{1/2} \| u_\mu (t) \|_2^{1/2} \right) \| u_\mu (t) \|_2 \\
&\quad \leq C \| u_\mu (t) \|_2^{3/2} \| \varphi \|_0^{5/2} \\
&\quad \leq \eta \| u_\mu (t) \|_2^2 + C_{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}} (\eta) \| \varphi \|_0^{10} . \qquad (30)
\end{aligned}$$

Integrando por partes y derivando

$$\begin{aligned}
\left\langle (\partial_x u_\mu (t))^2 , \partial_x^2 u_\mu (t) \right\rangle_0 &= - \left\langle \partial_x (\partial_x u_\mu (t))^2 , \partial_x u_\mu (t) \right\rangle_0 \\
&= -2 \langle \partial_x u_\mu (t) \cdot \partial_x^2 u_\mu (t) , \partial_x u_\mu (t) \rangle_0 \\
&= -2 \left\langle (\partial_x u_\mu (t))^2 , \partial_x^2 u_\mu (t) \right\rangle_0
\end{aligned}$$

por tanto

$$\left\langle (\partial_x u_\mu (t))^2 , \partial_x^2 u_\mu (t) \right\rangle_0 = 0. \qquad (31)$$

Usando integración por partes, la desigualdad de Cauchy-Schwartz, el teorema 1, interpolación de H^1 entre L^2 y H^2, el estimado (25) y la desigualdad (5) con $\alpha = 1$ y $\beta = \frac{1}{2}$ primero y con $\alpha = \frac{3}{2}$ y $\beta = \frac{5}{2}$ después, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\left|\left\langle \partial_x^2 u_\mu^2 (t), \partial_x^2 u_\mu (t)\right\rangle_0\right| \\
&\quad = 2\left|\left\langle u_\mu (t)\, \partial_x u_\mu (t), \partial_x^3 u_\mu (t)\right\rangle_0\right| \\
&\quad \leq 2 \left\| u_\mu (t)\, \partial_x u_\mu (t)\right\|_0 \left\|\partial_x^3 u_\mu (t)\right\|_0 \\
&\quad \leq 2 \|\varphi\|_0 \left\|\partial_x u_\mu (t)\right\|_{L^\infty} \left\|\partial_x^3 u_\mu (t)\right\|_0 \\
&\quad \leq 2\sqrt{2} \|\varphi\|_0 \left(\left\|\partial_x u_\mu (t)\right\|_0^{1/2} \left\|\partial_x^2 u_\mu (t)\right\|_0^{1/2}\right) \left\|\partial_x^3 u_\mu (t)\right\|_0 \\
&\quad \leq 2\sqrt{2} \|\varphi\|_0 \left\| u_\mu (t)\right\|_1^{1/2} \left\| u_\mu (t)\right\|_2^{1/2} \left\|\partial_x^3 u_\mu (t)\right\|_0 \\
&\quad \leq C \|\varphi\|_0 \left(C \|\varphi\|_0^{1/2} \left\| u_\mu (t)\right\|_2^{1/2}\right)^{1/2} \left\| u_\mu (t)\right\|_2^{1/2} \left\|\partial_x^3 u_\mu (t)\right\|_0 \\
&\quad \leq C \|\varphi\|_0^{5/4} \left\| u_\mu (t)\right\|_2^{3/4} \left\|\partial_x^3 u_\mu (t)\right\|_0 \\
&\quad \leq C \left\|\partial_x^3 u_\mu (t)\right\|_0 \left(\left\| u_\mu (t)\right\|_2^{3/2} \|\varphi\|_0^{5/2}\right)^{1/2} \\
&\quad \leq \eta \left\|\partial_x^3 u_\mu (t)\right\|_0^2 + C_{1,\frac{1}{2}} (\eta) \left\| u_\mu (t)\right\|_2^{3/2} \|\varphi\|_0^{5/2} \\
&\quad \leq \eta \left\|\partial_x^3 u_\mu (t)\right\|_0^2 + C_{1,\frac{1}{2}} (\eta) \left(\eta \left\| u_\mu (t)\right\|_2^2 + C_{\frac{3}{2},\frac{5}{2}} (\eta) \|\varphi\|_0^{10}\right).
\end{aligned} \tag{32}$$

