# RELACIONES ABELIANAS Y CURVATURA DE UN WEB

*Andrés Beltrán*[1,2]

**Marzo, 2010**


## *Resumen*

*Sea $\mathcal{W}$ un $k-$web no singular en el plano complejo definido por una ecuación diferencial de primer orden con coeficientes en $\mathcal{O} = \mathbb{C}\{x, y\}$ de la forma*

$$F(x, y, y') = a_0(x, y) \cdot (y')^k + a_1(x, y) \cdot (y')^{k-1} + \cdots + a_k(x, y) = 0,$$

*con $k \geq 3$. Un problema de interés en la geometría de webs es contar el número de relaciones abelianas linealmente independientes, llamado rango del web y determinar aquellos webs que son de rango maximal.*



Clasificación AMS 2010: 53A60 Geometry of webs

***Palabras Clave:*** *Foliaciones, Webs*



[1] *Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias, PUCP.*



[2] *Parcialmente financiado por el Proyecto DAI 2009-0052.*

En este trabajo consideramos estas relaciones abelianas sobre una superficie definida por $F$. Esto conduce al estudio de un sistema diferencial $\mathcal{M}$, cuyas soluciones son las relaciones abelianas del web, via el teorema (6). Asimismo, usando la teoría de E. Cartan, Ripoll demuestra la existencia de un $\mathbb{C}$−fibrado vectorial $E$ de rango $\pi_k$ sobre $(\mathbb{C}^2, 0)$ provisto de una conexión $\nabla$ de manera tal que sus secciones del espacio vectorial horizontal es isomorfo al espacio de relaciones abelianas asociadas al web, y una base adaptada de $E$ donde la curvatura de $(E, \nabla)$ toma la forma

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_{\pi_k} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

El teorema de Cauchy-Kovalevski ofrece una manera de encontrar webs de rango maximal usando solamente los coeficientes de $F$.

# 1. Relaciones Abelianas de un Web

Localmente un $k$−web es dado por $k$−foliaciones $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_k$ en $(\mathbb{C}^2, 0)$ en posición general. Si $\mathcal{F}_i$ viene definida por una 1−forma diferencial $\omega_i = c_i(x, y)dx + d_i(x, y)dy$ entonces podemos presentar algebraicamente el web $\mathcal{W}$ por medio de una forma $k$−lineal simétrica

$$\begin{aligned} &\textstyle\prod_{i=1}^{k}(c_i(x, y)dx + d_i(x, y))dy \\ &= a_0(x, y)dy^k + a_1(x, y)dy^{k-1}dx + \cdots + a_k(x, y)dx^k. \end{aligned}$$

Equivalentemente podemos describir un $k$−web $\mathcal{W}$ por medio de una ecuación diferencial ordinaria implícita $F(x, y, y') = 0$, donde

$$F(x, y, p) = a_0(x, y) \cdot p^k + a_1(x, y) \cdot p^{k-1} + \cdots + a_k(x, y),$$

$a_i(x, y) \in \mathcal{O} = \mathbb{C}\{x, y\}$ y $F \in \mathcal{O}[p]$ es un polinomio sin factores múltiples tal que $a_0 \neq 0$, $F_p(0) \neq 0$ y $R = \text{Result}(F, F_p)(0) \neq 0$. Si $R(0) \neq 0$, el teorema de Cauchy garantiza que fuera del conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : R(x,y) = 0\}$ las curvas integrales de la ecuación diferencial $F(x,y,y') = 0$ definen un $k-$web no singular $\mathcal{W}$ de $(\mathbb{C}^2, 0)$. Denotemos por $\mathcal{W} = \{\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_k\}$ el $k-$web definido por la ecuación diferencial de la forma

$$F(x,y,p) = a_0(x,y) \cdot p^k + a_1(x,y) \cdot p^{k-1} + \cdots + a_k(x,y) = 0, \qquad (1)$$

donde $p = \frac{dx}{dy}$ y $F$ tiene las condiciones descritas anteriormente. En este caso, los campos que definen cada una de la foliaciones vienen definidos por

$$X_i(x,y) = \partial_x + p_i(x,y)\, \partial_y \,,$$

donde $p_i = p_i(x,y)$ son raíces de la ecuación $F(x,y,p) = 0$. Asimismo, las hojas del web $\mathcal{W}$ son los gérmenes de los conjuntos de nivel definidos por las funciones $F_i(x,y)$ verificando $X_i(F_i) = 0$.

**Observación 1.** Si un $k-$web $\mathcal{W}(k)$ viene definido por los niveles de funciones de la forma $F_i : (\mathbb{C}^2, (x_0, y_0)) \longrightarrow \mathbb{C}$ y definimos por $p_i = -\frac{\partial_x F_i}{\partial_y F_i}$, entonces $\mathcal{W}(k)$ queda definido también por una ecuación diferencial de la forma (1), esto es $\prod_{i=1}^{k}(y' - p_i) = 0$.

**Definición 1.** El espacio de relaciones abelianas del $k-$web $\mathcal{W}(k)$ es el $\mathbb{C}$ espacio vectorial definido por

$$\mathcal{A}(k) = \left\{ (g_1(F_1), \ldots, g_k(F_k)) \in \mathcal{O}^k : g_i \in \mathbb{C}\{t\} \text{ y } \sum_{i=1}^{k} g_i(F_i) dF_i = 0 \right\}.$$

**Teorema 1** (Blaschke 1933). *La dimensión del espacio $\mathcal{A}(k)$, llamado* ***rango*** *del web, es un $\mathcal{O}^*$ invariante del web y además es controlado por $\pi_k = \frac{1}{2}(k-1)(k-2)$, esto es*

$$rk\mathcal{W}(k) = dim_{\mathbb{C}}\mathcal{A}(k) \leq \pi_k.$$

Se dice que un $k-$web es de rango maximal si $rk\mathcal{W}(k) = \pi_k$. Si $\mathcal{W}$ es un $3-$web sobre $(\mathbb{C}^2, 0)$ definido por $1-$formas $\omega_i$ verificando $\sum_{i=1}^{3} \omega_i = 0$, se prueba que existe una forma diferencial $\gamma$ tal que $d\omega_i = \gamma \wedge \omega_i$, para $i = 1, 2, 3$. La $2-$forma $K := d\gamma$ es llamada **curvatura de Blaschke** del web $\mathcal{W}$ Ver [4].
El siguiente resultado, debido a Blaschke y sus colaboradores, caracteriza la estructura de los $3-$webs de rango 1 sobre $(\mathbb{C}^2, 0)$.

**Teorema 2.** *Para un* $3-$*web sobre* $(\mathbb{C}^2, 0)$ *las siguientes propiedades son equivalentes*

*a)* $rk(\mathcal{W}) = 1$.

*b)* $\mathcal{W}$ *es paralelizable.*

*c)* $\mathcal{W}$ *tiene curvatura nula.*

*d)* $\mathcal{W}$ *es analíticamente equivalente al web* $\{dx, dy, d(x+y)\}$.

Existe interés por la clase de **webs lineales**, cuyas hojas son gérmenes de rectas. Los Webs linealizables son aquellos que mediante un cambio de coordenadas puede transformarse a un web lineal. Los **webs algebraicos** son construidos a partir de una curva algebraica de la siguiente manera: Si $C$ es una curva algebraica reducida de grado $k$ en el plano proyectivo $\mathbb{P}^2$, cualquier recta genérica corta a dicha curva en $k$ puntos, por dualidad se obtiene $k-$rectas que constituyen las $k-$hojas del nuevo web y que son las tangentes a la curva dual de $C$. Un web es llamado **algebrizable** si existe un cambio de coordenadas que lo transforma en un web algebraico.

