ISOMORFISMOS ENTRE COHOMOLOGÍAS DE HACES

Nancy Saravia[1,2]

Junio, 2010

Resumen

En este artículo estudiaremos el isomorfismo entre la Cohomología Singular y la Cohomología de deRham usando la Cohomología de Haces sobre espacios paracompactos. Además, relacionaremos la Cohomología de Haces construida mediante resoluciones finas con la Cohomología de Čech vía el Teorema de Leray. Finalmente aplicaremos la Cohomología de haces para calcular la primera clase de Chern de un fibrado asociado a un hiperplano complejo.

Clasificación AMS 2010: 55N05, 55N10, 55N30, 55N40.

Palabras Clave: *Haces, Cohomología de haces*

[1] *Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias, PUCP.*

[2] *Parcialmente financiado por el Proyecto DAI 2009-0052.*

1. Introducción

La motivación de este trabajo está dado por los Problemas de Cousin [ver 6, página 159], bajo la interrogante: ¿Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para resolver estos problemas? Y la respuesta es dada por la trivialidad del primer grupo de Cohomología del Haz de Oka [ver 2 y 3].

Nuestro acercamiento a Cohomología de Haces será primero desarrollando una teoría bastante abstracta no calculable para haces definidos sobre espacios paracompactos, usando resoluciones finas. Nosotros relacionamos esta teoría y la Teoría de Čech, mediante el Teorema de Leray.

Una muestra de lo útil que puede ser la Cohomología de Haces es que ella relaciona la Teoría de Cohomología Singular y la Teoría de Cohomología de deRham mostrando que las tres Cohomologías son isomorfas para espacios paracompactos. La herramienta fundamental para mostrar estos isomorfismos está dada por el siguiente teorema.

Teorema 1.1. *Sea* $0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{F}_0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{d_2} \cdots$ *una resolución del haz* $\mathcal{F}$. *Supongamos que* $H^p(X, \mathcal{F}_j) = 0$ *para* $p > 0$ *y* $j \geq 0$. *Entonces*

$$H^0(X,\mathcal{F}) \cong Ker(d_0^*), \quad H^p(X,\mathcal{F}) \cong \frac{Ker(d_p^*)}{Im(d_{p-1}^*)} \quad ,p > 0.$$

Los resultados a los cuales hemos hecho referencia, son los siguientes:

Teorema 1.2. *Sea X una variedad topológica. El grupo de cohomología de X con coeficientes en el haz constante $\mathbb{Z}$, denotado por $H^p(X,\mathbb{Z})$ es isomorfo al grupo de cohomología singular $H^p_{Sing}(X,\mathbb{Z})$, para $p \geq 0$.*

Teorema 1.3. *Sea X una variedad diferenciable n-dimensional. El grupo de cohomología de X con coeficientes en el haz constante $\mathbb{C}$, denotado por $H^p(X,\mathbb{C})$ es isomorfo al grupo de cohomología de deRham $H^p_{dR}(X,\mathbb{C})$, para $p \geq 0$.*

Haciendo uso de la *Homología Singular* podemos definir el grupo abeliano de p-cocadenas singulares y construir el haz $\mathcal{S}^p(\mathbb{Z})$ asociado al pre-haz $S^p(\mathbb{Z})$ de p-cocadenas singulares. Mostraremos que el complejo de haces

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i^*} \mathcal{S}^0(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta_0^*} \mathcal{S}^1(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta_1^*} \cdots$$

es una resolución canónica, es decir es una secuencia exacta larga y que los haces son finos, cumpliendo así con las hipótesis del Teorema (1.1), y dado que este pre-haz de p-cocadenas no es completo nos veremos obligados a usar otro teorema para mostrar dicho isomorfismo. De manera análoga, para probar el Teorema (1.3) estudiaremos las *Formas Diferenciales*, de manera que podamos definir el espacio vectorial complejo $\Omega^p(U)$ de p-formas diferenciales y construiremos el haz $\mathcal{E}^p$ asociado al pre-haz $\{\Omega^p(U), r_{VU}\}$, de p-formas diferenciales. También se demuestra que el complejo de deRham

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{i^*} \mathcal{E}^0 \xrightarrow{d_0^*} \mathcal{E}^1 \xrightarrow{d_1^*} \mathcal{E}^2 \xrightarrow{d_2^*} \cdots$$

es una resolución canónica y, utilizando así el Teorema (1.1), mostraremos el isomorfismo.

2. Axiomas de Cohomologías de Haces

Definición 2.1. Un pre-haz $F = \{F(U), r_{VU}\}$ para $U, V \subset X$ abiertos sobre X es *completo* si dados $U \subset X$ abierto y un cubrimiento por abiertos $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ de U se tiene:

1. (Existencia) Si $f_i \in F(U_i)$ para todo $i \in I$ tal que $r_{U_{ij}U_i} f_i = r_{U_{ij}U_j} f_j$ para todo $i, j \in I$, entonces existe $f \in F(U)$ tal que $r_{U_iU} f = f_i$ para cada $i \in I$.

2. (Unicidad) Si $f, g \in F(U)$ tal que $r_{U_iU} f = r_{U_iU} g$ para todo $i \in I$, entonces $f = g$.

Sea $\mathcal{F}' = \{\mathcal{F}(U), r_{VU}\}$ el pre-haz de secciones del haz $\mathcal{F}$ asociado al haz $(\mathcal{F}, \pi, X)$. Las condiciones necesarias y suficientes para que $\mathcal{F}' = F$ son dadas en la siguiente proposición elemental.

Proposicion 2.1. *Sea F un pre-haz de anillos sobre X con haz asociado $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}' = \{\mathcal{F}(U), r_{VU}\}$ el pre-haz de secciones sobre el haz $\mathcal{F}$. Si F es un pre-haz completo entonces $\mathcal{F}'$ y F son isomorfos.*

Proposicion 2.2. *Sea X paracompacto y $\{F(U), r_{VU}\}$ un pre-haz sobre X satisfaciendo (2.1-1) y sea $\mathcal{F}$ el haz asociado. Entonces la secuencia*

$$0 \longrightarrow (F(X))_0 \xrightarrow{i} F(X) \xrightarrow{h} \mathcal{F}(X) \longrightarrow 0,$$

es exacta, donde

$$(F(X))_0 = \{f \in F(X) : r_{X,x}(f) = 0, \ \ \textit{para todo} \ \ x \in X\}.$$

Sea $\mathcal{F}$ un haz sobre un espacio topológico X y

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{F}_0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{d_1} \cdots$$

la resolución canónica de $\mathcal{F}$. Asociada a esta resolución tenemos el complejo

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{i^*} \mathcal{F}_0(X) \xrightarrow{d_0^*} \mathcal{F}_1(X) \xrightarrow{d_1^*} \cdots .$$

Definición 2.2. El *p-ésimo grupo de cohomología* de haces sobre X con coeficientes en el haz $\mathcal{F}$ es definido como sigue

$$H^0(X, \mathcal{F}) = Ker(d_0^*) \qquad \text{y} \qquad H^p(X, \mathcal{F}) = \frac{Ker(d_p^*)}{Im(d_{p-1}^*)} \quad \text{si } p > 0,$$

y se denota por $H^p(X, \mathcal{F})$.

Teorema 2.1. *Los grupos de cohomología de haces sobre X satisfacen las siguientes propiedades básicas:*

1) Dado un haz $\mathcal{F}$ sobre X, entonces
A) $H^0(X, \mathcal{F})$ es isomorfo a $\mathcal{F}(X)$.
B) Si $\mathcal{F}$ es fino entonces $H^p(X, \mathcal{F}) = 0$ para $p > 0$.

2) Si $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un morfismo de haces sobre X entonces para $p \geq 0$ son inducidos homomorfismos $\phi^p : H^p(X, \mathcal{F}) \to H^p(X, \mathcal{G})$ los cuales satisfacen:
A) $\phi^0 : H^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(X, \mathcal{G})$ es precisamente la función sobre secciones inducidas por ϕ.
B) Si $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ es la identidad, entonces ϕ^p es la identidad para $p \geq 0$.
C) Si $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ y $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ son morfismos de haces sobre X entonces para $p \geq 0$ tenemos $(\varphi\phi)^p = \varphi^p \phi^p : H^p(X, \mathcal{F}) \to H^p(X, \mathcal{H})$.

3) Si $0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$ es una secuencia exacta corta de haces sobre X entonces para $p \geq 0$ existe un homomorfismo conexión

$$\delta : H^p(X, \mathcal{H}) \to H^{p+1}(X, \mathcal{F}),$$

satisfaciendo:
A) La secuencia cohomológica

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\phi^0} H^0(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\varphi^0} H^0(X, \mathcal{H}) \xrightarrow{\delta} H^1(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\phi^1} \cdots,$$

es exacta larga.
B) Dado un diagrama conmutativo de secuencia exacta corta sobre X

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\eta"'] & \mathcal{G} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\rho"'] & \mathcal{H} \arrow[r] \arrow[d, "\omega"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{A} \arrow[r, "\sigma"] & \mathcal{B} \arrow[r, "\psi"] & \mathcal{C} \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

el correspondiente diagrama de cohomología

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow H^0(X,\mathcal{F}) & \xrightarrow{\phi^0} & H^0(X,\mathcal{G}) & \xrightarrow{\varphi^0} & H^0(X,\mathcal{H}) & \xrightarrow{\delta} & H^1(X,\mathcal{F}) & \xrightarrow{\phi^1} & \cdots \\
\downarrow{\scriptstyle \eta^0} & & \downarrow{\scriptstyle \rho^0} & & \downarrow{\scriptstyle \omega^0} & & \downarrow{\scriptstyle \eta^1} & & \\
0 \longrightarrow H^0(X,\mathcal{A}) & \xrightarrow{\sigma^0} & H^0(X,\mathcal{B}) & \xrightarrow{\psi^0} & H^0(X,\mathcal{C}) & \xrightarrow{\delta} & H^1(X,\mathcal{A}) & \xrightarrow{\sigma^1} & \cdots
\end{array}
$$

conmuta.