Por último, integrando por partes obtenemos

$$\left\langle \partial_x^4 u_\mu (t), \partial_x^2 u_\mu (t)\right\rangle_0 = -\left\langle \partial_x^3 u_\mu (t), \partial_x^3 u_\mu (t)\right\rangle_0 = -\left\|\partial_x^3 u_\mu (t)\right\|_0^2. \tag{33}$$

Por lo tanto, de (30) - (33), obtenemos en (29)

$$\begin{aligned}
&\partial_t \Phi_3 \left(u_\mu (t)\right) \\
&\leq \mu \Big(C_{\frac{3}{2},\frac{5}{2}} (\eta) \|\varphi\|_0^{10} + C_{1,\frac{1}{2}} (\eta)\, C_{\frac{3}{2},\frac{5}{2}} (\eta) \|\varphi\|_0^{10} \\
&+ \eta \left\| u_\mu (t)\right\|_2^2 + C_{1,\frac{1}{2}} (\eta)\, \eta \left\| u_\mu (t)\right\|_2^2 + (\eta - 1) \left\|\partial_x^3 u_\mu (t)\right\|_0^2 \Big) \\
&\leq \mu \left(C(\eta) \|\varphi\|_0^{10} + C(\eta) \left\| u_\mu (t)\right\|_2^2 + (\eta - 1) \left\|\partial_x^3 u_\mu (t)\right\|_0^2 \right).
\end{aligned} \tag{34}$$

Haciendo $\eta = \frac{1}{2}$ e integrando (34) desde 0 hasta t, obtenemos

$$\begin{aligned}
\Phi_3\left(u_\mu\left(t\right)\right) &\leq \Phi_3\left(u_\mu\left(0\right)\right) + C\mu \int_0^t \left(\left\|\varphi\right\|_0^{10} + \left\|u_\mu\left(\tau\right)\right\|_2^2\right) d\tau \\
&\leq \Phi_3\left(\varphi\right) + C\mu \left\|\varphi\right\|_0^{10} t + C\mu \int_0^t \left\|u_\mu\left(\tau\right)\right\|_2^2 d\tau.
\end{aligned} \tag{35}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
\left|\Phi_3\left(\varphi\right)\right| &\leq \frac{5}{72}\int_{\mathbb{R}} \left(\varphi^2\left(x\right)\right)^2 dx + \frac{5}{6}\left|\int_{\mathbb{R}} \varphi\left(x\right)\left(\partial_x\varphi\right)^2\left(x\right) dx\right| \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(\partial_x^2\varphi\right)^2\left(x\right) dx \\
&\leq C\left(\left\|\varphi\right\|_{L^\infty}^2 \left\|\varphi\right\|_0^2 + \left\|\varphi\right\|_{L^\infty} \left\|\partial_x\varphi\right\|_0^2 + \left\|\varphi\right\|_2^2\right) \\
&\leq C\left(\sqrt{2}\left\|\varphi\right\|_0^{1/2} \left\|\partial_x\varphi\right\|_0^{1/2}\right)^2 \left\|\varphi\right\|_0^2 \\
&\quad + C\left(\sqrt{2}\left\|\varphi\right\|_0^{1/2} \left\|\partial_x\varphi\right\|_0^{1/2}\right) \left\|\partial_x\varphi\right\|_0^2 + \left\|\varphi\right\|_2^2 \\
&\leq C\left(\left\|\varphi\right\|_0^3 \left\|\partial_x\varphi\right\|_0 + \left\|\varphi\right\|_0^{1/2} \left\|\partial_x\varphi\right\|_0^{5/2} + \left\|\varphi\right\|_2^2\right) \\
&\leq C\left(\left\|\varphi\right\|_0^3 \left\|\varphi\right\|_1 + \left\|\varphi\right\|_0^{1/2} \left\|\varphi\right\|_1^{5/2} + \left\|\varphi\right\|_2^2\right).
\end{aligned}$$