**Teorema 3** (Lie-Darboux-Griffiths). *Un* $k-$*web lineal* $\mathcal{W}(k)$ *que admite una relación abeliana cuyos términos son todos diferentes de cero es algebraico. En particular, un* $k-$*web linealizable con rango maximal es algebrizable.*

Un web de rango maximal no siempre es algebrizable si $k \geq 5$, tales webs son conocidos como webs excepcionales [3].

Por otro lado, sea $S_{\mathcal{W}}$ una superficie en $\mathbb{C}^3$ definida por $F$, esto es

$$S_{\mathcal{W}} = \{(x, y, p) : F(x, y, p) = 0\}.$$

Como $R(0) \neq 0$, la superficie $S_{\mathcal{W}}$ es no singular. Sobre la superficie $S_{\mathcal{W}}$ consideremos los siguientes objetos:

a) El complejo de Rham $(\Omega^*, d)$ de las formas diferenciales sobre $S_{\mathcal{W}}$. Por ejemplo, $\Omega^1_{S_{\mathcal{W}}} = \Omega^1_{\mathbb{C}^3}/(F\Omega^1_{\mathbb{C}^3} + dF \wedge \Omega^1_{\mathbb{C}^3})$ es el conjunto de gérmenes de las $1-$formas diferenciales sobre $S_{\mathcal{W}}$ y los que se encuentran fuera de $U$ se anulan. Estos objetos son pensados como haces que en cada punto hay gérmenes de $1-$formas, donde si $U \subset \mathbb{C}^2$, $\pi_*\Omega^1_{S_{\mathcal{W}}}(U) := \Omega^1_{S_{\mathcal{W}}}(\pi^{-1}(U))$. Igualmente $\Omega^2_{S_{\mathcal{W}}} = \Omega^2_{\mathbb{C}^3}/(dF \wedge \Omega^1_{\mathbb{C}^3} + F\Omega^2_{\mathbb{C}^3})$ es el conjunto de gérmenes de las $2-$formas diferenciales sobre $S_{\mathcal{W}}$.

b) Una $1-$forma $\eta$ definida por $\eta = dy - p\,dx$. Como $\eta \wedge d\eta \neq 0$, $\eta$ no es integrable. Definimos la distribución $\mathcal{D} = \mathrm{Ker}(\eta) \subset T\mathbb{C}^3$. Es claro que $\mathcal{D}$ es un plano tangente en cada punto de $\mathbb{P}TS$. Luego, $\mathcal{D}\big|_{S_{\mathcal{W}}} = \mathcal{D} \cap TS_{\mathcal{W}}$ es un campo de direcciones sobre la superficie $S_{\mathcal{W}}$, de dimensión es 2. Por lo tanto, $\mathcal{D}\big|_{S_{\mathcal{W}}}$ es integrable, y de esta manera existe una foliación $\mathcal{F}$ sobre $S_{\mathcal{W}}$. Asimismo, las hojas de $\mathcal{F}$ son tales que al ser proyectadas por $\pi : (x, y, p) \longmapsto (x, y)$ resultan ser las hojas del web $\mathcal{W}$. Luego,

$$\mathcal{D}\big|_{S_{\mathcal{W}}} = \mathcal{D} \cap TS_{\mathcal{W}} = T\mathcal{F}.$$

**Observación 2.**

1. Si $w \in \Omega^1_{\mathbb{C}^3}$ es un múltiplo de $dy - p\,dx$ entonces $w_i = \sigma_i^* w$ es un múltiplo de $dy - p_i(x, y)\,dx$, que es la $1-$forma que define la foliación $\mathcal{F}_i$.

2. Si $\omega \in \Omega^1_{\mathbb{C}^3}$ es tal que $d\omega = 0$, entonces $d\omega_i = d\sigma_i^*\omega = \sigma_i^* d\omega = 0$.

3. Sea $\omega \in \Omega^1_{S_{\mathcal{W}}}$ la traza de $\omega$ dada por la aplicación lineal traza$_\pi$ : $\pi_*(\Omega^1_S) \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{C}^2}$ definida por

$$\text{traza}_\pi \omega := \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^* \omega = \omega_1 + \cdots \omega_k.$$

Definimos el siguiente conjunto

$$\mathfrak{a}_s := \left\{ \omega \in \pi_*(\Omega^1_S) : dw = 0, \text{ traza}_\pi w = 0, \, \omega \text{ se anula sobre } T\mathcal{F} = \mathcal{D}\big|_{S_{\mathcal{W}}} \right\},$$

es un $\mathbb{C}-$espacio vectorial. El resultado principal de esta sección es el isomorfismo que existe entre los $\mathbb{C}-$espacios vectoriales $\mathfrak{a}_S$ y $\mathcal{A}(k)$. Antes daremos dos resultados previos.

**Lema 4.** Si $r \in \mathcal{O}[p]$ es tal que $\deg(r) \leq k-2$, $w = r \cdot \frac{dy - p\,dx}{F_p} \in \pi_*(\Omega^1_S)$. Es decir, existen polinomios $s, t \in \mathcal{O}[p]$ tales que $\deg_p s \leq k-1, \deg t \leq k-1$ verificando la siguiente relación

$$r(F_x + pF_y) + s \cdot F_p = (r_x + pr_y + s_p - t) \cdot F \tag{2}$$

**Prueba.** Sea $z_0 = (x_0, y_0)$ un punto próximo de $0 \in \mathbb{C}^2$ tal que $R(z_0) \neq 0$. Asimismo, definimos

$$\lambda := \sum_{i=1}^{k} \frac{\rho_i \, \partial_y F_i}{p - p_i}, \quad \mu := \sum_{i=1}^{k} \frac{X_i(p_i) \, \rho_i \, \partial_y F_i}{p - p_i}, \quad \nu := \sum_{i=1}^{k} \frac{X_i(\rho_i) \, \partial_y F_i}{p - p_i},$$

donde $\rho_i := \frac{1}{\partial_y F_i} \text{res}_{p_i} \left( \frac{r}{F} \right) = \frac{1}{\partial_y F_i(x,y)} \frac{r(x,y,p_i)}{F_p(x,y,p_i)}$. Luego,

$$\begin{aligned}
r : &= F \cdot \lambda = F \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{\rho_i \, \partial_y F_i}{p - p_i} = F \cdot p \sum_{i=1}^{k} \frac{\rho_i \, \partial_y F_i}{1 - \frac{p_i}{p}} \\
&= F \cdot p \sum_{i=1}^{k} \partial_y F_i \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{p_i}{p} \right)^j \right] \\
&= F \left[ \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{k} \rho_i \partial_y F_i + \frac{1}{p^2} \sum_{i=1}^{k} \rho_i \, p_i \, \partial_y F_i + \frac{1}{p^3} \sum_{i=1}^{k} \rho_i \, p_i^2 \, \partial_y F_i + \cdots \right] \\
&= (a_0 R_0) \cdot p^{k-1} + (a_0 R_1 + a_1 R_0) \cdot p^{k-2} + \cdots + a_{k-1} R_0,
\end{aligned}$$

donde

$$R_j = \sum_{i=1}^{k} \rho_i\, p_i^j\, \partial_y F_i \in \mathcal{O}, \quad 0 \leq j \leq k-1.$$