Teorema 2.2. *Sea* $0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{F}_0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{d_2} \cdots$ *una resolución del haz* $\mathcal{F}$*. Supongamos que* $H^p(X,\mathcal{F}_j) = 0$, $p > 0$, $j \geq 0$. *Entonces*

$$H^0(X,\mathcal{F}) \approx Ker(d_0^*), \quad H^p(X,\mathcal{F}) \approx \frac{Ker(d_p^*)}{Im(d_{p-1}^*)} \quad parap > 0.$$

Corolario 1. *Podemos calcular la Cohomología de* X *con coeficientes en* $\mathcal{F}$ *usando cualquier resolución fina de* $\mathcal{F}$*. En particular, las propiedades* 1)$-$3) *del Teorema (2.1) determinan los grupos de Cohomología* $H^j(X,\mathcal{F})$ *bajo isomorfismo.*

3. Cohomología Singular

Definición 3.1. Sea $S_p(X,G)$ el grupo abeliano de p-cadenas singulares sobre X con coeficientes en G. El *grupo de p-cocadenas singulares* sobre X es denotado por

$$S^p(X,G) = Hom(S_p(X,G),G),$$

es decir $S^p(X,G)$ consiste de homomorfismos $G-$lineales los cuales asignan a cada $p-$cadena singular en X un elemento de G.

Definición 3.2. Sea $S^p(X,G)$ el grupo de todas las cocadenas singulares sobre X, decimos que

i) Una cocadena $c \in S^p(X,G)$ es un *cociclo* si $\delta^p(c) = 0$, luego $Ker\delta^p = Z^p(X,G)$ es el conjunto de cociclos y por lo tanto es un subgrupo de $S^p(X,G)$.

ii) Un elemento $b \in S^p(X,G)$ es un *coborde* si existe $a \in S^{p-1}(X)$ tal que $\delta^{p-1}(a) = b$, el conjunto de cobordes se denota por $Im(\delta^{p-1}) = B^p(X,G)$.

Como $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$ así $\delta^{p+1} \circ \delta^p = 0$ entonces $B^p(X,G) \subset Z^p(X,G)$ es un subgrupo. El grupo cociente

$$H^p_{Sing}(X,G) = \frac{Z^p(X,G)}{B^p(X,G)},$$

es el p-ésimo *grupo de Cohomología singular* de X con coeficientes en G para $p \geq 0$.
Un tratamiento paralelo para cohomología singular se da en [1 y 7].

3.1. Construcción del haz asociado al pre-haz de p-cocadenas singulares

Sea $S^p(U,\mathbb{Z})$ el grupo abeliano de p-cocadenas singulares con coeficientes enteros, sobre el abierto $U \subset X$. Así $S^p(\mathbb{Z}) = \{S^p(U,\mathbb{Z}), r_{VU}\}$ es el pre-haz de p-cocadenas singulares sobre X con coeficientes enteros. Se prueba que $\{S^p(U,\mathbb{Z}), r_{VU}\}$ satisface (2.1-1) pero no (2.1-2) para $p \geq 1$.

Concluimos que $\{S^p(U,\mathbb{Z}), r_{VU}\}$ para $p \geq 1$ no es completo, pero observamos que el pre-haz $\{S^0(U,\mathbb{Z}), r_{VU}\}$ es completo, desde que cada 0-simplex en U puede ser identificado con un punto de U.
Fijado $x \in X$, definimos una relación de equivalencia sobre los grupos $S^p(\mathbb{Z})$, $x \in U$. Definimos

$$S^p_x(\mathbb{Z}) = \frac{\bigcup\limits_{U \in \mathcal{U}_x} S^p(U,\mathbb{Z})}{\sim_x},$$

conjunto de clases de equivalencia, así $\mathcal{S}^p(\mathbb{Z}) = \bigcup_{x \in X} \mathcal{S}^p_x(\mathbb{Z})$, luego $\mathcal{S}^p(\mathbb{Z})$ es el correspondiente *haz asociado al pre-haz de p-cocadenas singulares*, para $p \geq 0$.

Sabemos que el operador coborde es definido por

$$\begin{array}{rcl} \delta^p : S^p(U,\mathbb{Z}) & \rightarrow & S^{p+1}(U,\mathbb{Z}) \\ f & \mapsto & \delta^p(f)(\alpha) = f(\partial_{p+1}\alpha), \end{array}$$

donde $\alpha = \Sigma_i n_i \sigma_i$ es una $(p+1)$-cadena y σ_i es un $(p+1)$-simplex singular en U.

Desde que δ^p, conmuta con las restricciones, tenemos que $s_{VU} \circ \delta^p = \delta^p \circ r_{VU}$, obtenemos el homomorfismo de pre-haces $\delta^p : S^p(\mathbb{Z}) \rightarrow S^{p+1}(\mathbb{Z})$, y además como $\delta^{p+1} \circ \delta^p = 0$, tenemos que $Im\delta^p \subset Ker\delta^{p+1}$. Luego

$$0 \longrightarrow S^0(U,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta^0} S^1(U,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta^1} S^2(U,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta^2} \cdots,$$

es complejo de cocadenas, el cual lo denotaremos por $S^*(U,\mathbb{Z})$ (donde los grupos de p-cocadenas son cero para $p < 0$).
Y de manera similar como en pre-haces se cumple que $\delta^*_{p+1} \circ \delta^*_p = 0$, de donde obtenemos el complejo de haces

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i^*} \mathcal{S}^0(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta^*_0} \mathcal{S}^1(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta^*_1} \cdots,$$

el cual lo denotaremos por $\mathcal{S}^*(\mathbb{Z})(X)$, donde i es la función inclusión.

Sea $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ un cubrimiento abierto de X, sea $S^*_{\mathcal{U}}(X,\mathbb{Z})$ el complejo de cocadenas consistiendo de grupos $S^p_{\mathcal{U}}(X,\mathbb{Z})$ de p-cocadenas singulares f, con valores en $\mathbb{Z}$, definidos sobre p-símplices singulares $\mathcal{U}$-*pequeño.* Cada elemento de $S^p(X,\mathbb{Z})$ determina un elemento de $S^p_{\mathcal{U}}(X,\mathbb{Z})$. De los homomorfismos de restricción

$$j_{\mathcal{U}} : S^p(X,\mathbb{Z}) \rightarrow S^p_{\mathcal{U}}(X,\mathbb{Z}),$$

tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & S^{p-1}(X,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\delta^{p-1}"] \arrow[d, "j_{\mathcal{U}}"'] & S^p(X,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\delta^p"] \arrow[d, "j_{\mathcal{U}}"'] & S^{p+1}(X,\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "j_{\mathcal{U}}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & S_{\mathcal{U}}^{p-1}(X,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\delta_{\mathcal{U}}^{p-1}"] & S_{\mathcal{U}}^p(X,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\delta_{\mathcal{U}}^p"] & S_{\mathcal{U}}^{p+1}(X,\mathbb{Z}) \arrow[r] & \cdots ,
\end{tikzcd}$$

el cual nos lleva a una función de cocadenas sobreyectiva

$$j_{\mathcal{U}} : S^*(X,\mathbb{Z}) \to S_{\mathcal{U}}^*(X,\mathbb{Z}).$$

Teorema 3.1. *El homomorfismo $j_{\mathcal{U}} : S^*(X,\mathbb{Z}) \to S_{\mathcal{U}}^*(X,\mathbb{Z})$ induce isomorfismos entre los grupos de cohomología.*

Lema 3.1. *Sea X una variedad topológica. El complejo de haces*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i^*} \mathcal{S}^0(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta_0^*} \mathcal{S}^1(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta_1^*} \cdots ,$$

es una resolución canónica, es decir es una secuencia exacta larga y los haces $\mathcal{S}^j(\mathbb{Z})$ para $j \in \mathbb{N}$ son finos.

