SINGULARIDAD DE LA POLAR DE UN GERMEN DE CURVA IRREDUCIBLE DE GÉNERO UNO

Fernando Hernández Iglesias[1]

Mayo, 2013

Resumen

Describiremos la topología de la polar de un germen de curva irreducible, genérica y de género uno. Para lo cual mostraremos que polar de una curva genérica en $K(n, m)$ es Newton no degenerada.

MSC(2010):14B05-14H50.

Palabras clave: *Polar de una curva plana, Singularidad, Newton no degenerada.*

1. *Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela de Matemática. UNMSM.*

1. Introducción

El objetivo del presente trabajo es dar una descripción particular, de la topología de la polar genérica de una curva genérica irreducible de género uno, a partir de su polígono de Newton.

El tipo topológico de la polar es un problema abierto desde la época de Max Noether, en un principio los geómetras italianos pensaban que el tipo topológico de la polar era un invariante topológico de la curva, lo cual se sabe ahora que no es cierto, ver el Ejemplo de F. Pham ([10]). Si bien los geómetras italianos estaban equivocados, su afirmación no era totalmente falsa, pues si es cierta de modo general en una clase de equisingular, resultado que fue probado por Casas Alvero. En este trabajo mostramos que la polar de una curva genérica en $K(n,m)$ es Newton no degenerada; lo cual nos permite describir la topología de la polar de una curva genérica en $K(n,m)$. Además daremos explicitamente un abierto de Zariski U en $K(n,m)$ donde las polares son no degeneradas. Acabaremos dando ejemplos de polares de algunas curvas que no están en U.

2. Preliminares

2.1. Polígono de Newton de una curva plana

Sea $f = \sum_{(i,j)} a_{i,j}x^i y^j$ una curva plana. El soporte de f denotado por $S(f)$ se define como el conjunto:

$$\{(i,j); a_{i,j} \neq 0\}$$

La región de Newton de f denotada por $N(f)$ se define como la envolvente convexa de el conjunto:

$$\bigcup_{(i,j)\in S(f)} (i,j) + \mathbb{R}^2_+$$

El polígono de Newton de f denotado por $PN(f)$ se define como la unión de los lados compactos del borde de la región $N(f)$.

Observación 1. El polígono de Newton de una curva f es invariente por multiplicación por unidades, por lo tanto podemos definir el polígono de Newton de un germen de curva plana.

Sean n, m coprimos consideremos las divisiones sucesivas dadas por el algoritmo de Euclides.

$$\begin{gathered} m = hn + r_1 \\ n = h_1 r_1 + r_2 \\ r_1 = h_2 r_2 + r_3 \\ \vdots \\ r_{s-2} = h_{s-1} r_{s-1} + 1 \\ r_{s-1} = h_s \end{gathered}$$

La expresión anterior la podemos expresar en fracciones continuas como:

$$\frac{m}{n} = [h, h_1, \cdots, h_s].$$

Considerando las fracciones continuas

$$\frac{p_i}{q_i} = [h, h_1, \cdots, h_i],$$

donde $\mathrm{mdc}\{p_i, q_i\} = 1$.

Definimos el siguiente conjunto:

$$B = \{(m - [\frac{(\rho+1)m}{n}], \rho); 0 \leq \rho \leq n-1\}$$

El cual será fundamental para determinar la topología de la polar de una curva genérica en el conjunto $K(n, m)$.

El siguiente resultado es debido a Casas Alvero.

Teorema 1. El polígono de Newton determinado por el conjunto B tiene $[\frac{s+1}{2}]$ lados l_j, para $j \in \{0, \cdots, [\frac{s-1}{2}]\}$.

El lado l_j tiene inclinación geométrica $\frac{q_{2j+1}}{p_{2j+1}}$, caso $j < \frac{s-1}{2}$, o $\frac{q_s - q_{s-1}}{p_s - p_{s-1}}$, caso $j = \frac{s-1}{2}$.

Además para $j < \frac{s-1}{2}$ los puntos del polígono de Newton sobre el lado l_j son:

$P_{q_{2j}+\alpha q_{2j+1}-1} = (m - p_{2j}, q_{2j-1}) + \alpha(-p_{2j+1}, q_{2j+1})$, donde $\alpha \in \{0, \cdots, h_{2j+2}\}$.

En el caso que s sea impar sobre el lado $l_{\frac{s-1}{2}}$ sólo están los puntos $(m - p_{s-1}, q_{s-1} - 1)$ y $(0, n-1)$.