Asimismo, como $\deg_p r \leq k-2$, entonces $R_0 = 0$, esto es

$$\sum_{i=1}^{k} \rho_i\, \partial_y F_i = 0. \tag{3}$$

Ahora demostraremos que

$$\partial_x \lambda + p \partial_y \lambda + \partial_p \mu = \nu \tag{4}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\partial_x \lambda &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial_x \rho_i\, \partial_y F_i}{p - p_i} + \sum_{i=1}^{k} \rho_i\, \partial_x \left( \frac{\partial_y F_i}{p - p_i} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial_x \rho_i\, \partial_y F_i}{p - p_i} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\rho_i\, \partial_x (\partial_y F_i)}{p - p_i} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\rho_i \partial_x p_i\, \partial_y F_i}{(p - p_i)^2}
\end{aligned} \tag{5}$$

Además,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\rho_i\, p_i\, \partial_y F_i}{p - p_i} = -\sum_{i=1}^{k} \rho_i\, \partial_y F_i + p \sum_{i=1}^{k} \frac{\rho_i\, \partial_y F_i}{p - p_i} = p\lambda. \tag{6}$$

Asimismo, como $F_i$ son integrales primeras se cumple $X_i(F_i) = 0$, es decir $p_i\, \partial_y F_i = -\partial_x F_i$. Reemplazando este resultado obtenido en la expresión (6) resulta

$$p\lambda = -\sum_{i=1}^{k} \frac{\rho_i\, \partial_x F_i}{p - p_i}.$$

Al derivar esta última expresión respecto a $y$ se obtiene

$$p \partial_y \lambda = \sum_{i=1}^{k} \frac{p_i\, \partial y \rho_i\, \partial_y F_i}{p - p_i} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\rho_i\, \partial_y (\partial_x F_i)}{p - p_i} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\rho_i\, p_i\, \partial_y F_i \cdot \partial_y p_i}{(p - p_i)^2} \tag{7}$$

Procediendo en forma análoga se obtiene $\partial_p \mu$, esto es

$$\partial_p \mu = -\sum_{i=1}^{k} \frac{\rho_i \, \partial_x p_i \cdot \partial_y F_i}{(p - p_i)^2} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\rho_i \, p_i \, \partial_y p_i \cdot \partial_y F_i}{(p - p_i)^2} \tag{8}$$

Luego, sumando (5), (7), (8) resulta la expresión (4).
Por otro lado,

$$s := F \cdot \mu = F \cdot \left( \sum_{i=1}^{k} \frac{X_i(p_i) \, \rho_i \, \partial_y F_i}{p - p_i} \right).$$

Usando el mismo argumento que el caso $r = F \cdot \lambda$ se obtiene

$$s = (a_0 Q_0) \cdot p^{k-1} + (a_0 Q_1 + a_1 Q_0) \cdot p^{k-2} + \cdots + a_{k-1} Q_0,$$

siendo

$$Q_j = \sum_{i=1}^{k} p_i^j \, X_i(p_i) \, \rho_i \, \partial_y F_i \in \mathcal{O}, \quad 1 \leq j \leq k - 1. \tag{9}$$

Igualmente, para el caso, $t := F \cdot \nu = F \cdot \left( \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i(p_i) \, \partial_y F_i}{p - p_i} \right)$ se obtiene

$$t = (a_0 T_0) \cdot p^{k-1} + (a_0 T_1 + a_1 T_0) \cdot p^{k-2} + \cdots + a_{k-1} T_0,$$

donde

$$T_j = \sum_{i=1}^{j} p_i^j \, X_i(\rho_i) \, \partial_y F_i \in \mathcal{O}, \quad 1 \leq j \leq k - 1. \tag{10}$$

Ahora probaremos (2). En efecto, al derivar $r = F \cdot \lambda$ respecto a $x$ y $y$ se obtiene respectivamente

$$r_x = F_x \cdot \lambda + F \cdot \partial_x \lambda, \quad r_y = F_y \cdot \lambda + F \cdot \partial_y \lambda.$$

Al derivar $s = F \cdot \mu$ respecto a $p$ resulta $s_p = \partial_p s = \mu \cdot F_p + F \cdot \partial_p \mu$. Luego,

$$\begin{aligned} r_x + p r_y + s_p &= \lambda(F_x + pF_y) + \mu \cdot F_p + F(\partial_x \lambda + p \partial_y \lambda + \partial_p \mu) \\ &= \lambda(F_x + pF_y) + \mu \cdot F_p + F \cdot \nu \\ &= \lambda(F_x + pF_y) + \mu \cdot F_p + t, \end{aligned}$$

es decir $r_x + pr_y + s_p - t = \lambda(F_x + pF_y) + \mu F_p$. Finalmente, al multiplicar esta expresión por $F$ resulta $(r_x + pr_y + s_p - t) \cdot F = \lambda F(F_x + pF_y) + \mu \cdot FF_p$, esto es

$$U \cdot F = r(F_x + pF_y) + s \cdot F_p, \tag{11}$$

donde $U = r_x + pr_y + s_p - t$.

**Observación 3.**

a) Para todo $r \in \mathcal{O}[p]$, $\deg_p r \leq k - 3$ existe un único polinomio $s \in \mathcal{O}[p]$ con $\deg_p s \leq k - 1$ verificando $X = r(\partial_x + p\partial_y) + s\partial_p \in TS$. Para que el campo vectorial $X$ sea tangente a $\mathcal{F}$ basta exigir que $dF(X) = 0$ sobre $S_{\mathcal{W}}$, que es equivalente a que exista un único polinomio $U \in \mathcal{O}[p], \deg_p U \leq k - 2$ verificando $X(F) = U \cdot F$, es decir

$$X(F) = r(F_x + pF_y) + sF_p = U \cdot F.$$

b) Si $w = r \cdot \frac{dy - p\,dx}{F_p}$, entonces $dw = t \cdot \frac{dx \wedge dy}{F_p}$, donde $r$ y $t$ son polinomios de la forma

$$r = b_3 \cdot p^{k-3} + b_4 \cdot p^{k-4} + \cdots + b_k \in \mathcal{O} \text{ y } t = r_x + pr_y + s_p - U,$$

con $\deg_p t \leq k - 2$, pues

$$\begin{aligned} dw &= d\left(\frac{r}{F_p}\,dy - \frac{rp}{F_p}\,dx\right) \\ &= \partial_x\left(\frac{r}{F_p}\right) dx \wedge dy + \partial_p\left(\frac{r}{F_p}\right) dp \wedge dy - \partial_y\left(\frac{rp}{F_p}\right) dy \wedge dx \\ &\quad - \partial_p\left(\frac{rp}{F_p}\right) dp \wedge dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dw &= \left(-\tfrac{F_y}{F_p}\cdot\partial_p\left(\tfrac{rp}{F_p}\right)-\tfrac{F_x}{F_p}\cdot\partial_p\left(\tfrac{r}{F_p}\right)+\partial_x\left(\tfrac{r}{F_p}\right)+\partial_y\left(\tfrac{rp}{F_p}\right)\right)dx\wedge dy\\ &= \left(r_x+\partial_y(rp)-\tfrac{1}{F_p}\partial_p(U\cdot F-sF_p)+\tfrac{F_{pp}}{(F_p)^2}(U\cdot F-sF_p)\right)\tfrac{dx\wedge dy}{F_p}\\ &= \left(r_x+\partial_y(rp)-\partial_p\left(\tfrac{1}{F_p}(U\cdot F-s\cdot F_p)\right)\right)\tfrac{dx\wedge dy}{F_p}\\ &= \left(r_x+\partial_y(rp)-\partial_p(\tfrac{U\cdot F}{F_p}-s)\right)\tfrac{dx\wedge dy}{F_p}\\ &= (r_x+\partial_y(rp)+s_p-U)\tfrac{dx\wedge dy}{F_p}\\ &= t\cdot\tfrac{dx\wedge dy}{F_p}, \end{aligned}$$

donde $t = r_x + pr_y + s_p - U$. Por lo tanto, de esto resulta claro que si $\omega$ es una forma cerrada entonces $t = 0$.