Teorema 3.2. *Sea X una variedad topológica. El grupo de cohomología de X con coeficientes en el haz constante $\mathbb{Z}$, denotado por $H^p(X,\mathbb{Z})$ es isomorfo al grupo de cohomología singular $H^p_{Sing}(X,\mathbb{Z})$, para $p \geq 0$.*

Demostración. Consideremos el haz constante $\mathbb{Z}$ sobre X, una resolución de $\mathbb{Z}$ es una secuencia exacta larga

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{F}_0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{d_2} \cdots ,$$

y asociada a esta resolución canónica tenemos el complejo

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}(X) \xrightarrow{\varepsilon^*} \mathcal{F}_0(X) \xrightarrow{d_0^*} \mathcal{F}_1(X) \xrightarrow{d_1^*} \mathcal{F}_2(X) \xrightarrow{d_2^*} \cdots .$$

Así podemos definir los grupos de cohomología

$$H^0(X,\mathbb{Z}) = Ker(d_0^*) \quad \text{y} \quad H^p(X,\mathbb{Z}) = \frac{Ker(d_p^*)}{Im(d_{p-1}^*)}, \quad p > 0.$$

Por el Lema (3.1) sabemos que los haces $\mathcal{S}^j(\mathbb{Z})$ son finos para $j \geq 0$, así tenemos una resolución canónica

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i^*} \mathcal{S}^0(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta_0^*} \mathcal{S}^1(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta_1^*} \cdots,$$

en particular se tiene una resolución suave, así $\widetilde{H}^p(X, \mathcal{S}^j(\mathbb{Z})) = 0$ para $p > 0$ y $j \geq 0$. Luego por el Teorema (2.2), tenemos

$$H^0(X,\mathbb{Z}) \cong Ker(\delta_0^*) = \widetilde{H}^0_{Sing}(X,\mathbb{Z}),$$

$$H^p(X,\mathbb{Z}) \cong \frac{Ker(\delta_p^*)}{Im(\delta_{p-1}^*)} = \widetilde{H}^p_{Sing}(X,\mathbb{Z}),$$

donde $\widetilde{H}^0_{Sing}(X,\mathbb{Z}) = Ker(\delta_0^* : \mathcal{S}^0(\mathbb{Z})(X) \to \mathcal{S}^1(\mathbb{Z})(X))$ y

$$\widetilde{H}^p_{Sing}(X,\mathbb{Z}) = \frac{Ker(\delta_p^* : \mathcal{S}^p(\mathbb{Z})(X) \to \mathcal{S}^{p+1}(\mathbb{Z})(X))}{Im(\delta_{p-1}^* : \mathcal{S}^{p-1}(\mathbb{Z})(X) \to \mathcal{S}^p(\mathbb{Z})(X))}.$$

Así hemos obtenido el isomorfismo entre $H^p(X,\mathbb{Z})$ y $\widetilde{H}^p_{Sing}(X,\mathbb{Z})$.
Para completar la prueba de este teorema mostraremos la siguiente afirmación.
Afirmación: *El grupo de cohomología singular $H^p_{Sing}(X,\mathbb{Z})$ es canónicamente isomorfo con el grupo de cohomología singular $\widetilde{H}^p_{Sing}(X,\mathbb{Z})$.*

En efecto, el pre-haz de p-cocadenas singulares $\{S^p(U,\mathbb{Z}), r_{VU}\}$ para $p \geq 1$ satisface (2.1-1) pero no (2.1-2), y el pre-haz $\{S^0(U,\mathbb{Z}), r_{VU}\}$ es completo, desde que cada 0-simplex singular en U puede ser identificado con un punto de U.

Haciendo uso de la Proposición (2.2), se tiene que

$$0 \longrightarrow S_0^*(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow S^*(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathcal{S}^*(\mathbb{Z})(X) \longrightarrow 0, \qquad (1)$$

es una secuencia exacta corta de complejos de cocadenas, donde

$$S_0^*(X,\mathbb{Z}) = \{f \in S^*(X,\mathbb{Z}) : r_{x,X}(f) = 0, \text{ para todo } x \in X\},$$

$S^*(X, \mathbb{Z})$ es el complejo de cocadenas de los grupos de p-cocadenas y $\mathcal{S}^*(\mathbb{Z})(X)$ es el complejo de cocadenas de los grupos de secciones de X en el haz $\mathcal{S}^*(\mathbb{Z})$.

Mostraremos que

$$H^p(S_0^*(X, \mathbb{Z})) = 0 \text{ para todo } p. \tag{2}$$

En efecto, tenemos los siguientes casos
i) Para $p < 0$ se cumple trivialmente dado que los grupos de p-cocadenas son todos ceros y así $H^p(S_0^*(X, \mathbb{Z})) = 0$.
ii) Para $p = 0$, como $\{S^0(X, \mathbb{Z}), r_{VU}\}$ es completo se tiene que $S^0(X, \mathbb{Z}) \approx \mathcal{S}^0(\mathbb{Z})(X)$, así de la secuencia exacta corta

$$0 \longrightarrow S_0^0(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow S^0(X, \mathbb{Z}) \approx \mathcal{S}^0(\mathbb{Z})(X) \longrightarrow 0,$$

tenemos que $S_0^0(X, \mathbb{Z}) = 0$, de donde $H^0(S_0^*(X, \mathbb{Z})) = 0$.
iii) Para $p \geq 1$, dado $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ un cubrimiento abierto de X, por lo hecho anteriormente obtenemos una función de cocadenas sobreyectiva

$$j_{\mathcal{U}} : S^*(X, \mathbb{Z}) \to S_{\mathcal{U}}^*(X, \mathbb{Z}).$$

Los núcleos de los homomorfismos $j_{\mathcal{U}}$ forman un complejo de cocadenas $K_{\mathcal{U}}^*$ tal que

$$0 \longrightarrow K_{\mathcal{U}}^* \longrightarrow S^*(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow S_{\mathcal{U}}^*(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0,$$

es una secuencia exacta corta de complejos de cocadenas y de esta secuencia , obtenemos la siguiente secuencia exacta larga

$$\cdots \to H^p(K_{\mathcal{U}}^*) \to H^p(S^*(X, \mathbb{Z})) \to H^p(S_{\mathcal{U}}^*(X, \mathbb{Z})) \to H^{p+1}(K_{\mathcal{U}}^*) \to \cdots,$$

y por el Teorema (3.1) se tiene $H^p(S^*(X, \mathbb{Z})) \approx H^p(S_{\mathcal{U}}^*(X, \mathbb{Z}))$, así

$$H^p(K_{\mathcal{U}}^*) = 0 \text{ para todo } p. \tag{3}$$

Consideremos f un cociclo en $S_0^p(X, \mathbb{Z})$, es decir, $\delta^p(f) = 0$. Por definición de $S_0^p(X, \mathbb{Z})$ se tiene que $r_{x,X}(f) = 0$ para todo $x \in X$ y $\delta^p(f) = 0$;

así existe un cubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ de X tal que $r_{U_i X}(f) = 0$ en $S^p(U_i, \mathbb{Z})$, es decir $f \in K^p_{\mathcal{U}}$. De (3) existe $g \in K^{p-1}_{\mathcal{U}} \subset S^{p-1}_0(X, \mathbb{Z})$ tal que $\delta^{p-1}(g) = f$, lo cual prueba que $H^p(S^*_0(X, \mathbb{Z})) = 0$. De la secuencia exacta corta (1), tenemos la secuencia exacta larga

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow H^p(S^*(X, \mathbb{Z})) \longrightarrow H^p(\mathcal{S}^*(\mathbb{Z})(X)) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots,$$

de donde obtenemos que $H^p(S^*(X, \mathbb{Z})) \approx H^p(\mathcal{S}^*(\mathbb{Z})(X))$ para todo p. Como $H^p(X, \mathbb{Z})) \approx \widetilde{H}^p_{Sing}(X, \mathbb{Z})$ y haciendo uso de este isomorfismo, se tiene

$$H^p(X, \mathbb{Z})) \approx \widetilde{H}^p_{Sing}(X, \mathbb{Z}) \approx H^p_{Sing}(X, \mathbb{Z}),$$

para todo $p \geq 0$, obteniendo así lo deseado. $\square$

4. Cohomología de deRham

Definición 4.1. Sea $\Omega^p(X)$ el espacio de las p-formas. Definimos
i) Un elemento $c \in \Omega^p(X)$ es una *p-forma cerrada* si $d^p(c) = 0$.
ii) Un elemento $b \in \Omega^p(X)$ es una *p-forma exacta* si existe $a \in \Omega^{p-1}(X)$ tal que $d^{p-1}(a) = b$.

Denotamos por $Ker(\ \Omega^p(X) \xrightarrow{d^p} \Omega^{p+1}(X)\ )$ el espacio de las p-formas cerradas y por $Im(\ \Omega^{p-1}(X) \xrightarrow{d^{p-1}} \Omega^p(X)\ )$ el espacio de las p-formas exactas.

Como $d^{p+1} \circ d^p = 0$ tenemos que $Imd^{p-1} \subset Kerd^p$, así definimos el *p-ésimo grupo de cohomología de deRham* como el espacio vectorial cociente

$$H^p_{DR}(X) = \frac{Ker(\ \Omega^p(X) \xrightarrow{d^p} \Omega^{p+1}(X)\ )}{Im(\ \Omega^{p-1}(X) \xrightarrow{d^{p-1}} \Omega^p(X)\ )}.$$

En particular $H^p_{DR}(X) = 0$ para $p < 0$, $p > n$ (n dimensión de X) y

$$H^0_{DR}(X) = Ker(\ \Omega^0(X) \xrightarrow{d^0} \Omega^1(X)\ )$$

4.1. Construcción del Haz asociado al pre-haz de p-formas diferenciales.

Sea X una variedad diferenciable n-dimensional. A cada subconjunto abierto $U \subset X$ asociamos el espacio vectorial complejo $\Omega^p(U)$ de p-formas diferenciales sobre U. Como $\{\Omega^p(U), r_{VU}\}$ es el pre-haz sobre X. Definimos

$$\mathcal{E}^p_x = \frac{\bigcup\limits_{U \in \mathfrak{U}_x} \Omega^p(U)}{\sim_x},$$

así $\mathcal{E}^p = \bigcup\limits_{x \in X} \mathcal{E}^p_x$, luego $\mathcal{E}^p$ es el haz de gérmenes de p-formas diferenciales complejas sobre X asociado al pre-haz $\{\Omega^p(U), r_{VU}\}$ para $V \subset U$ y $p \geq 0$.