Prueba: Ver ([2]).

2.2. Curvas Planas no Degeneradas

Sea $f = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j$ un germen de curva plana, $PN(f)$ su polígono de Newton, y l un lado de $PN(f)$, denotaremos por f_l el polinomio:

$$f_l = \sum_{(i,j)\in l} a_{i,j} x^i y^j.$$

Definición 1. Sea $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ una curva reducida . Diremos de que f es no degenerada o Newton no degenerada con respecto al sistema de coordenadas (x, y), si para cada lado l de $PN(f)$ el polinomio asociado f_l no tiene puntos críticos fuera de las rectas $x = 0$ y $y = 0$.

Nótese que la propiedad de ser no degenerada es invariante por multiplicación por unidades.
El siguiente teorema será fundamental para nuestro trabajo.

Teorema 2. Sean f y g dos series de potencias reducidas, tal que $PN(f) = PN(g)$. Si ambas curvas son no degeneradas entonces $f \equiv g$.

Prueba: Ver ([4]).
El Teorema anterior nos dice de que le tipo topológico de una curva plana no degenerada se determina de su polígono de Newton. Dicho tipo topológico será descrito en el teorema 3.
Sea C un germen de curva plana, una familia finita $(C^{(i)})_i$ es llamada una descomposición de la curva C si $C = \bigcup_i C^{(i)}$, donde cada curva $C^{(i)}$ no tiene componente en común con $C^{(j)}$ para $i \neq j$.
Representaremos por $\{\frac{a}{b}\}$ el polígono de Newton determinado por el segmento que une los puntos $(a, 0)$ y $(0, b)$.
El siguiente resultado es debido a Oka, y describe la topología de una curva reducida no degenerada.

Teorema 3. Sea $C = f$ una curva plana y (x, y) un sistema coordenado tal que el cono tangente de f no contiene a la recta $x = 0$. Entonces existe una descomposición $C^{(i)}$, $i = 1, \cdots, s$ de la curva $C = f$ y, denotando por $m_i = I(C^{(i)}, y)$, $n_i = I(C^{(i)}, x) = o(C^{(i)})$, se tiene que :

- $PN(C^{(i)}) = \dfrac{m_i}{n_i}$.
- Si $d_i = \frac{m_i}{n_i}$, entonces $1 \leq d_1 < d_2 < \cdots < d_s \leq \infty$ y $d_s = \infty$ si $C^{(s)} = (y)$.
- Además, si C es no degenerada con respecto a (x, y) tenemos de que $C^{(i)}$ tiene $r_i = \text{mcd}\{n_i, m_i\}$ componentes irreducibles $C_j^{(i)}$, con parametrizaciones:

$$y^{\frac{n_i}{r_i}} - a_{i,j}x^{\frac{m_i}{n_i}} + \cdots, 1 \leq j \leq r_i$$

  donde $a_{i,j} \neq a_{i,j'}$ para $j \neq j'$.

Observación 2. El teorema anterior nos dice que si $C = f$ es una curva plana que no tiene a la recta $x = 0$ en su cono tangente, propiedad que se verifica por ejemplo si f es regular en y.

En estas condiciones tenemos que si f es no degenerada con respecto al sistema (x, y). Entonces cada bloque $C^{(i)}$ de la descomposición anterior, corresponde a un lado $l_i = [(x_{i+1}, y_{i+1}), (x_i, y_i)]$ de su polígono de Newton $PN(f)$. Además denotando $m_i = x_i - x_{i+1}$ $n_i = y_{i+1} - y_i$ tenemos de que al lado l_i corresponden r_i componentes irreducibles $p_{i,1}, \cdots p_{i,r_i}$, donde $r_i = \text{mcd}\{m_i, n_i\}$, las cuales tienen par característico $(\frac{n_i}{r_i}, \frac{m_i}{r_i})$, y cada componente irreducible $p_{i,j}$ asociada al lado l_i tiene parametrización de Puiseux:

$$y_{i,j} = c_{i,j} x^{\frac{m_i}{n_i}} + \cdots$$

donde $c_{i,j}^{n_i} \neq c_{i,j'}^{n_i}$ para $j \neq j'$.

3. Polar de una Curva en $K(n, m)$

Definición 2. Sea f un germen de curva plana, definimos la polar de f en la dirección $p = (a : b) \in \mathbb{P}^1$ como:

$$P_{a,b}(f) = af_x + bf_y.$$

En el caso de que $p \in U$ abierto de $\mathbb{P}^1$, diremos que es la polar genérica o polar de f.