Por otro lado, se verifica que

$$\frac{dx\wedge dy}{F_p} = \frac{dy\wedge dp}{F_x} = \frac{dp\wedge dx}{F_y}.$$

**Lema 5.** Suponga que $R(0,0)\neq 0$ y sea $\mathcal{W}$ un $k-$web no singular de $(\mathbb{C}^2,0)$ definido por la ecuación diferencial $F(x,y,y')=0$. Toda relación abeliana no trivial $(g_i(F_i))_i$ del web $\mathcal{W}$ determina una sección local $w = r\cdot\frac{dy-p\,dx}{F_p}$ de $\pi_*(\Omega^1_S)$ verificando las siguientes condiciones

(i) $w$ es una forma cerrada y $\deg_p r\leq k-3$, donde $r\in\mathcal{O}[p]$ verifica la siguiente propiedad

$$r(F_x+pF_y)+sF_p = (r_x+pr_y+s_p)\cdot F, \tag{12}$$

donde $s\in\mathcal{O}[p]$, $\deg_p s\leq k-1$.

(ii) $\text{traza}_\pi w = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} g_i(F_i)\,dF_i = 0.$

**Prueba.**

i) Para que la primera parte del lema se cumpla, basta intercambiar $\rho_i$ por $g_i(F_i)$ en la demostración del lema 4, es decir

$$\lambda := \sum_{i=1}^{k} \frac{g_i(F_i)\partial_y F_i}{p - p_i}, \ \mu := \sum_{i=1}^{k} \frac{X_i(p_i)\, g_i(F_i)\, \partial_y F_i}{p - p_i},$$
$$\nu := \sum_{i=1}^{k} \frac{X_i(g_i(F_i))\partial_y F_i}{p - p_i}$$

y procediendo en forma similar como en el caso anterior se prueba que

$$\partial_x \lambda + p\, \partial_y \lambda + \partial_p \mu = \nu.$$

Por otro, lado se sabe que $X_i(F_i) = 0$, entonces

$$\begin{aligned} X_i(g_i(F_i)) &= \partial_x g_i(F_i) + p_i\, \partial_y g_i(F_i) = g_i'(F_i)\partial_x F_i + p_i\, g_i'(F_i)\partial_y F_i \\ &= g_i'(F_i) X(F_i) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\nu = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{X_i(g_i(F_i))\, \partial_y F_i}{p - p_i} = 0$, de esta manera $t = F \cdot \nu = 0$. Luego, $dw = t \cdot \frac{dx \wedge dy}{F_p} = 0$, es decir $w$ es cerrada. Teniendo en cuenta esto en la relación (2) se obtiene (12).
Por otro lado, se sabe

$$r = F \cdot \lambda = (a_0 R_0) \cdot p^{k-1} + (a_1 R_1 + a_1 R_0) \cdot p^{k-2} + \ldots + a_{k-1} R_0,$$

donde

$$R_j = \sum_{i=1}^{k} p_i^j\, g_i(F_i)\, \partial_y F_i \quad \text{en } \mathcal{O}, \quad 1 \leq j \leq k-1.$$

Como $(g_i(F_i))_i$ es una relación abeliana se tiene $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} g_i(F_i)\, dF_i = 0$.
Por lo tanto,

$$R_0 = \sum_{i=1}^{k} g_i(F_i)\, \partial_y F_i = 0 = R_1 = \sum_{i=1}^{k} p_i\, g_i(F_i)\, \partial_y F_i,$$

entonces $\deg_p r \leq k - 3$.

ii)

$$\begin{aligned}
\text{traza}_\pi w &:= \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^* w = \sum_{i=1}^{k} F(x,y,p_i) \cdot \frac{dy - p_i(x,y)dy}{F_p(x,y,p_i)} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \rho_i\, \partial_y F_i(x,y)(dy - p_i\, dx) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \rho_i(\partial_y F_i(x,y)\, dy + \partial_x F_i(x,y)\, dx) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i\, dF_i.
\end{aligned}$$

Luego, $\rho_i\, dF_i = \sigma_i^* w$, entonces $d\rho_i \wedge dF_i = 0$, esto significa que $\rho_i = g_i(F_i)$, para $g_i \in \mathbb{C}\{z\}$. Por lo tanto,

$$\text{traza}_\pi w = \sum_{i=1}^{k} g_i(F_i)\, dF_i = 0.$$

**Observación 4.** $\mathfrak{a}_S$ puede ser reescrito de la siguiente manera,

$$\mathfrak{a}_S = \left\{ w = r \cdot \frac{dy - pdx}{F_p} \; : \; r \in \mathcal{O}[p],\ \deg_p r \leq k-3,\ dw = 0 \right\}.$$

**Teorema 6** (Hénaut, 2000). $\mathfrak{a}_S$ *y* $\mathcal{A}(k)$ *son espacios vectoriales isomorfos.*

**Prueba.** Definimos la aplicación $\tau : \mathcal{A}(k) \longrightarrow \mathfrak{a}_S$ por

$$\tau((g_i(F_i))_i) = F \cdot \left( \sum_{i=1}^{k} \frac{g_i(F_i)\partial_y F_i}{p - p_i} \right) \frac{dy - p\, dx}{F_p},$$

donde $p_i$ son las raíces de la ecuación $F(x,y,p) = 0$.
Por otro lado, por definición se sabe que

$$r = F \cdot \lambda = (a_0 R_0) \cdot p^{k-1} + (a_0 R_1 + a_1 R_0) \cdot p^{k-2} + \cdots + a_{k-1} \cdot R_0,$$

donde $R_j = \sum_{i=1}^{k} p_i^j\, g_i(F_i)\, \partial_y F_i$, $1 \leq j \leq k-1$. Entonces si suponemos que $\tau(g_i(F_i)) = 0$, entonces $r = 0$ es decir $R_0 = 0$, $R_1 = 0$, $\cdots, R_{k-1} = 0$.

Luego, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} g_1(F_1)\partial_y F_1 & + & \ldots & + & g_k(F_k)\partial_y F_k & = & 0 \\ p_1 g_1(F_1) & + & \ldots & + & p_k g_k(F_k)\partial_y F_k & = & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ p_1^{k-1} g_1(F_1)\partial_y F_1 & + & \ldots & + & p_k^{k-1} g_k(F_k)\partial_y F_k & = & 0 \end{cases}$$

Como el determinante de la matriz de coeficientes es un determinante de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_1^{k-1} & p_2^{k-1} & \cdots & p_k^{k-1} \end{vmatrix}$$

y además los $p_i$ son diferentes de cero, se obtiene la solución trivial, esto es $g_i(F_i) = 0$ para todo $1 \leq i \leq k$. Por lo tanto, $\tau$ es inyectiva.
Es claro que $\tau$ es una aplicación lineal, cuya inversa es dada por la aplicación $\sigma : \mathfrak{a}_S \longrightarrow \mathcal{A}(k)$ definida por

$$\sigma(w) := (\sigma_i^* w, \ldots, \sigma_k^* w).$$

Si $w \in \mathfrak{a}_S$, $\sum_{i=1}^{k} \sigma_i^* w = \text{traza}_\pi w = \sum_{i=1}^{k} g_i(F_i) = 0$. Y como $d\sigma_i^* w = 0$ se concluye que $(\sigma_1^* w, \ldots, \sigma_k^* w)$ pertenece a $\mathcal{A}(k)$.
Por otro lado,

$$(\sigma \circ \tau)(g_1(F_1), \ldots, g_k(F_k)) = \left(\sigma_1^*(r \cdot \frac{dy - p\,dx}{F_p}), \ldots, \sigma_k^*(r \cdot \frac{dy - p\,dx}{F_p})\right)$$
$$= \left(r(x, y, p_1) \cdot \frac{dy - p_1\,dx}{F_p(x,y,p_1)}, \ldots, r(x, y, p_k) \cdot \frac{dy - p_k\,dx}{F_p(x,y,p_k)}\right)$$
$$= (g_1(F_1)dF_1, \ldots, g_k(F_k)dF_k).$$