Notemos que el diferencial exterior $d^p_U : \Omega^p(U) \to \Omega^{p+1}(U)$ conmuta con los homomorfismos restricción y así tenemos el homomorfismo de pre-haces para $p \geq 0$. Como $d^{p+1}_U \circ d^p_U = 0$ tenemos que $Imd^p_U \subset Kerd^{p+1}_U$, luego

$$0 \longrightarrow \Omega^0(U) \xrightarrow{d^0_U} \Omega^1(U) \xrightarrow{d^1_U} \Omega^2(U) \xrightarrow{d^2\mathcal{U}} \cdots,$$

es complejo de cadenas el cual lo denotaremos por $\Omega^*(U)$.
Sea $d^*_p : \mathcal{E}^p \to \mathcal{E}^{p+1}$ el homomorfismo de haces inducido por d^p y como se cumple $d^*_{p+1} \circ d^*_p = 0$, se tiene la secuencia

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{i^*} \mathcal{E}^0 \xrightarrow{d^*_0} \mathcal{E}^1 \xrightarrow{d^*_1} \mathcal{E}^2 \xrightarrow{d^*_2} \cdots, \qquad (4)$$

que se denomina el *complejo de deRham* de X.

Lema 4.1. *Sea X una variedad diferencial n-dimensional. El complejo de deRham*

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{i^*} \mathcal{E}^0 \xrightarrow{d^*_0} \mathcal{E}^1 \xrightarrow{d^*_1} \mathcal{E}^2 \xrightarrow{d^*_2} \cdots,$$

es una resolución canónica, es decir es una secuencia exacta larga y los haces son finos.

Teorema 4.1. *Sea X una variedad diferenciable n-dimensional. El grupo de cohomología de X con coeficientes en el haz constante $\mathbb{C}$, denotado por $H^p(X,\mathbb{C})$ es isomorfo al grupo de cohomología de De Rham $H^p_{DR}(X,\mathbb{C})$, para $p \geq 0$.*

Demostración. Por el Lema (4.1) sabemos que los haces $\mathcal{E}^p$ son finos, para $p \geq 0$, así tenemos una resolución canónica para $p \geq 0$

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{i^*} \mathcal{E}^0 \xrightarrow{d_0^*} \mathcal{E}^1 \xrightarrow{d_1^*} \cdots .$$

En particular se tiene una resolución suave, donde $H^p(X,\mathcal{E}^j) = 0$, para $p > 0$ y $j \geq 0$. Luego por Teorema (2.2), tenemos

$$H^0(X,\mathbb{C}) \approx Ker(d_0^*) = \widetilde{H}^0_{DR}(X,\mathbb{C}),$$

$$H^p(X,\mathbb{C}) \approx \frac{Ker(d_0^*)}{Im(d_{p-1}^*)} = \widetilde{H}^p_{DR}(X,\mathbb{C}), \text{ para } p > 0,$$

donde $\widetilde{H}^0_{DR}(X,\mathbb{C}) = Ker(d_0^* : \mathcal{E}^0(X) \to \mathcal{E}^1(X))$ y

$$\widetilde{H}^p_{DR}(X,\mathbb{C}) = \frac{Ker(d_p^* : \mathcal{E}^p(X) \to \mathcal{E}^{p+1}(X))}{Im(d_{p-1}^* : \mathcal{E}^{p-1}(X) \to \mathcal{E}^p(X))}.$$

Hay un homomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \phi_U^p : \Omega^p(U) & \to & \mathcal{E}^p(U), \\ w & \mapsto & \phi_U(w), \end{array}$$

donde

$$\begin{array}{rcl} \phi_U^p(w) : U & \to & \mathcal{E}^p \\ x & \mapsto & r_{U,x}(w). \end{array}$$

Debemos notar que $\Omega^p(U)$ conmuta con las restricciones naturales ($\mathcal{E}^p(U)$ denota el pre-haz de secciones del haz $\mathcal{E}^p$), donde la imagen de un elemento de $\Omega^p(U)$ es la sección sobre U en el haz $\underline{C}^p$. Como d^p y d_p^*

conmutan con ϕ_U^p y ϕ_U^{p+1}, tenemos

$$\begin{array}{ccc} \Omega^p(U) & \xrightarrow{d^p} & \Omega^{p+1}(U) \\ \phi_U^p \downarrow & & \downarrow \phi_U^{p+1} \\ \mathcal{E}^p(U) & \xrightarrow{d_p^*} & \mathcal{E}^{p+1}(U), \end{array}$$

y, en particular, conmuta con ϕ_X^p. Así tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \Omega^p(X) & \xrightarrow{d^p} & \Omega^{p+1}(X) \\ \phi_X^p \downarrow & & \downarrow \phi_X^{p+1} \\ \mathcal{E}^p(X) & \xrightarrow{d_p^*} & \mathcal{E}^{p+1}(X). \end{array}$$

De las secuencias

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{C}(X) & \xrightarrow{i} & \Omega^0(X) & \xrightarrow{d^0} & \cdots & \xrightarrow{d^{p-1}} & \Omega^p(X) & \xrightarrow{d^p} & \cdots \\ & & \downarrow & & \phi_X^0 \downarrow & & & & \phi_X^p \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{C}(X) & \xrightarrow{i^*} & \mathcal{E}^0(X) & \xrightarrow{d_*^0} & \cdots & \xrightarrow{d_*^{p-1}} & \mathcal{E}^p(X) & \xrightarrow{d_*^p} & \cdots, \end{array}$$

obtenemos que ϕ_X^p es un isomorfismo. Por tanto existe $(\phi_X^p)^*$ un isomorfismo inducido entre los grupos de cohomología

$$(\phi_X^p)^* : H_{DR}^p(X, \mathbb{C}) \to \widetilde{H}_{DR}^p(X, \mathbb{C}), \text{ para todo } q \geq 0,$$

donde

$$H_{DR}^p(X, \mathbb{C}) = \frac{Ker(d^p : \Omega^p(X) \to \Omega^{p+1}(X))}{Im(d^{p-1} : \Omega^{p-1}(X) \to \Omega^p(X))} \quad \text{y}$$

$$\widetilde{H}_{DR}^p(X, \mathbb{C}) = \frac{Ker(d_p^* : \mathcal{E}^p(X) \to \mathcal{E}^{p+1}(X))}{Im(d_{p-1}^* : \mathcal{E}^{p-1}(X) \to \mathcal{E}^p(X))}.$$

Por lo mostrado anteriormente $H^p(X,\mathbb{C}) \approx \widetilde{H}^p_{DR}(X,\mathbb{C})$ para todo $p \geq 0$ y haciendo uso de lo obtenido, tenemos el isomorfismo requerido entre $H^p(X,\mathbb{C})$ y $H^p_{DR}(X,\mathbb{C})$. En particular, $H^p(X,\mathbb{C}) = 0$ para $p > n$ (n dimensión de X). □

Tenemos una estrecha relación entre los grupos de Cohomología Singular y Cohomología de deRham.

Teorema 4.2. *Sea X una variedad diferencial n-dimensional. Entonces existe un isomorfismo explícito entre $H^p_{DR}(X,\mathbb{C})$ y $H^p_{Sing\infty}(X,\mathbb{C})$.*

5. El Grupo de Cohomología H$(\mathcal{U},\mathcal{F})$

Desarrollaremos la teoría de Cohomología de Čech para haces sobre espacios paracompactos. Mostraremos que la Teoría de Čech es isomorfa a la teoría de cohomología de haces que ya hemos construido mediante resoluciones, mostrando que satisface las propiedades del Teorema (2.1).

Sea $\mathcal{F}$ un haz sobre un espacio topológico X y $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ un cubrimiento abierto de X. Denotamos $U_s = U_{s_0\ldots s_p} = U_{s_0} \cap \ldots \cap U_{s_p}$, donde $s = (s_0 \ldots s_p) \in I^{p+1}$ y p es un entero no negativo.

Definición 5.1. Una *p-cocadena* de $\mathcal{U}$ con coeficientes en $\mathcal{F}$ es una función c, que asigna a cada $(p+1)$-upla ordenada $s = (s_0 \ldots s_p) \in I^{p+1}$ una sección $c_s \in \mathcal{F}(U_s)$ y además c_s es una función alternante de s.

Usaremos la notación $c_{s_0\ldots s_p}$ para representar una p-cocadena. El conjunto de p-cocadenas de $\mathcal{U}$ con coeficientes en $\mathcal{F}$ es denotado por $C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$.