Interpolando H^1 entre L^2 y H^2, obtenemos

$$\begin{aligned}
\left|\Phi_3\left(\varphi\right)\right| &\leq C\left\|\varphi\right\|_0^{7/2} \left\|\varphi\right\|_2^{1/2} + C\left\|\varphi\right\|_0^{7/4} \left\|\varphi\right\|_2^{5/4} + \left\|\varphi\right\|_2^2 \\
&\leq C\left\|\varphi\right\|_0^{7/2} \left(\left\|\varphi\right\|_2^{1/2} + \left\|\varphi\right\|_2^{5/4} + \left\|\varphi\right\|_2^2\right).
\end{aligned} \tag{36}$$

De (35) y (36)

$$\begin{aligned}
\Phi_3\left(u_\mu\left(t\right)\right) &\leq C\left\|\varphi\right\|_0^{7/2} \left(\left\|\varphi\right\|_2^{1/2} + \left\|\varphi\right\|_2^{5/4} + \left\|\varphi\right\|_2^2\right) \\
&\quad + C\mu\left\|\varphi\right\|_0^{10} t + C\mu \int_0^t \left\|u_\mu\left(\tau\right)\right\|_2^2 d\tau \\
&\leq C_t + C_t \int_0^t \left\|u_\mu\left(\tau\right)\right\|_2^2 d\tau.
\end{aligned}$$

Como

$$\left\|u_\mu(t)\right\|_1^2 \le C\left\|u_\mu(t)\right\|_0\left\|u_\mu(t)\right\|_2 \le C\left\|\varphi\right\|_0^2 + C\left\|u_\mu(t)\right\|_2^2,$$

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}} u_\mu^4(t)\,dx\right| &\le \left\langle u_\mu^2(t), u_\mu^2(t)\right\rangle_0 \le \left\|u_\mu(t)\right\|_{L^\infty}^2\left\|u_\mu(t)\right\|_0^2 \\
&\le \left(\sqrt{2}\left\|\varphi\right\|_0^{1/2}\left\|\partial_x u_\mu(t)\right\|_0^{1/2}\right)^2\left\|\varphi\right\|_0^2 \le 2\left\|u_\mu(t)\right\|_1\left\|\varphi\right\|_0^3 \\
&\le \left\|u_\mu(t)\right\|_2^2 + \left\|\varphi\right\|_0^6
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}} u_\mu(t)\left(\partial_x u_\mu\right)^2(t)\,dx\right| \\
\le\ & \left\langle u_\mu(t), \left(\partial_x u_\mu\right)^2(t)\right\rangle_0 \le \left\|u_\mu(t)\right\|_{L^\infty}\left\|\partial_x u_\mu(t)\right\|_0^2 \\
\le\ & \left(\sqrt{2}\left\|\varphi\right\|_0^{1/2}\left\|\partial_x u_\mu(t)\right\|_0^{1/2}\right)\left\|u_\mu(t)\right\|_1^2 \le \sqrt{2}\left\|\varphi\right\|_0^{1/2}\left\|u_\mu(t)\right\|_1^{5/2} \\
\le\ & \sqrt{2}\left\|\varphi\right\|_0^{1/2}\left(C\left\|\varphi\right\|_0^{1/2}\left\|u_\mu(t)\right\|_2^{1/2}\right)^{5/2} \le C\left\|u_\mu(t)\right\|_2^{5/4}\left\|\varphi\right\|_0^{7/4} \\
\le\ & \eta\left\|u_\mu(t)\right\|_2^2 + C_{\frac{5}{4},\frac{7}{4}}\left(\left\|\varphi\right\|_0^{7/4}\right)^\gamma = \eta\left\|u_\mu(t)\right\|_2^2 + C_{\frac{5}{4},\frac{7}{4}}\left\|\varphi\right\|_0^{7\gamma/4}
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\left\|u_\mu(t)\right\|_2^2 &\le C_t + C_t\int_0^t \left\|u_\mu(\tau)\right\|_2^2 d\tau \\
&\qquad + C\left\|\varphi\right\|_0^2 + C\left\|u_\mu(t)\right\|_2^2 + \left\|u_\mu(t)\right\|_2^2 + \left\|\varphi\right\|_0^6 \\
&\qquad + \eta\left\|u_\mu(t)\right\|_2^2 + C_{\frac{5}{4},\frac{7}{4}}\left\|\varphi\right\|_0^{7\gamma/4} \\
&\le C_t + C_t\int_0^t \left\|u_\mu(\tau)\right\|_2^2 d\tau + \eta_1\left\|u_\mu(t)\right\|_2^2.
\end{aligned}$$