□

# 2. Webs Lineales

Sea $\mathcal{W}$ un $k$−web en el plano cuyas pendientes de sus hojas son denotadas por $p_i \in \mathcal{O}$, para $1 \leq i \leq k$. Existe un único polinomio $L_{\mathcal{W}}(x,y,p) = \ell_1 \cdot p^{k-1} + \ell_2 \cdot p^{k-2} + \cdots + \ell_k$ con coeficientes en $\mathcal{O}$ verificando la siguiente igualdad

$$L_{\mathcal{W}}(x,y,p_i(x,y)) = X_i(p_i).$$

En efecto, en la demostración del lema (4) se han encontrado fórmulas explícitas para $s, t, U$ en función de $r$ y $F$,

$$\frac{r}{F} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\rho_i(x,y)}{p-p_i} \partial_y F_i(x,y), \; \frac{s}{F} = \sum_{i=1}^{k} \frac{X_i(p_i)\rho_i\, \partial_y F_i}{p-p_i}, \; \frac{t}{F} = \sum_{i=1}^{k} \frac{X_i(\rho_i)\, \partial_y F_i}{p-p_i},$$

donde $\rho_i \partial_y F_i = \mathrm{res}_{p_i} \frac{r}{F} = \frac{r(p_i)}{F_p(p_i)}$. Identificamos $s$ cuando $r = 1$. En este caso, $s$ se denota por $L_{\mathcal{W}}$ y es llamado **polinomio de linealización** de $\mathcal{W}$. Luego,

$$\frac{L_{\mathcal{W}}}{F} = \sum_{i=1}^{k} \frac{X_i(p_i)\, \rho_i\, \partial_y F_i}{p-p_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{X_i(p_i)}{p-p_i} \frac{r(p_i')}{F_p(p_i')}$$

$$L_{\mathcal{W}}(p) = \sum_{i=1}^{k} \frac{X_i(p_i)}{p-p_i} \frac{F(x,y,p)}{F_p(p_i)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{X_i(p_i)}{p-p_i} \frac{a_k \prod_{j=1}^{k}(p-p_j)}{a_k \prod_{j=1}^{k}(p_i-p_j)}$$

$$L_{\mathcal{W}}(p) = \sum_{i=1}^{k} X_i(p_i) \prod_{j=1}^{k} \left( \frac{p-p_j}{p_i-p_j} \right).$$

Luego, $L_{\mathcal{W}}(p_i) = X_i(p_i)$. Por lo tanto, las hojas de $\mathcal{W}$ son rectas si y solo si los $p_i$ son constantes a lo largo de las hojas de $X_i$ para todo $i$, si y solo si $X_i(p_i) = 0$ si y solo si $L_{\mathcal{W}} \equiv 0$.

En cualquier caso, las parametrizaciones locales de las hojas de $\mathcal{W}$ definidas por $x \longmapsto (x, y(x))$ satisfacen la ecuación diferencial de segundo orden $y''(x) = L_{\mathcal{W}}\ (x, y(x), y'(x))$, pues $y'(x) = p_i(x, y(x))$, entonces

$$y''(x) = \partial_x p_i(x, y(x)) + \partial_y p_i(x, y(x)) \cdot \frac{dy}{dx} = X_i(p_i).$$

**Teorema 7** (Hénaut, 1993).

Para $k \geq 4$ sea $\mathcal{W}$ un $k-$web de $(\mathbb{C}^2, 0)$ cuyos campos asociados son de la forma $X_i = \partial_x + p_i \partial_y$ para $1 \leq i \leq k$, entonces el polinomio

$$L_{\mathcal{W}} = \ell_1 \cdot p^{k-1} + \ell_2 \cdot p^{k-2} + \cdots + \ell_k \in \mathcal{O}[p]$$

asociado a $\mathcal{W}$ verifica las siguientes propiedades

a) $\mathcal{W}$ es linealizable si y solo si $X_i(p_i) = 0$ para todo $1 \leq i \leq k$ si y solo si $L_{\mathcal{W}} \equiv 0$.

b) Para todo $z$ próximo de $0 \in \mathbb{C}^2$, las $k-$hojas de $\mathcal{W}$ que pasan por $z$ son las gráficas de $(\mathbb{C}^2, 0)$ de elementos $y_i \in \mathbb{C}\{x\}$ que verifican la ecuación diferencial de segundo orden $y''(x) = L_{\mathcal{W}}(x, y, y')$.

c) $\mathcal{W}$ es linealizable si y solo si $\deg_p L_{\mathcal{W}} \leq 3$ y los coeficientes $\ell_k, \ell_{k-1}, \ell_{k-2}, \ell_{k-3}$ verifican el siguiente sistema diferencial no lineal $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, donde

$$\begin{aligned} L_1 = & -\partial_x(\partial_x \ell_{k-2}) - 2\partial_y(\ell_{k-1}) - \ell_{k-1}(\partial_x \ell_{k-2} - 2\partial_y \ell_{k-3}) - \\ & - 3\partial_y^2(\ell_k) - 3\partial_y(\ell_{k-2}\ell_k) + 3\partial_x(\ell_k \ell_{k-3}) + 3\ell_k \partial_x(\ell_{k-3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2 = & \ \partial_y(2\partial_x \ell_{k-2}) - \partial_y(\ell_{k-1}) - \ell_{k-2}(2\partial_x(\ell_{k-2}) - \partial_y(\ell_{k-1})) - \\ & - 3\partial_x^2 \ell_{k-3} + 3\partial_x(\ell_{k-1}\ell_{k-3}) - 3\partial_y(\ell_k \ell_{k-3}) - 3\ell_{k-3}\partial_y(\ell_k). \end{aligned}$$

Al considerar las siguientes funciones en la relación (12)

$$\begin{aligned} F(x,y,p) &= a_0(x,y)\cdot p^k + a_1(x,y)\cdot p^{k-1} + \cdots + a_k(x,y),\\ L_{\mathcal{W}}(x,y,p) &= \ell_1(x,y)\cdot p^{k-1} + \ell_2(x,y)\cdot p^{k-2} + \cdots + \ell_k(x,y),\\ U(x,y,p) &= u_2(x,y)\cdot p^{k-2} + u_3(x,y)\cdot p^{k-3} + \cdots + u_k(x,y), \end{aligned}$$

cuando $r = 1$ se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$A\cdot \begin{bmatrix} u_2\\ u_3\\ \vdots\\ u_{k-1}\\ u_k\\ \ell_1\\ \ell_2\\ \vdots\\ \ell_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ \partial_y(a_0)\\ \partial_x(a_0)+\partial_y(a_1)\\ \partial_x(a_1)+\partial_y(a_2)\\ \partial_x(a_2)+\partial_y(a_3)\\ \vdots\\ \partial_x a_k \end{bmatrix},$$

donde el determinante de la matriz $A$ es la resultante $R$ de $F$ y $F_p$. Como la resultante es no nula, es posible resolver este sistema de ecuaciones, en particular obtener los coeficientes de $L_{\mathcal{W}}$.