Definición 5.2. El *operador coborde* $D_p : C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ es definido de la siguiente forma

$$D_p(c_{s_0\ldots s_p})_{s\in I^{p+1}} = (d_{s_0\ldots s_{p+1}})_{s\in I^{p+2}},$$

donde

$$(d_{s_0\ldots s_{p+1}})_{s\in I^{p+2}} = \Sigma_{k=0}^{p+1}(-1)^k r_k(c_{s_0\ldots\widehat{s}_k\ldots s_{p+1}})_{s\in I^{p+1}}, \ \ s\in I^{p+2},$$

$\widehat{s}_k$ simboliza la ausencia del índice k y r_k se refiere a la aplicación de la restricción $r_{U_{s_0\ldots s_{p+1}}\ U_{s_0\ldots\widehat{s}_k\ldots s_{p+1}}}$, es decir

$$r_k(c_{s_0\ldots\widehat{s}_k\ldots s_{p+1}})_{s\in I^{p+1}} = r_{U_{s_0\ldots s_{p+1}}\ U_{s_0\ldots\widehat{s}_k\ldots s_{p+1}}}(c_{s_0\ldots\widehat{s}_k\ldots s_{p+1}})_{s\in I^{p+1}}.$$

Lema 5.1. *La composición* $C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{D_p} C^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{D_{p+1}} C^{p+2}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ *es cero, es decir* $D_{p+1}\circ D_p = 0$.

Definimos

$$Z^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \{c\in C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) : D_p(c) = 0\},$$

como el núcleo del operador coborde $D_p : C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$. Los elementos de $Z^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ son llamados *p-cociclos.* Para $p\geq 1$, definimos $B^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \{c\in C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) : \text{existe } d\in C^{p-1}(\mathcal{U},\mathcal{F}) \text{ tal que } D_{p-1}(d) = c\}$, como la imagen del operador coborde $D_{p-1} : C^{p-1}(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$. Los elementos de $B^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ son llamados *p-cobordes.*
Podemos definir

$$H^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \frac{Z^p(\mathcal{U},\mathcal{F})}{B^p(\mathcal{U},\mathcal{F})},$$

el p-ésimo *Grupo de Cohomología de* $\mathcal{U}$ *con coeficientes en* $\mathcal{F}$.

Observaciones 1.
1) Como los homomorfismos $\phi_p^* : C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^p(\mathcal{U},\mathcal{G})$ inducidos por un homomorfismo de haces $\phi : \mathcal{F}\to\mathcal{G}$ conmutan con los operadores coborde, ellos inducen homomorfismos entre grupos de cohomología

$$\begin{array}{rcl} \phi_{\mathcal{U}}^p : H^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) & \to & H^p(\mathcal{U},\mathcal{G}) \\ [c_{s_0\ldots s_p}] & \mapsto & \phi_{\mathcal{U}}^p([c_{s_0\ldots s_p}]) = [\phi_p^*(c_{s_0\ldots s_p})]. \end{array}$$

2) Como $Z^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \{c\in C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) : D_0(c) = 0\}$ y $B^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = 0$, se tiene $H^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \{[c] : c\in Z^0(\mathcal{U},\mathcal{F})\} = Z^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$.

Lema 5.2. *Para cualquier haz $\mathcal{F}$ sobre X, tenemos*

$$H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \approx \mathcal{F}(X).$$

Lema 5.3. *Sea $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de haces sobre X. Para $p \geq 0$ tenemos funciones inducidas $\phi^p_{\mathcal{U}} : H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^p(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ que satisfacen:*

A) $\phi^0_{\mathcal{U}} : H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^0(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ es precisamente la función sobre secciones inducidas por ϕ.

B) Si $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ es la identidad, entonces $\phi^p_{\mathcal{U}}$ es la identidad para $p \geq 0$.

C) Si $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ y $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ son morfismos de haces sobre X entonces $(\varphi\phi)^p_{\mathcal{U}} = \varphi^p_{\mathcal{U}}\phi^p_{\mathcal{U}} : H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^p(\mathcal{U}, \mathcal{H})$, para $p \geq 0$.

Lema 5.4. *Sea $\mathcal{F}$ un haz fino. Entonces $H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$, para $p > 0$.*

Teorema 5.1. *Sean $\mathcal{F}$ un haz sobre X y $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de X. Para $p \geq 0$, tenemos un homomorfismo canónico $p(\mathcal{U}) : H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^p(X, \mathcal{F})$ que satisface:*

A) Si $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un homomorfismo, entonces

$$\begin{tikzcd}
H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \arrow[r, "p(\mathcal{U})"] \arrow[d, "\phi^p_{\mathcal{U}}"'] & H^p(X, \mathcal{F}) \arrow[d, "\phi^p"] \\
H^p(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \arrow[r, "p(\mathcal{U})"] & H^p(X, \mathcal{G}),
\end{tikzcd}$$

conmuta.

B) Si $H^p(U_s, \mathcal{F}) = 0$ para todo $s \in I^{p+1}$ y $p > 0$, entonces $p(\mathcal{U})$ es un isomorfismo (Teorema de Leray).

Proposicion 5.1. *Sean $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ cubrimientos abiertos de X, y $\mathcal{V}$ un refinamiento de $\mathcal{U}$. Dado un haz $\mathcal{F}$ sobre X existe un homomorfismo canónico*

$$p(\mathcal{U},\mathcal{V}) : H^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to H^p(\mathcal{V},\mathcal{F}),$$

que satisface:

A) El diagrama

$$\begin{tikzcd} H^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \arrow[r, "p(\mathcal{U},\mathcal{V})"] \arrow[dr, "p(\mathcal{U})"'] & H^p(\mathcal{V},\mathcal{F}) \arrow[d, "p(\mathcal{V})"] \\ & H^p(X,\mathcal{F}), \end{tikzcd}$$

conmuta para $p \geq 0$.

B) Si $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un morfismo, entonces

$$\begin{tikzcd} H^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \arrow[r, "\phi^p_{\mathcal{U}}"] \arrow[d, "p(\mathcal{U},\mathcal{V})"'] & H^p(\mathcal{U},\mathcal{G}) \arrow[d, "p(\mathcal{U},\mathcal{V})"] \\ H^p(\mathcal{V},\mathcal{F}) \arrow[r, "\phi^p_{\mathcal{V}}"] & H^p(\mathcal{V},\mathcal{G}), \end{tikzcd}$$

conmuta, es decir $p(\mathcal{U},\mathcal{V}) \circ \phi^p_{\mathcal{U}} = \phi^p_{\mathcal{V}} \circ p(\mathcal{U},\mathcal{V})$.

C) Si $\mathcal{W}$ es un refinamiento de $\mathcal{V}$, entonces

$$\begin{tikzcd} H^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \arrow[r, "p(\mathcal{U},\mathcal{V})"] \arrow[dr, "p(\mathcal{U},\mathcal{W})"'] & H^p(\mathcal{V},\mathcal{F}) \arrow[d, "p(\mathcal{V},\mathcal{W})"] \\ & H^p(\mathcal{W},\mathcal{F}), \end{tikzcd}$$

conmuta, es decir $p(\mathcal{U},\mathcal{W}) = p(\mathcal{V},\mathcal{W}) \circ p(\mathcal{U},\mathcal{V})$.

6. Grupo de Cohomología de Čech

Introduciremos algunas ideas algebraicas necesarias, para comprender qué es un sistema directo y llegar así a definir el grupo de cohomología de Čech.

Definición 6.1. Sea A un conjunto con una relación de orden parcial $\leq$, diremos que A es un *conjunto directo* si dados $a, b \in A$, existe $c \in A$ tal que $a \leq c$ y $b \leq c$.

Definición 6.2. Sea $\{X_a : a \in A\}$ una familia de conjuntos, donde A es un conjunto directo. Un *sistema directo* de conjuntos es una familia de conjuntos $\{X_a : a \in A\}$ y funciones $f_{ba} : X_a \to X_b$ con $b \leq a$ que satisfacen las siguientes condiciones:
i) $f_{aa} = I_{X_a}$ para cada $a \in A$.
ii) Si $c \leq b \leq a$, entonces $f_{ca} = f_{ba} \circ f_{cb}$.

El caso particular de interés para nosotros se da cuando los X_a son grupos abelianos $H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ indexados por la familia de los cubrimientos abiertos de X, con la relación de orden parcial dada por la noción de refinamiento y los f_{ba} son los homomorfismos $p(\mathcal{U}, \mathcal{V}) : H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^p(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ siempre que $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$.
Así $\{H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}), p(\mathcal{U}, \mathcal{V})\}$ es el sistema de los grupos abelianos y homomorfismos.
Sean $\mathcal{B} = \{B_k : k \in K\}$, $\mathcal{V} = \{V_k : k \in K\}$ y $\mathcal{U} = \{U_k : k \in K\}$ tres cubrimientos de X tales que $\mathcal{B} \prec \mathcal{V} \prec \mathcal{U}$ satisfaciendo $p(\mathcal{U}, \mathcal{B}) = p(\mathcal{V}, \mathcal{B}) \circ p(\mathcal{U}, \mathcal{V})$.
Así podemos definir la relación de equivalencia $\sim$ sobre la unión disjunta de los grupos abelianos $H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, donde $\mathcal{U}$ recorre todos los cubrimientos abiertos de X.
Diremos que dos clases de equivalencia $[c] \in H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ y $[f] \in H^p(\mathcal{U}', \mathcal{F})$ son equivalentes si existe un cubrimiento abierto $\mathcal{V}$ con $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$ y $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}'$ tal que $p(\mathcal{U}, \mathcal{V})([c]) = p(\mathcal{U}', \mathcal{V})([f])$.