Luego

$$\left(1-\eta_1\right)\left\|u_\mu(t)\right\|_2^2 \le C_t + C_t\int_0^t \left\|u_\mu(\tau)\right\|_2^2 d\tau$$

y haciendo $\eta_1 = \frac{1}{2}$ obtenemos

$$\left\|u_\mu(t)\right\|_2^2 \leq C_t + C_t \int_0^t \left\|u_\mu(\tau)\right\|_2^2 d\tau.$$

Aplicando la desigualdad de Gronwall, para $t \in [0, T]$ tenemos

$$\left\|u_\mu(t)\right\|_2 \leq C_t$$

donde $C_t = C\left(\mu, \|\varphi\|_0, t\right)$, mostrando de este modo (27).

Si $s > 2$ para $t \in [0, T]$ se tiene que

$$\begin{aligned}
&\partial_t \left\|u_\mu(t)\right\|_s^2 \\
&\quad = 2\left\langle u_\mu(t), \partial_t u_\mu(t)\right\rangle_s \\
&\quad = 2\left\langle u_\mu(t), -\partial_x^3 u_\mu(t) - u_\mu(t)\,\partial_x u_\mu(t) + \mu\partial_x^2 u_\mu(t)\right\rangle_s \\
&\quad = -2\left\langle u_\mu(t), \partial_x^3 u_\mu(t)\right\rangle_s - 2\left\langle u_\mu(t), u_\mu(t)\,\partial_x u_\mu(t)\right\rangle_s \\
&\quad + 2\mu\left\langle u_\mu(t), \partial_x^2 u_\mu(t)\right\rangle_s \\
&\quad \leq -2\left\langle u_\mu(t), u_\mu(t)\,\partial_x u_\mu(t)\right\rangle_s - 2\mu\left\langle \partial_x u_\mu(t), \partial_x u_\mu(t)\right\rangle_s \\
&\quad \leq -2\left\langle u_\mu(t), u_\mu(t)\,\partial_x u_\mu(t)\right\rangle_s - 2\mu\left\|u_\mu(t)\right\|_s^2 \\
&\quad \leq 2\left|\left\langle u_\mu(t), u_\mu(t)\,\partial_x u_\mu(t)\right\rangle_s\right|.
\end{aligned}$$

Por la desigualdad (4) con $s = 2$ y t sustituido por s, tenemos

$$\begin{aligned}
&\left|\left\langle u_\mu(t), u_\mu(t)\,\partial_x u_\mu(t)\right\rangle_s\right| \\
&\leq C\left(\left\|\partial_x u_\mu(t)\right\|_1 \left\|u_\mu(t)\right\|_s^2 + \left\|\partial_x u_\mu(t)\right\|_{s-1} \left\|u_\mu(t)\right\|_2 \left\|u_\mu(t)\right\|_s\right) \\
&\leq C\left(\left\|u_\mu(t)\right\|_2 \left\|u_\mu(t)\right\|_s^2 + \left\|u_\mu(t)\right\|_s \left\|u_\mu(t)\right\|_2 \left\|u_\mu(t)\right\|_s\right) \\
&= C\left\|u_\mu(t)\right\|_2 \left\|u_\mu(t)\right\|_s^2.
\end{aligned}$$