La siguiente proposición describe el polígono de Newton de la polar genérica de una curva genérica en $K(n, m)$.

Proposición 1. El polígono de Newton PN de la polar genérica de una curva genérica en $K(n, m)$ tiene $[\frac{s+1}{2}]$ lados l_j, $j \in \{0, \cdots, [\frac{s-1}{2}]\}$.

El lado l_j tiene inclinación geométrica $\frac{q_{2j+1}}{p_{2j+1}}$, caso $j < \frac{s-1}{2}$, o $\frac{q_s - q_{s-1}}{p_s - p_{s-1}}$, caso $j = \frac{s-1}{2}$.
Además para $j < \frac{s-1}{2}$ los puntos del polígono de Newton sobre el lado l_j son:

$P_{q_{2j} + \alpha q_{2j+1} - 1} = (m - p_{2j}, q_{2j-1}) + \alpha(-p_{2j+1}, q_{2j+1})$, donde $\alpha \in \{0, \cdots, h_{2j+2}\}$. En el caso que s sea impar sobre el lado $l_{\frac{s-1}{2}}$ están apenas los puntos $(m - p_{s-1}, q_{s-1} - 1)$ y $(0, n - 1)$.

Prueba: Consideremos la serie:

$$f = y^n - x^m + \sum_{in+jm>nm} a_{i,j} x^i y^j,$$

con coeficientes $a_{i,j}$ arbitrarios, entonces:

$$af_x + bf_y = -amx^{m-1} + \sum_{in+jm>mn} aia_{i,j}x^{i-1}y^j + bny^{n-1} + \sum_{in+jm>mn} bja_{i,j}x^i y^{j-1} \qquad (1)$$

El punto (i_0, j_0) es formado por los exponentes de x, y de un término de la serie dada en la ecuación (1).

$$i_0 n \geq m(n-1-j_0) \qquad (2)$$

En efecto, supongamos que $i_0 n < m(n-1-j_0)$, entonces tendremos dos posibilidades conforme (i_0, j_0) corresponda a un término de f_x o de f_y.

1. Si $(i_0, j_0) = (i, j-1)$, entonces $ni < m(n-j)$, de donde $ni + mj < nm$, lo que es absurdo.

2. Si $(i_0, j_0) = (i-1, j)$, entonces $n(i-1) < m(n-1-j)$, de donde $ni + mj < mn$, lo que es absurdo.

Por tanto de (2) y del hecho que $\mathrm{mdc}\{n,m\} = 1$ tenemos de que para j_0 fijado el menor valor entero que i_0 puede asumir es $m - [\frac{(j_0+1)m}{n}]$.

Por otro lado podemos garantizar de que en la expresión (1) existe efectivamente un monomio $b_{i_0,j_0}x^{i_0}y^{j_0}$, com $i_0 = m - [\frac{(j_0+1)m}{n}]$, pues este término se obtine a partir de f_y, ya que si $(m - [\frac{(j_0+1)m}{n}], j_0) = (i, j-1)$ entonces $ni + jm = (m - [\frac{(j_0+1)m}{n}])n + m(j_0+1) > mn$.

Otros posibles puntos a tomar en cuenta son $(0, n-1)$ y $(m-1, 0)$, mas considerando $j_0 = 0$ tenemos el punto $(m-h, 0)$ con $h \geq 1$. Entonces tenemos de que el conjunto:

$$A = \{(0, n-1), (m - [\frac{(j+1)m}{n}], j); 0 \leq j < n-1\}$$

Determina el polígono de Newton de la polar genérica de la curva genérica en $K(n,m)$, luego el resultado se obtiene del teorema 1.

Retomando la descomposición en fracciones parciales de $\frac{m}{n}$, y las notaciones dadas en el teorema 1; tenemos que para cada $0 \leq u \leq [\frac{s-1}{2}]$, podemos considerar v con $0 \leq v \leq h_{2u+2}$, por lo tanto de la proposición (1) tenemos que el polígono de Newton de la polar de una curva genérica en $K(n,m)$ tiene lados l_u, con $0 \leq u \leq [\frac{s-1}{2}]$.
Así sobre cada lado l_u tendremos los puntos $P_{u,v} = (i_{u,v}, j_{u,v})$.