Por otro lado, sea $\mathcal{W}$ un $k-$web que admite un automorfismo infinitesimal $Z$ y $L_{\mathcal{W}}$ su polinomio de linealización. Formamos el $(k+1)-$web $\mathcal{W}\boxtimes\mathcal{F}_Z$ y deseamos identificar cuál es el polinomio de linealización asociado a este nuevo web. En efecto, si $L_{\mathcal{W}}$ es el polinomio de linealización de $\mathcal{W}$, entonces $\widetilde{L} = L_{\mathcal{W}} + \lambda F$ es el polinomio de linealización de $\mathcal{W}\boxtimes\mathcal{F}_X$. Asimismo,

$$Y(x,y,p) = \partial_x + p\partial_y + (L+\lambda F)\partial_p$$

es un campo definido sobre $\widetilde{S} : F\cdot(p - q(x,y)) = 0,$ tal que $Y\Big|_{F=0}$ en $TF = 0$.

Para que el campo $Y \in T\{p = q(x,y)\}$ debe cumplirse que $-\partial_x q - q\partial_y q + L_{\mathcal{W}}(q) + \lambda F(q) = 0$, esto es

$$\lambda = \frac{\partial_x q + q \cdot \partial_y q - L_{\mathcal{W}}(q)}{F(q)}. \tag{13}$$

De esta manera hemos probado la siguiente proposición.

**Proposicion 8.** El polinomio de linealización del web $\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_Z$ es

$$L_{\mathcal{W}} + F \cdot \left( \frac{\partial_x q + q \cdot \partial_y q - L_{\mathcal{W}}(q)}{F(q)} \right) \tag{14}$$

**Corolario 9.** *Sean $\mathcal{W}$ un $k-$web linealizable con $k \geq 4$, y $Z$ un campo transversal a $\mathcal{W}$. Entonces $\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_Z$ es linealizable si y solo si $L_{\mathcal{W}}(q) = \partial_x q + q \cdot \partial_y q$.*

**Prueba.** Como el polinomio de linealización de $\widetilde{\mathcal{W}} = \mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_Z$ es

$$\widetilde{L} = L_{\mathcal{W}} + \lambda F, \quad \text{donde } \lambda = \frac{\partial_x q + q \cdot \partial_y q - L_{\mathcal{W}}(q)}{F(q)}.$$

Del teorema de Hénaut resulta que $\widetilde{\mathcal{W}}$ es linealizable si y solo si $\deg(\widetilde{L}) \leq 3$ y los coeficientes de $\widetilde{L}$ verifican ciertas relaciones diferenciales. Como $\deg(F) \geq 4$, la única posibilidad para que ello suceda es que $\lambda = 0$, y en ese caso $\widetilde{L} = L_{\mathcal{W}}$ cuyos coeficientes ya verifican las relaciones anteriores por hipótesis.

# 3. Curvatura de Webs en el Plano

Anteriormente se ha visto que la curvatura de Blaschke de un $3-$web se construye a partir de $1-$formas (normalizadas) que definen a cada una de las foliaciones que conforman el web. Ripoll extiende este resultado para el caso cuando el web es definido por una ecuación diferencial de la forma $F(x, y, y') = 0$. Ver [6].

Sean

$$\begin{aligned}
F(x,y,p) &= a_0(x,y)\cdot p^k + a_1(x,y)\cdot p^{k-1} + \cdots + a_k(x,y),\\
r(x,y,p) &= b_3(x,y)\cdot p^{k-3} + b_4(x,y)\cdot p^{k-4} + \cdots + b_k(x,y),\\
s(x,y,p) &= c_1(x,y)\cdot p^{k-1} + c_2(x,y)\cdot p^{k-2} + \cdots + c_k(x,y),\\
t(x,y,p) &= t_2(x,y)\cdot p^{k-2} + t_3(x,y)\cdot p^{k-3} + \cdots + t_k(x,y),
\end{aligned}$$

Estamos interesados en estudiar el espacio de relaciones abelianas de un web. Por el teorema (6) esto se reduce a estudiar el espacio $\mathfrak{a}_S$, es decir estudiar los coeficientes de $r$, donde $r$ es tal que $\omega = r\cdot \frac{dy-pdx}{F_p} \in \mathfrak{a}_S$. La expresión en (2) establece una relación entre los coeficientes de $F, r, s$ y $t$. Por ejemplo, cuando $k=3$, la relación (2) corresponde al siguiente sistema matricial

$$\begin{pmatrix} 0 & a_0 & -a_0 & 0 & 0\\ a_0 & a_1 & 0 & -2a_0 & 0\\ a_1 & a_2 & a_2 & -a_1 & -3a_0\\ a_2 & a_3 & 2a_3 & 0 & -2a_1\\ a_3 & 0 & 0 & a_3 & -a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_x(b_3)\\ \partial_y(b_3)\\ c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix} = b_3\begin{pmatrix} \partial_y(a_0)\\ \partial_x(a_0)+\partial_y(a_1)\\ \partial_x(a_1)+\partial_y(a_2)\\ \partial_x(a_2)+\partial_y(a_3)\\ \partial_x(a_3)\end{pmatrix}$$

En esta relación ya se ha tenido en cuenta que $\omega$ es cerrada, y por tanto los coeficientes de $t$ son todos nulos. Asimismo, el determinante de la matriz orden $5\times 5$ coincide con la $p-$resultante $R$ de $F$. Luego, teniendo en cuenta que $R(0)\neq 0$, por la regla de Cramer el sistema anterior es equivalente al siguiente sistema homogéneo

$$\left\{\begin{array}{lcl} \partial_x(b_3) + A_{1,1}b_3 &=& 0\\ \partial_y(b_3)+A_{2,1}b_3 &=& 0 \end{array}\right. ,$$

donde los $A_{i,j}\in \mathcal{O}[R^{-1}]$. De manera similar, cuando $k=4$, la relación

(2) se reduce al siguiente sistema matricial

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_0 & -a_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & 0 & -2a_0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_2 & -a_1 & -3a_0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 2a_3 & 0 & -2a_1 & -4a_0 \\ a_2 & a_3 & a_4 & 3a_4 & a_3 & -a_2 & -3a_1 \\ a_3 & a_4 & 0 & 0 & 2a_4 & 0 & -2a_2 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 & -a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x(b_4) \\ \partial_x(b_3)+\partial_y(b_4) \\ \partial_y(b_3) \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$$

$$= b_3 \begin{pmatrix} \partial_y(a_0) \\ \partial_x(a_0)+\partial_y(a_1) \\ \partial_x(a_1)+\partial_y(a_2) \\ \partial_x(a_2)+\partial_y(a_3) \\ \partial_x(a_3)+\partial_y(a_4) \\ \partial_x(a_4) \\ 0 \end{pmatrix} + b_4 \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_y(a_0) \\ \partial_x(a_0)+\partial_y(a_1) \\ \partial_x(a_1)+\partial_y(a_2) \\ \partial_x(a_2)+\partial_y(a_3) \\ \partial_x(a_3)+\partial_y(a_4) \\ \partial_x(a_4) \end{pmatrix}$$

Dicho sistema es equivalente al siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \partial_x(b_4) & +A_{1,1}b_3 + A_{1,2}b_4 & = & 0 \\ \partial_x(b_3)+\partial_y(b_4) & +A_{2,1}b_3 + A_{2,2}b_4 & = & 0 \\ \partial_y(b_3) & +A_{3,1}b_3 + A_{3,2}b_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Procediendo en forma análoga el proceso descrito anteriormente se generaliza para $k \geq 3$ arbitrario, obteniéndose el siguiente sistema matricial

$$\mathcal{M}: \left\{ \begin{array}{cccccccc} \partial_x b_k & + & A_{1,1}b_3 & + & \dots & + & A_{1,k-2}b_k & = & 0 \\ \partial_x b_{k-1} + \partial_y b_k & + & A_{2,1}b_3 & + & \dots & + & A_{2,k-2}b_k & = & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ \partial_x b_3 + \partial_y b_4 & + & A_{k-2,1}b_3 & + & \dots & + & A_{k-2,k-2}b_k & = & 0 \\ \partial_y b_3 & + & A_{k-1,1}b_3 & + & \dots & + & A_{k-1,k-2}b_k & = & 0 \end{array} \right.$$

donde $A_{i,j} \in \mathcal{O}[R^{-1}]$.