Simbólicamente,

$$\begin{array}{rcl} [c] \sim [f] & \Leftrightarrow & \exists\ \mathcal{V} \text{ cubrimiento abierto de } X \text{ con } \mathcal{V} \prec \mathcal{U} \\ & & \text{y } \mathcal{V} \prec \mathcal{U}' \text{ tal que } p(\mathcal{U},\mathcal{V})([c]) = p(\mathcal{U}',\mathcal{V})([f]). \end{array}$$

Entonces el *límite directo* del sistema $\{H^p(\mathcal{U},\mathcal{F}), p(\mathcal{U},\mathcal{V})\}$ es el grupo

$$dir_{\mathcal{U}} lim H^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \frac{\biguplus_{\mathcal{U}} H^p(\mathcal{U},\mathcal{F})}{\sim}.$$

Definición 6.3. El p-ésimo *grupo de Cohomologia de Čech* de X con coeficientes en $\mathcal{F}$ es dado por el límite directo del sistema

$$\{H^p(\mathcal{U},\mathcal{F}), p(\mathcal{U},\mathcal{V})\}$$

En símbolos

$$\check{H}^p(X,\mathcal{F}) = dir_{\mathcal{U}} lim H^p(\mathcal{U},\mathcal{F}).$$

Sean $\check{H}^p(X,\mathcal{F}) = \{[\check{c}_s] : [c_s] \in H^p(\mathcal{U},\mathcal{F})\}$ y

$$\begin{array}{rcl} \pi : \biguplus H^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) & \longrightarrow & \frac{\biguplus H^p(\mathcal{U},\mathcal{F})}{\sim} = \check{H}^p(X,\mathcal{F}) \\ {[c_s]} & \longmapsto & \pi([c_s]) = [\check{c}_s], \end{array}$$

un homomorfismo tal que $\chi(\mathcal{U}) = \pi\Big|_{H^p(\mathcal{U},\mathcal{F})}$ donde

$$\begin{array}{rcl} \chi(\mathcal{U}) : H^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) & \rightarrow & \check{H}^p(X,\mathcal{F}) \\ {[c_s]} & \mapsto & \chi(\mathcal{U})([c_s]) = [\check{c}_s], \end{array}$$

es un homomorfismo. Definimos el homomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \chi : \check{H}^p(X,\mathcal{F}) & \rightarrow & H^p(X,\mathcal{F}) \\ {[(\check{c}_s)]} & \mapsto & \chi([(\check{c}_s)]) = p(\mathcal{U})([(c_s)]), \end{array}$$

de tal manera que el diagrama

$$\begin{tikzcd} H^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \arrow[r, "p(\mathcal{U})"] \arrow[dr, "\chi(\mathcal{U})"'] & H^p(X,\mathcal{F}) \\ & \check{H}^p(X,F) \arrow[u, "\chi"'] \end{tikzcd}$$

conmute. Probaremos que χ está bien definido.
En efecto, dados $[(\check{c}_s)], [(\check{d}_s)] \in \check{H}^p(X, \mathcal{F})$ entonces se sigue que

$$[(c_s)], [(d_s)] \in H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}),$$

así de $[(c_s)] \sim [(d_s)]$ tenemos que existe $\mathcal{V}$, cubrimiento abierto de X, con $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$ tal que $p(\mathcal{U}, \mathcal{V})([(c_s)]) = p(\mathcal{U}, \mathcal{V})([(d_s)])$, luego

$$p(\mathcal{V})(p(\mathcal{U}, \mathcal{V})([(c_s)])) = p(\mathcal{V})(p(\mathcal{U}, \mathcal{V})([(d_s)])),$$

así $p(\mathcal{U})([(c_s)])) = p(\mathcal{U})([(d_s)]))$, concluyendo que $\chi([(\check{c}_s)]) = \chi([(\check{d}_s)])$.

Teorema 6.1. *Para espacios paracompactos, los grupos de Cohomología de Čech y los grupos de Cohomología de Haces construidos por resoluciones, son isomorfos.*

Demostración. Para mostrar la existencia del isomorfismo nos valemos del Corolario (1), probando que los grupos de cohomología Čech satisfacen todas las propiedades del Teorema (2.1).
1) Probaremos que dado un haz $\mathcal{F}$ sobre X se cumple
A) $\check{H}^0(X, \mathcal{F}) \approx \mathcal{F}(X)$.
B) Si $\mathcal{F}$ es fino para $p > 0$, entonces $\check{H}^p(X, \mathcal{F}) = 0$.
En efecto,
A) Del Lema (5.2) se cumple $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \approx \mathcal{F}(X)$, así

$$\check{H}^0(X, \mathcal{F}) = \frac{\biguplus_{\mathcal{U}} H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})}{\sim} \approx \frac{\biguplus_{\mathcal{U}} \mathcal{F}(X)}{\sim} = \mathcal{F}(X),$$

concluyendo que $\check{H}^0(X, \mathcal{F}) \approx \mathcal{F}(X)$.
B) Del Lema (5.4) se tiene que si $\mathcal{F}$ es fino entonces $H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ para $p > 0$. Como

$$\check{H}^p(X, \mathcal{F}) = \frac{\biguplus_{\mathcal{U}} H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})}{\sim} \approx \frac{\biguplus_{\mathcal{U}} 0}{\sim} = 0,$$

concluimos que $\check{H}^p(X, \mathcal{F}) \approx 0$.

2) Probaremos que $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, morfismo de haces sobre X, induce homomorfismos $\check{\phi}^p : \check{H}^p(X,\mathcal{F}) \to \check{H}^p(X,\mathcal{G})$ los cuales satisfacen
A) $\check{\phi}^0 : \check{H}^0(X,\mathcal{F}) \to \check{H}^0(X,\mathcal{G})$ es precisamente la función sobre secciones inducidas por ϕ.
B) Si $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ es la identidad, entonces $\check{\phi}^p$ es la identidad para $p \geq 0$.
C) Si $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ y $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ son morfismos de haces sobre X entonces para $p \geq 0$ se tiene $(\check{\varphi\phi})^p = \check{\varphi}^p\check{\phi}^p : \check{H}^p(X,\mathcal{F}) \to \check{H}^p(X,\mathcal{H})$.
En efecto, del Lema (5.3) tenemos que si $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un morfismo de haces sobre X para $p \geq 0$ se tienen funciones inducidas

$$\phi^p_{\mathcal{U}} : H^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to H^p(\mathcal{U},\mathcal{G})$$

que satisfacen:

A) $\phi^0_{\mathcal{U}} : H^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to H^0(\mathcal{U},\mathcal{G})$ es la función sobre secciones inducidas por ϕ.
B) Si $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ es la función identidad, entonces $\phi^p_{\mathcal{U}}$ es la identidad para $p \geq 0$.
C) Si $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ y $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ son morfismos de haces sobre X entonces $(\varphi\phi)^p_{\mathcal{U}} = \varphi^p_{\mathcal{U}}\phi^p_{\mathcal{U}} : H^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to H^p(\mathcal{U},\mathcal{H})$, para $p \geq 0$.

Por lo mencionado se tiene que el homomorfismo $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ induce

$$\begin{array}{rcl} \phi^p_{\mathcal{U}} : H^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) & \to & H^p(\mathcal{U},\mathcal{G}) \\ [(c_s)] & \mapsto & \phi^p_{\mathcal{U}}([(c_s)]) = [\phi^*_p(c_s)], \end{array}$$

homomorfismo sobre grupos, donde ϕ^*_p es el homomorfismo de secciones. Del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} H^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \arrow[r, "\phi^p_{\mathcal{U}}"] \arrow[d, "\chi(\mathcal{U})"'] & H^p(\mathcal{U},\mathcal{G}) \arrow[d, "\chi(\mathcal{U})"] \\ \check{H}^p(X,\mathcal{F}) \arrow[r, "\check{\phi}^p"] & \check{H}^p(X,\mathcal{G}), \end{tikzcd}$$

tenemos el homomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \check{\phi}^p : \check{H}^p(X,\mathcal{F}) & \to & \check{H}^p(X,\mathcal{G}) \\ [(\check{c}_s)] & \mapsto & \check{\phi}^p([(\check{c}_s)]) = \phi^p_{\mathcal{U}}(\widehat{[(c_s)]}), \end{array}$$

el cual satisface las condiciones requeridas. □

Para completar la prueba del teorema anterior, construiremos una secuencia cohomológica exacta larga para $\check{H}$. En particular mostraremos que las funciones χ conmutan con el homomorfismo conexión y lo haremos en el siguiente teorema.

Teorema 6.2. *Sea* $0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$ *una secuencia exacta corta de haces sobre* X. *Para* $p \geq 0$ *tenemos un homomorfismo conexión*

$$\delta_p : \check{H}^p(X,\mathcal{H}) \to \check{H}^{p+1}(X,\mathcal{F}),$$

el cual satisface

A) La secuencia cohomológica de Čech

$$0 \longrightarrow \check{H}^0(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\check{\phi}^0} \check{H}^0(X,\mathcal{G}) \xrightarrow{\check{\varphi}^0} \check{H}^0(X,\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta_0} \check{H}^1(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\check{\phi}^1} \cdots,$$

es exacta larga.