Entonces, por (27) resulta

$$\partial_t \left\|u_\mu(t)\right\|_s^2 \leq C\left\|u_\mu(t)\right\|_2 \left\|u_\mu(t)\right\|_s^2 \leq C_t \left\|u_\mu(t)\right\|_s^2.$$

Integrado desde 0 hasta t,

$$\left\|u_\mu(t)\right\|_s^2 \leq \|\varphi\|_s^2 + C_t \int_0^t \left\|u_\mu(\tau)\right\|_s^2 d\tau$$

para $t \in [0,T]$. Aplicando la desigualdad de Gronwall y extrayendo la raíz cuadrada, sigue (24). □

Estamos ahora en condiciones de establecer el siguiente teorema.

Teorema 12. *Si $\varphi \in H^s$ con $s \geq 2$ y la función $u \in C([0,T] : H^s)$ es la solución del problema (1) dada por el teorema 6, entonces para todo $t \in [0,T]$ tenemos*

$$\|u(t)\|_s \leq C_t$$

donde $C_t = C(s,t,\|\varphi\|_s)$ es continua y creciente en sus argumentos.

Demostración. Si $t \in [0,T]$ y $\mu > 0$, entonces del teorema 11 sigue que

$$\|u_\mu(t)\|_s \leq C(\mu, s, t, \|\varphi\|_s).$$

De la demostración del teorema 6 tenemos que

$$\lim_{\mu \to 0^+} u_\mu(t) = u(t) \quad \text{en } H^s,$$

uniformemente en $[0,T]$, así

$$\|u(t)\|_s \leq \liminf_{\mu \to 0^+} \|u_\mu(t)\|_s \leq C_t,$$

completando la demostración. □

A continuación demostraremos el resultado principal de esta sección, el cual nos dice que el problema de valor inicial (1) es bien formulado globalmente en H^s, $s \geq 2$.

Teorema 13. *Sea $\varphi \in H^s$ con $s \geq 2$. Entonces existe una función $u \in C(\mathbb{R}_0^+ : H^s) \cap C^1(\mathbb{R}_0^+ : H^{s-3})$ única solución del problema (1) que continuamente depende del dato inicial φ en el siguiente sentido: si $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión en H^s convergente a φ en H^s, $\{u_n\}_{n \geq 1}$ es la sucesión en $C(\mathbb{R}_0^+ : H^s)$ de soluciones de los problemas (1) con dato inicial $u_n(0) = \varphi_n$, entonces para n suficientemente grande, existe $C = C(s, \|\varphi\|_s) > 0$ tal que*

$$\sup_{t \in [0,T]} \|u_n(t) - u(t)\|_s \leq C \|\varphi_n - \varphi\|. \tag{37}$$

Demostración. De los teoremas 6, 12 y del argumento usual de extensión sigue la existencia y unicidad de la solución global. Las demás conclusiones siguen de la demostración del teorema 6, sustituyendo $\rho(t)$ y $\rho_n(t)$ por C_t y $C_n(t)$. $\square$

Referencias

[1] J. Angulo. *A dispersive system of long waves in weighted Sobolev spaces.* Advances in Differential Equations. Volume 3, Number 2, (1998) pp. 227-248.

[2] J. Angulo. *On the Cauchy problem for a Boussinesq-type system.* Advances in Differential Equations. Volume 4, Number 4, (1999) pp. 457-492.

[3] E. Arbieto. *Um problema de Cauchy para a equação de Otto-Sudan generalizada.* Tese de Doutorado, IMPA (1990).