Luego, se tiene las siguientes identificaciones $\mathcal{A}(k) \equiv \mathfrak{a}_S \equiv \mathrm{Sol}(\mathcal{M})$, es decir, el espacio de relaciones abelianas de un web se identifica con las soluciones del sistema diferencial $\mathcal{M}$.

La diferencial exterior sobre $S_{\mathcal{W}}$ induce un operado diferencial linear

$$\begin{array}{cccc} \rho: & \mathcal{O}^{k-2} & \longrightarrow & \mathcal{O}^{k-1} \\ & (b_3,\dots,b_k) & \longmapsto & (t_2,\dots,t_k) \end{array},$$

donde los $t_i$ son los coeficientes de $t$. El estudio del sistema $\mathcal{M}$ conduce a considerar el espacio de jets $J_k(\mathcal{O}^{k-2})$ de orden $k$ sobre $\mathcal{O}^{k-2}$ y obtener la aplicación de derivación $j_k : \mathcal{O}^{k-2} \longrightarrow J_k(\mathcal{O}^{k-2})$. De este operador se obtienen $\mathcal{O}-$morfismos $p_0 : J_1(\mathcal{O}^{k-2}) \longrightarrow \mathcal{O}^{k-1}$ y sus sucesivas prolongaciones $p_k$. Si denotamos por $R_k$ el núcleo de $p_k$, el complejo de Spencer asociado con las prolongaciones $p_k$ es dado por

$$0 \to \mathrm{Sol}(\mathcal{M}) \xrightarrow{j_{k+1}} R_k \xrightarrow{D} \Omega^1 \otimes_{\mathcal{O}} R_{k-1} \xrightarrow{D} \Omega^2 \otimes_{\mathcal{O}} R_{k-2} \to 0$$

Se demuestra que existe para cualquier $k \geq 3$ un fibrado vectorial $E := R_{k-3}$ de rango $\pi_k$ sobre $(\mathbb{C}^2, 0)$ incluido en el fibrado de jets $J_{k-2}(\mathcal{O}^{k-2})$ y una conexión $\nabla : E \longrightarrow \Omega^1 \otimes_{\mathcal{O}} E$, no necesariamente integrable, cuyas secciones horizontales, se identifican con $\mathfrak{a}_S$. Asimismo, existe una base adaptada $(\mathbf{e}_\ell)$ de $(E, \nabla)$ tal que su curvatura toma la siguiente forma matricial

$$\begin{pmatrix} k_1 & \cdots & k_\ell & \cdots & k_{\pi_k} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} dx \wedge dy$$

Particularmente, el rango del sistema local $\mathrm{Sol}(\mathcal{M})$ es maximal e igual a $\pi_k$ si y solo si la conexión $(E, \nabla)$ es integrable, es decir si $K = 0$. [6]. Como consecuencia del teorema de Cauchy-Kovalevski, se obtiene una forma de encontrar webs de rango maximal a partir de los coeficientes de $F$.

**Teorema 10.** *Las siguientes propiedades son equivalentes*

1) *La conexión $(E, \nabla)$ es integrable, esto es $k_\ell = 0$ para $1 \leq \ell \leq \pi_k$.*

2) *El $k-$web $\mathcal{W}$ asociado a la ecuación diferencial $F(x, y, y') = 0$ es de rango maximal.*

**Ejemplo 1.** Para $k = 3$, la matriz asociada al sistema $\mathcal{M}$ es de la forma $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} \\ A_{2,1} \end{pmatrix}$. La matriz $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -A_{1,1} & -A_{2,1} \end{pmatrix}$ es una base adaptada de $E = R_0$. En esta base la conexión $\nabla$ asociada al web $\mathcal{W}$ toma la forma matricial $\gamma = (A_{1,1}dx + A_{2,1}dy)$, y la matriz de curvatura es

$$d\gamma + \gamma \wedge \gamma = (\partial_x(A_{2,1}) - \partial_y(A_{1,1}))dx \wedge dy,$$

que es exactamente la curvatura de Blaschke.

**Ejemplo 2.** Si $\mathcal{W}$ es un $3-$web definido por la ecuación diferencial $F(x, y, y') = 0$, donde $F(x, y, p) = y^3 + xp - 2y$. En este caso, su $p-$resultante de $F$ es $R = x(4x + 27y^2)$ y

$$A_{1,1} = \frac{2(2x^2 - 2x - 9y^2)}{x(4x + 27y^2)}, \qquad A_{2,1} = \frac{3y(1 - 3x)}{x(4x + 27y^2)}.$$

Asimismo, la curvatura de $\mathcal{W}$ es

$$K = (\partial_x(A_{2,1}) - \partial_y(A_{1,1}))dx \wedge dy = \frac{3y(-8x - 27y^2 - 12x^2 + 72x^3)}{x^2(4x + 27y^2)} dx \wedge dy.$$

Es claro que $\mathcal{W}$ no es de rango maximal, y por tanto la conexión asociada no es integrable.

**Ejemplo 3.** Si $\mathcal{W}$ es un $3-$web definido por la ecuación diferencial $F(x, y, y') = 0$, donde $F(x, y, p) = -\frac{5}{12}y^3 + \frac{2}{3}xp + \frac{y}{3}$. En este caso, su $p-$resultante de $F$ es $R = \frac{50}{243}x^3 - \frac{125}{576}y^2$ y

$$A_{1,1} = \frac{-192x^2}{128x^3 - 135y^2}, \qquad A_{2,1} = \frac{135y}{128x^3 - 135y^2)}.$$

Asimismo, la curvatura de $\mathcal{W}$ es

$$K = (\partial_x(A_{2,1}) - \partial_y(A_{1,1}))dx \wedge dy = 0.$$

Luego, $\mathcal{W}$ es de rango maximal. Y la conexión asociada es integrable.