B) Dado un diagrama conmutativo de secuencia exacta corta sobre X

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\eta"'] & \mathcal{G} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\rho"'] & \mathcal{H} \arrow[r] \arrow[d, "\omega"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{A} \arrow[r, "\sigma"] & \mathcal{B} \arrow[r, "\psi"] & \mathcal{C} \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

el correspondiente diagrama de cohomología

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \check{H}^0(X,\mathcal{F}) \arrow[r, "\check{\phi}^0"] \arrow[d, "\check{\eta}_0"'] & \check{H}^0(X,\mathcal{G}) \arrow[r, "\check{\varphi}^0"] \arrow[d, "\check{\rho}_0"'] & \check{H}^0(X,\mathcal{H}) \arrow[r, "\delta_0"] \arrow[d, "\check{\omega}_0"'] & \check{H}^1(X,\mathcal{F}) \arrow[r, "\check{\phi}^1"] \arrow[d, "\check{\eta}_1"'] & \cdots \\ 0 \arrow[r] & \check{H}^0(X,\mathcal{A}) \arrow[r, "\check{\sigma}^0"] & \check{H}^0(X,\mathcal{B}) \arrow[r, "\check{\psi}^0"] & \check{H}^0(X,\mathcal{C}) \arrow[r, "\delta_0"] & \check{H}^1(X,\mathcal{A}) \arrow[r, "\check{\sigma}^1"] & \cdots, \end{tikzcd}$$

conmuta.

7. Algunas Aplicaciones a Varias Variables Complejas

Ejemplo 7.1. Sea X una variedad diferenciable con estructura de haz $\mathcal{E}_X$, donde recordemos que $\mathcal{E}_X$ es el haz de gérmenes de funciones $\mathbb{C}$-valuadas de clase C^∞ sobre la variedad diferenciable X, es decir

$$\mathcal{E}_X = \{[f] \ \text{ tal que } f : X \to \mathbb{C}, f \in C^\infty\}$$

y sea $\mathcal{E}_X^*$ el haz de grupos (multiplicativo) de unidades de $\mathcal{E}_X$, es decir $\mathcal{E}_X^* = \{[f] \in \mathcal{E}_X : [f(0)] \neq 0\}$ (ya que $[f] \in \mathcal{E}_X$ es unidad si y sólo si $[f(0)] \neq 0$).

Sean

$L, L' \in \{\pi : L \to X$ tal que (π, L, X) es fibrado lineal complejo sobre X$\}$.

Decimos que

$$L \sim L' \Leftrightarrow \text{ Existe } g : L \to L' \text{ isomorfismo.}$$

Además, el *grupo de clases de isomorfismo de fibrados lineales complejos* sobre X es denotado por $CLB(X)$, es decir

$$\begin{aligned} CLB(X) &= \frac{\{\pi:L\to X \ \text{tal que} \ (\pi,L,X) \ \text{es fibrado}\}}{\sim} \\ &= \{[(\pi, L, X)] \ \text{tal que} \ (\pi, L, X) \ \text{es fibrado lineal complejo}\}. \end{aligned}$$

Afirmación:

$$CLB(X) \approx H^1(X, \mathcal{E}_X^*).$$

En efecto, dado $[\xi] \in H^1(X, \mathcal{E}_X^*)$; *como la cohomología de Čech es isomorfa a la cohomología de haces, se tiene que* $H^1(X, \mathcal{E}_X^*) \approx \check{H}^1(X, \mathcal{E}_X^*)$, *donde* $\check{H}^1(X, \mathcal{E}_X^*) = dir_{\mathcal{U}} lim H^1(\mathcal{U}, \mathcal{E}_X^*)$.
Así podemos encontrar un cubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ de X y $(\phi_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{E}_X^*)$ tal que $\chi(\mathcal{U})([\phi_{ij}]) = [\xi]$, obteniendo

$$H^1(\mathcal{U}, \mathcal{E}_X^*) \xrightarrow{\chi(\mathcal{U})} \check{H}^1(X, \mathcal{E}_X^*) \xrightarrow{\chi} H^1(X, \mathcal{E}_X^*),\ y$$

como $(\phi_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{E}_X^*)$ entonces $\phi_{ij}\phi_{jk} = \phi_{ik}$ para todo $i, j, k \in I$. Desde que $\phi_{ij} : U_{ij} \to \mathbb{C}^* \approx GL(1, \mathbb{C})$, vemos que (ϕ_{ij}) son las funciones de transición para un fibrado lineal complejo $L(\xi)$ sobre X, donde a cada cociclo se le puede asociar un fibrado, este fibrado no es único, pero todos ellos son isomorfos.

Mostraremos que

$$\begin{array}{rcl} q : H^1(X, \mathcal{E}_X^*) & \to & CLB(X) \\ [\xi] & \mapsto & q([\xi]) = [L(\xi)], \end{array}$$

es un isomorfismo.

i) q es un homomorfismo. En efecto, dados $[\xi], [\xi'] \in H^1(\mathcal{U}, \mathcal{E}_X^*)$, tenemos

$$\begin{aligned} q([\xi] + [\xi']) &= [L(\xi + \xi')] \\ &= [L(\xi)] + [L(\xi')] \\ &= q([\xi]) + q([\xi']). \end{aligned}$$

ii) q es un inyectiva. En efecto, dados $[\xi], [\xi'] \in H^1(\mathcal{U}, \mathcal{E}_X^*)$, tal que $q([\xi]) = q([\xi'])$ entonces $[L(\xi)] = [L(\xi')]$, así $L(\xi) \sim L(\xi')$ de donde existe $f : L(\xi) \to L(\xi')$ isomorfismo entre fibrados lineales complejos sobre X, es decir $L(\xi) \approx L(\xi')$, luego $\xi \sim \xi'$, concluyendo que $[\xi] = [\xi']$.
iii) q es un sobreyectiva, es decir dado $[L(\xi)] \in CLB(X)$ existe $[\xi] \in H^1(\mathcal{U}, \mathcal{E}_X^*)$ tal que $q([\xi]) = [L(\xi)]$, lo cual se cumple por la forma como se ha definido.

Ejemplo 7.2. Usando el isomorfismo entre $CLB(X)$ y $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{E}_X^*)$ dado en el Ejemplo (7.1) definiremos un importante invariante topológico de fibrados lineales complejos.
Considerando la función inclusión $i : \mathbb{Z} \to \mathcal{E}_X$ (la cual es inyectiva) y la aplicación $exp : \mathcal{E}_X \to \mathcal{E}_X^*$ definida por

$$exp_U(f)(x) = exp(2\pi i f(x)), \ x \in U, \ f \in \mathcal{E}_X(U),$$

tenemos la secuencia sobre secciones

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}(U) \xrightarrow{i_U} \mathcal{E}_X(U) \xrightarrow{exp_U} \mathcal{E}_X^*(U),$$

donde U es simplemente conexo. Verificaremos que la aplicación exp es sobreyectiva. Para esto basta probar que exp_U es sobreyectiva.
Dado $f \in \mathcal{E}_X^*(U)$ entonces $f(x) \in \mathcal{E}_X^*$ para $x \in U$, así tenemos que existe

$$(2\pi i)^{-1} log_U f(x) \in \mathcal{E}_X(U),$$

tal que $exp_U((2\pi i)^{-1} log_U f(x)) = f(x)$, así concluimos que exp_U es sobreyectiva. La sobreyectividad de exp se sigue notando que exp_U tiene inversa $(2\pi i)^{-1} log_U$ sobre subconjuntos abiertos simplemente conexos U. Obteniendo así una secuencia exacta corta

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{E}_X \xrightarrow{exp} \mathcal{E}_X^* \to 0,$$

consideremos la siguiente porción de la secuencia cohomológica exacta larga

$$\cdots \to H^1(X, \mathcal{E}_X) \xrightarrow{(exp)^*} H^1(X, \mathcal{E}_X^*) \xrightarrow{\delta} H^2(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{i^*} H^2(X, \mathcal{E}_X) \to \cdots .$$

Como $\mathcal{E}_X$ es un haz fino, entonces $H^1(X, \mathcal{E}_X) = 0 = H^2(X, \mathcal{E}_X)$ de donde

$$H^1(X, \mathcal{E}_X^*) \approx H^2(X, \mathbb{Z}),$$

es decir obtenemos $\delta : H^1(X, \mathcal{E}_X^*) \to H^2(X, \mathbb{Z})$ isomorfismo. Sea $L \in H^1(X, \mathcal{E}_X^*)$ un fibrado lineal complejo, pues $H^1(X, \mathcal{E}_X^*) \approx CLB(X)$.
Definimos

$$c_1(L) = -\delta(L) \in H^2(X, \mathbb{Z}),$$

llamamos a $c_1(L)$ *la primera clase de Chern de* L.

Fijamos un cubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ de X tal que todas las intersecciones U_s, $s \in I^{p+1}$ y $p \geq 0$ son contráctiles, es decir $H^p(U_s, \mathbb{Z}) = 0$ en particular para $p = 2$. Aplicando el Teorema de Leray se tiene

$$H^2(X, \mathbb{Z}) \approx H^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) \quad \text{y} \quad H^1(X, \mathcal{E}_X^*) \approx H^1(\mathcal{U}, \mathcal{E}_X^*).$$

Dado $L \in CLB(X)$ podemos por lo tanto encontrar funciones de transición ϕ_{ij} para L definidas relativamente para el cubrimiento $\mathcal{U}$. Cada intersección U_{ij} es simplemente conexa y así podemos escoger una rama de $log\phi_{ij}$ sobre cada U_{ij}.
Las condiciones de cociclo sobre ϕ_{ij} implican que para todo $i, j, k \in I$,

$$c_{ijk} = (2\pi i)^{-1}(log\phi_{ij} + log\phi_{jk} + log\phi_{ki}) \in \mathbb{Z},$$

y así $c_{ijk} \in Z^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$. Por la construcción del homomorfismo conexión, se sigue que c_{ijk} es un representante para $c_1(L) \in H^2(X, \mathbb{Z})$.