[4] T. B. Benjamin. *Lectures on nonlinear wave motion.* Lectures in Appl. Math., Vol. 15, pp. 3-47. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., (1974).

[5] J. Bona, R. Smith. *The initial-value problem for the Korteweg-de Vries equation.* Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A 278, 555-601, (1975).

[6] C. Gardner, M. Kruskal, R. Miura. *Korteweg-de Vries equation and generalization - II. Existence of conservation laws and constants of motion.* J. Math. Phys., 9, 1204-1209, (1968).

[7] R. J. Iório Jr. *On the Cauchy problem for the Benjamin-Ono equation.* Comm. PDE, 11, 1031-1081, (1986).

[8] R. J. Iório Jr. *KdV, BO and friends in weighted Sobolev spaces.* Functional Analytical Methods for PDE. Lect. Notes in Math., 1450, (1990).

[9] R. J. Iório Jr., W. Nunes. *On equations of Kp type.* Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Volume 128A, p. 725-743, (1998).

[10] P. D. Lax. *Almost periodic solutions of the KdV equation.* SIAM Review, 18, (1976), 351-375.

[11] T. Kato. *Quasi-linear equations of evolution, with applications to partial differential equations.* Lecture and Notes in Mathematics, 448, 25-70, (1975).

[12] T. Kato. *On the Korteweg-de Vries equation.* Manuscripta Math., **28**, 89-99, (1979).

[13] T. Kato. *On the Cauchy problem for the (Generalized) KdV equations.* Studies in Applied Mathematics, Advances in Mathematics Supplementary Studies, **8**, 93-128, (1983).

[14] S. Kichenassamy. *Nonlinear waves equations.* Monographs and textbooks in pure and applied mathematics 194. M. Dekker, New York (1996).

[15] J. López, R. Cipolatti. *Iniciação a física matemática. Modelagem de processos e métodos de solução.* Rio de Janeiro, IMPA, 2009. 304 p. ISBN 9788524402876.

[16] A. Mendoza, J. Montealegre. *Ecuación de Korteweg - De Vries.* Pro Mathematica Vol. XVII, No. 34, 105 - 120, (2003).

[17] A. Mendoza, J. Montealegre. *Ecuación de Korteweg -De Vries II.* Pro Mathematica Vol. XVIII, No. 35 - 36, 5 - 20, (2004).

[18] J. Montealegre, C. Monzón, R. Rengifo. *Problema de Cauchy para un sistema de ecuaciones de Korteweg-de Vries.* ProMathematica. Vol. XX, No. 39 - 40. 2006.

[19] W. Nunes. *O Problema de Cauchy global para equações dispersivas com coeficientes dependentes do tempo.* Tese de Doutorado, IMPA (1991).

[20] C. Rodriguez. *Deducción de la ecuación de Korteweg-de Vries.* Pro Mathematica Vol. XXIII, No. 79 - 104, 5 - 20, (2009).

[21] J. C. Saut. *Remarks on the generalized Kadomtsev-Petviashvili equations.* Indiana Univ. Math. J. 42 (1993), no. 3, 1011-1026.

[22] J. C. Saut, R. Teman. *Remarks on the Korteweg-de Vries equation.* Israel J. of Math., 24, 78-87, (1976).

[23] N. Zabusky, M. Kruskal. *Interaction of "Solitons" in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States.* Phys. Rev. Lett. 15: 240-243, (1965).

Abstract

In this paper we show that the initial value problem for the Korteweg-de Vries equation is global well posedness in Sobolev spaces H^s, $s \geq 2$. For this we use conservation laws to derive a priori estimate for the norm of solution, then use the extension principle to obtain the global solution.

Keywords: Nonlinear dispersive equations, Global well posedness, Parabolic regularization, Conservation laws.

A. Mendoza Uribe
Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Agraria La Molina
amendoza@lamolina.edu.pe

J. Montealegre Scott
Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú
jmscott@pucp.edu.pe