**Ejemplo 4.** Para $k = 4$, la matriz asociada al sistema $\mathcal{M}$ correspondiente es

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \end{pmatrix}$$

Asimismo, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ es una base adaptada del fibrado $E = R_2 = \ker(p_1)$, donde

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & (A_{2,1} + A_{1,2}) & A_{3,1} & -A_{3,2} \\ 0 & 0 & 1 & A_{1,1} & -A_{1,2} & (-A_{2,2} - A_{3,1}) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} -1 & A_{2,1} & A_{3,1} & (-\partial_y(A_{1,1}) + \partial_x(A_{2,1}) - A_{2,1}^2 - A_{1,1}A_{2,2} + A_{1,1}A_{3,1}) & a & b \\ 0 & A_{1,1} & 0 & (-A_{1,1}A_{2,1} - A_{1,1}A_{1,2}) + \partial_x(A_{1,1}) & c & d \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} a &= -A_{2,1}A_{3,1} - A_{1,1}A_{3,2} + \partial_x(A_{3,1}) \\ b &= -A_{3,1}^2 + \partial_y(A_{3,1}) \\ c &= -A_{1,1}A_{3,1} + \partial_y(A_{1,1}) \\ d &= A_{1,1}A_{3,2} + \partial_y(A_{2,1} - \partial_y(A_{2,1})). \end{aligned}$$

$$\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -A_{3,2} & (\partial_y(A_{1,2}) - \partial_x(A_{2,2}) - A_{1,1}A_{3,2} & m & n \\ 1 & -A_{1,2} & -A_{2,2} & (A_{1,2}^2 - \partial_x(A_{1,2}) & r & s \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} m &= A_{1,2}A_{3,2} - \partial_x(A_{3,2}) \\ n &= A_{3,1}A_{3,2} + A_{2,2}A_{3,2} - \partial_y(A_{3,2}) \\ r &= A_{1,1}A_{3,2} + A_{1,2}A_{2,2} - \partial_y(A_{1,2}) \\ s &= A_{2,1}A_{3,2} - A_{1,2}A_{3,2} + A_{2,2}^2 + \partial_x(A_{3,2} - \partial_y(A_{2,2})). \end{aligned}$$

La conexión asociada en esta base es $\gamma = (\gamma_{ij})$, donde

$$\begin{aligned}
\gamma_{11} &= A_{1,2}dx + A_{2,2}dy\\
\gamma_{12} &= (-\partial_y(A_{1,1}) + A_{1,1}A_{3,1} - A_{1,1}A_{2,2})dx - (A_{1,1}A_{3,2} - \partial_x(A_{3,1})+\\
&\quad + \partial_y(A_{2,1}))dy\\
\gamma_{13} &= (-A_{1,1}A_{3,2} - \partial_x(A_{2,2}) + \partial_y(A_{1,2}))dx - (A_{2,1}A_{3,2} - A_{1,2}A_{3,2} +\\
&\quad \partial_x(A_{3,2}))dy\\
\gamma_{21} &= -dx, \qquad \gamma_{22} = A_{2,1}dx + A_{3,1}dy \qquad \gamma_{23} = -A_{3,2}dy\\
\gamma_{31} &= -dy, \qquad \gamma_{32} = -A_{1,1}dx, \qquad \gamma_{33} = A_{1,2}dx + A_{2,2}dy.
\end{aligned}$$

Y la matriz de curvatura toma la forma siguiente

$$d\gamma + \gamma \wedge \gamma = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} dx \wedge dy,$$

donde

$$\begin{aligned}
k_1 &= \partial_x(A_{2,2}) + 2\partial_x(A_{3,1}) - 2\partial_y(A_{1,2}) - \partial_y(A_{2,1})\\
k_2 &= \partial_x(\partial_x(A_{3,1}) - \partial_y(A_{2,1})) - (A_{2,1} - A_{1,2})(\partial_x(A_{3,1}) - \partial_y(A_{2,1})) +\\
&\quad + \partial_y^2 A_{1,1} - \partial_y(A_{1,1}(A_{3,1} - A_{2,2})) - \partial_x(A_{1,1}A_{3,2}) - A_{1,1}\partial_x(A_{3,2})\\
k_3 &= \partial_y\left(\partial_x\left(A_{2,2}\right) - \partial_y\left(A_{1,2}\right)\right) + \left(A_{3,1} - A_{2,2}\right)\left(\partial_x\left(A_{2,2}\right) - \partial_y\left(A_{1,2}\right)\right)+\\
&\quad + A_{3,2}\partial_y(A_{1,1}) - \partial_x(A_{3,2}(A_{2,1} - A_{1,2})) - \partial_x^2(A_{3,2}) + \partial_y(A_{1,1}A_{3,2}).
\end{aligned}$$

La construcción del fibrado vectorial $E$ provisto de la conexión $\nabla$ descrita anteriormente generaliza el método de Blaschke.

**Ejemplo 5.** Sea $\mathcal{W}$ el web definido por la ecuación diferencial $F(x, y, y') = 0$, donde $F(x, y, p) = p^4 + p^3 - yp$. En tal caso, la $p$−resultante de $F$ es $R = -y(27y^3 - 4y^2)$. Asimismo, los coeficientes asociado al sistema diferencial $\mathcal{M}$ correspondiente son

$$A_{1,1} = 0 \qquad A_{1,2} = 0 \qquad A_{2,1} = \frac{-3y^2}{R}$$
$$A_{2,2} = \frac{18y^2 - 2y}{R} \qquad A_{3,1} = \frac{-9y^2}{R} \qquad A_{3,2} = \frac{-2y}{R}$$

En la base adaptada hallada anteriormente, la matriz de curvatura de la conexión es de la forma $K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} dx \wedge dy$, donde

$$k_1 = \frac{6(-2y + 27y)}{R^2}, \quad k_2 = \frac{18(-2 + 27y)}{R}, \quad k_3 = 0.$$

Luego, la conexión $(E, \nabla)$ asociada no es integrable ni de rango máximo.

# Referencias


[1] Griffiths P., and Harris J., "Principles of algebraic geometry," *Pure and Applied Mathematics. Wiley-Intercience.* 1978.

[2] Henaut, A., "On planar web geometry through abelian relations and connections," *Ann. of Maths*, **159** (2004)pp. 425-445.

[3] Marín, D., Pirio L., Pereira J., "On planar webs with infinitesimal automorphisms," *In Inspired by Chern, Nankai Tracts in Mathematics*, **11** (2006)pp. 351-364.

[4] Pereira, V., Pirio L. , *An Invitation to Web Geometry*, Publicacoes Matematicas, IMPA, 2009.

[5] Ripoll O., *Properties of connection associated with planar webs and applications*, arXiv:math.DG/submitted for publication, 2007.

[6] Ripoll, O., *Géométrie des tissus du plan et équations différentielles*, Thése de doctorat Université Bordeaux I, décember 2005.

**Abstract**

Let $\mathcal{W}$ be a non singular planar $k-$web defined by ordinary differential equations of the first order with coefficients in $\mathcal{O} = \mathbb{C}\{x, y\}$, of the form

$$F(x, y, y') = a_0(x, y) \cdot (y')^k + a_1(x, y) \cdot (y')^{k-1} + \cdots + a_k(x, y) = 0,$$

with $k \geq 3$. A problem of interest in webs geometry is to count the number of linearly independent abelian relations called rank of the web and to find the webs of maximal rank. In this work us consider this abelian relations on surface defined by $F$. This leads to the study a differential systems $\mathcal{M}$, whose solutions are abelian relations of the web through the theorem (6). Also, using the theory of Cartan, Ripoll demonstrates the existence of a $C-$vector bundle $E$ of rank $\pi_k$ on $(\mathbb{C}^2, 0)$ provided with a connection $\nabla$ of a such that way that this section of the horizontal vector space is isomorphic to the abelian relations space associated to web, and of an adapted basis of $E$ where the curvature of $(E, \nabla)$ takes the form

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_{\pi_k} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

The Cauchy-Kovalevski theorem offers a way to find maximal rank webs using only the coefficients of $F$.

**Keywords:** Foliations, Webs

Andrés Beltrán
Sección Matemáticas,
Departamento de Ciencias.
Pontificia Universidad Católica del Perú
abeltra@pucp.edu.pe