Antes de empezar con el siguiente ejemplo daremos una definición que nos será de mucha utilidad.

Definición 7.1. Sea X una variedad compleja holomorfa, el *grupo de clases de isomorfismo de fibrados lineales holomorfos* sobre X es denotado por $HLB(X)$ o también como es usual por $Pic(X)$, es decir

$$\begin{aligned} Pic(X) &= HLB(X) \\ &= \frac{\{\pi : E \to X \text{ tal que } (\pi, E, X) \text{ es fibrado }\}}{\sim} \\ &= \{[(\pi, E, X)] \text{ tal que } (\pi, E, X) \text{ es fibrado lineal holomorfo}\}, \end{aligned}$$

donde $E \sim E' \Leftrightarrow$ Existe $g : E \to E'$ isomorfismo.

Ejemplo 7.3. Sea X una variedad compleja. Como en el ejemplo anterior tenemos la siguiente secuencia exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{O}_X \xrightarrow{exp} \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0,$$

de haces sobre X. Procediendo como en el Ejemplo (0.1) obtenemos que

$$HLB(X) \approx H^1(X, \mathcal{O}_X^*).$$

Por otro lado, de la secuencia exacta corta de haces sobre X, tenemos la siguiente secuencia exacta larga de grupos de cohomología

$$\cdots \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{(exp)^*} H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{\delta} H^2(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow \cdots,$$

de donde tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^1(X, \mathcal{O}_X) \arrow[r, "(exp)^*"] \arrow[d, "i^*"'] & H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "i^*"'] & H^2(X, \mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "I"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^1(X, \mathcal{E}_X) \arrow[r, "(exp)^*"] & H^1(X, \mathcal{E}_X^*) \arrow[r, "\delta"] & H^2(X, \mathbb{Z}) \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

En las columnas del diagrama anterior i^* denota las funciones inducidas por las inclusiones naturales de $\mathcal{O}_X$ en $\mathcal{E}_X$ y de $\mathcal{O}_X^*$ en $\mathcal{E}_X^*$, además I es la función identidad sobre $\mathbb{Z}$. Definiremos, como en el ejemplo anterior la función

$$\begin{array}{rcl} \delta : H^1(X, \mathcal{O}_X^*) & \rightarrow & H^2(X, \mathbb{Z}) \\ E & \mapsto & -\delta(E), \end{array}$$

así $-\delta(E)$ *es menos la primera clase de Chern.*

Sin embargo, la función generalmente no es un isomorfismo, pues necesitamos que $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ y $H^2(X, \mathcal{O}_X)$ se anulen. Esto es justo una reflexión del hecho que un fibrado lineal holomorfo puede ser trivial en $CLB(X)$ pero no puede ser trivial en $HLB(X)$, es decir del ejemplo anterior sabemos que

$$\begin{array}{rcl} \delta : H^1(X, \mathcal{E}_X^*) & \rightarrow & H^2(X, \mathbb{Z}) \\ L & \mapsto & 0, \end{array}$$

es un isomorfismo, así L es un fibrado trivial en $CLB(X)$. Mientras que si tenemos la siguiente regla de correspondencia

$$\begin{array}{rcl} \delta : H^1(X, \mathcal{O}_X^*) & \rightarrow & H^2(X, \mathbb{Z}) \\ L & \mapsto & 0, \end{array}$$

no podemos afirmar que L sea un fibrado trivial en $HLB(X)$, pues δ no es isomorfismo. La existencia de un cubrimiento de Leray para $\mathcal{O}_X^*$ es ahora más complicado, nada trivial porque tendríamos que encontrar cubrimientos de Leray tanto para $\mathcal{O}_X$ como para $\mathbb{Z}$.

Ejemplo 7.4. Vamos a calcular la primera clase de Chern del fibrado sección hiperplano H de $P^2(\mathbb{C})$. Las funciones de transición para el fibrado sección hiperplano son dados por

$$\theta_{01}(z_0, z_1) = \frac{z_1}{z_0},$$

y haciendo

$$a_0(z_0, z_1) = \frac{|z_0|^2}{(|z_0|^2 + |z_1|^2)} \quad \text{y} \quad a_1(z_0, z_1) = \frac{|z_1|^2}{(|z_0|^2 + |z_1|^2)},$$

tenemos que $|\theta_{01}|^2 =| \frac{z_1}{z_0} |^2 = \frac{|z_1|^2}{|z_0|^2} = \frac{a_1}{a_1}$.
Nuestro representante μ para $c_1(H)_{\mathbb{C}}$ es dado por

$$\mu = \{\mu_j\} = \{\frac{-i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\ log a_i\}.$$

Haciendo $t = \frac{z_0}{z_1}$, vemos que

$$\begin{aligned}
\mu_1(t) &= \tfrac{-i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\ log a_1 \\
&= \tfrac{-i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\ log(\tfrac{|z_1|^2}{|z_0|^2+|z_1|^2}) \\
&= \tfrac{-i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\ log(\tfrac{1}{1+|\frac{z_0}{z_1}|^2}) \\
&= \tfrac{-i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\ log(\tfrac{1}{1+|t|^2}) \\
&= \tfrac{-i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\ (log(1) - log(1+ \mid t \mid^2)) \\
&= \tfrac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\ log(1+ \mid t \mid^2) \\
&= \tfrac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\ log(1 + t\overline{t}) \\
&= \tfrac{i}{2\pi}\partial(\overline{\partial}\ log(1 + t\overline{t})) \\
&= \tfrac{i}{2\pi}\partial(\tfrac{\overline{\partial}(1+t\overline{t})}{(1+t\overline{t})}) \\
&= \tfrac{i}{2\pi}\partial(\tfrac{t}{1+t\overline{t}}dt) \\
&= \tfrac{i}{2\pi}(\tfrac{(1+t\overline{t})\partial(t)-t\partial(1+t\overline{t})}{(1+t\overline{t})^2})dt \wedge d\overline{t} \\
&= \tfrac{i}{2\pi}(\tfrac{(1+t\overline{t})-t\overline{t}}{(1+t\overline{t})^2})dt \wedge d\overline{t} \\
&= \tfrac{i}{2\pi}(1 + |t|^2)^{-2}dt \wedge d\overline{t}.
\end{aligned}$$

Para superficies de Riemann compactas, la integración define un isomorfismo canónico $H^2(X,\mathbb{C}) \approx \mathbb{C}$. Como $H^2(X,\mathbb{C}) \approx \mathbb{C}$ podemos considerar $c_1(H)_\mathbb{C}$ como un elemento en $\mathbb{C}$. Esto es

$$\begin{aligned}
c_1(H)_\mathbb{C} &= \int_{P^1(\mathbb{C})} \mu(t) \\
&= \int_\mathbb{C} \mu_1(t) \\
&= \int_\mathbb{C} \tfrac{i}{2\pi}(1+|t|^2)^{-2} dt d\bar{t} \\
&= \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^\infty (1+r^2)^{-2} r dr d\theta \\
&= \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^\infty (1+r^2)^{-2} 2r dr d\theta \\
&= \int_0^\infty (1+r^2)^{-2} 2r dr \\
&= lim_{t\to\infty} \int_0^t (1+r^2)^{-2} 2r dr \\
&= lim_{t\to\infty} (1+r^2)^{-1} /_0^t \\
&= -lim_{t\to\infty}((1+t^2)^{-1} - 1) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Así el fibrado sección hiperplano de $P^2(\mathbb{C})$ tiene clase de Chern positiva.

Otras aplicaciones adicionales de la cohomología a varias variables complejas se encuentran en [4 y 5].

Referencias

[1] Glen E. Bredon: *Sheaf Theory*. McGraw-Hill Book Company. New York San Francisco Toronto London. 1967.

[2] Henri Cartan: *Faisceaux sur un espace Topologique. I.* Séminaire Henri Cartan, tome 3 (1950-1951), exp. $n°$ 14, p.1-8.

[3] Henri Cartan: *Faisceaux sur un espace Topologique. II.* Séminaire Henri Cartan, tome 3 (1950-1951), exp. $n°$ 15, p.1-7.

[4] Mike Field: *Several Complex Variables and Complex Manifolds I.* London Mathematical Society Lecture Note Series. vol. 65. 1982.

[5] Mike Field: *Several Complex Variables and Complex Manifolds II.* London Mathematical Society Lecture Note Series. vol. 66. 1982.

[6] Nancy Saravia: *Cohomología de Haces y algunas aplicaciones a varias variables complejas.* Tesis de maestría, PUCP, Lima-Perú, 2008.

[7] James W. Vick: *Homology Theory.* Academic Press. University of Texas. New York- San Francisco. 1973.

Abstract

In this paper we study the isomorphism between the Singular cohomology and the de Rham Cohomology using sheaf cohomology over paracompact spaces. Also relate the sheaf cohomology constructed by means of fine resolution with Čech cohomology by means Leray's theorem. Finally apply sheaf cohomology to calculate the Chern's first class of a bundle associated with a complex hyperplane.

Keywords: Sheaves, Sheaf cohomology.

Nancy Saravia
Sección Matemáticas,
Departamento de Ciencias.
Pontificia Universidad Católica del Perú
`nsaraviam@pucp.edu.pe`