Definamos las siguientes funciones lineales $h_{(u,v)}$ en los coeficientes $a_{i,j}$ de los elementos de $K(n,m)$ como:

$$h_{(u,v)} = b(j_{u,v}+1)a_{i_{u,v},j_{u,v}+1} + a(i_{u,v}+1)a_{i_{u,v}+1,j_{u,v}},$$

donde $(a:b) \in \mathbb{P}^1$

Para cada u, con $0 \leq u \leq [\frac{s-1}{2}]$, definimos el polinomio.

$$F_u(z) = \sum_{0 \leq v \leq h_{2u+2}} h_{(u,v)} z^{j_{u,h_{2u+2}} - j_{u,v}}.$$

y denotemos por $\triangle(F_u)$ su discriminante.

Proposición 2. La polar genérica de una curva genérica en $K(n,m)$ es Newton no degenerada.

Prueba: De la proposición 1, tenemos que el polígono de Newton de la polar genérica de la curva genérica en $K(n,m)$ tiene $[\frac{s+1}{2}]$ lados, donde el lado l_j ($0 \leq j \leq [\frac{s-1}{2}]$) tiene inclinación $\frac{q_{2j+1}}{p_{2j+1}}$ y se determina por los puntos $(m - p_{2j} - \alpha p_{2j+1}, q_{2j-1} + \alpha q_{2j+1})$, donde $0 \leq \alpha \leq h_{2j+2}$; además en caso s sea impar el lado $l_{\frac{s-1}{2}}$ se determina sólo con los puntos $(m - p_{s-1}, q_{s-1} - 1)$ y $(0, n-1)$.

Sean ahora u, v con $0 \leq u \leq [\frac{s-1}{2}]$ y $0 \leq v \leq h_{2u+2}$.

De la proposición 1 los puntos anteriores representan los vértices del polígono de Newton PN . Ahora usando los $h_{(u,v)}$ definimos los polinomios $h_{(u,v)}x^u y^v$, que corresponderán a los vértices del polígono PN.

Los $h_{(u,v)}x^u y^v$ están bien definidos pues en la prueba de la proposición (1) vimos que el término correspondiente a f_y siempre determina un punto del polígono de Newton de la polar, por lo tanto el término $b(j_{u,v}+1)a_{i_{u,v},j_{u,v}+1}$ estará siempre presente en $h_{(u,v)}$. Así podemos definir el polinomio:

$$F_u(z) = \sum_{0 \leq v \leq h_{2u+2}} h_{(u,v)} z^{j_{u,h_{2u+2}} - j_{u,v}}.$$

F_u representa el polinomio asociado al lado l_u del polígono de Newton PN. Por tanto si consideramos:

$f \in K(n,m)$ tal que sus coeficientes no se anulan en el polinomio $\Pi_{u,v} h_{(u,v)}$, entonces tendremos que la polar genérica de f tiene polígono de Newton PN.
Si además consideramos f tal que sus coeficientes no se anulan en el polinomio $\triangle(F_u)$, $0 \leq u \leq [\frac{s-1}{2}]$, entonces tendremos que su polar es Newton no degenerada. Así tenemos que para $f \in K(n,m)$ genérica su polar es no degenerada y tiene polígono de Newton PN.

Definición 3. Una curva $f \in K(n,m)$ cuya polar tiene polígono de Newton PN y es Newton no degenerada, es llamada una curva de tipo general en $K(n,m)$.

A partir de la prueba de la proposición (2) podemos describir explícitamente un abierto de Zariski $U \subset K(n,m)$, donde las curvas son de tipo general. Así tenemos.

Corolario 1. Un conjunto abierto $U \subset K(n,m)$, donde las curvas son de tipo general es dado por el complemento en $K(n,m)$ del cerrado de Zariski:

$$Z_1 = Z\Big(\prod_{P_{u,v} \in PN} h_{(u,v)} \Big) \bigcup \Big(\bigcup_{0 \leq u \leq \left[\frac{s-1}{2}\right]} Z(\triangle(F_u)) \Big).$$

Ejemplo 1. Consideremos la curva $f = y^7 - x^{19} + \sum_{7i+19j>133} a_{i,j}x^iy^j$.

El polígono de Newton de $af_x + bf_y$ tiene dos lados l_0 y l_1 que pasamos a describir:

• El lado l_0 es determinado por los monomios $h_{0,0} = ba_{17,1}x^{17}$, $h_{0,1} = 2ba_{14,2}x^{14}y$, y $h_{0,2} = 3ba_{11,3}x^{11}y^2$.
De donde $F_0(z) = 3ba_{11,3}z^2 + 2ba_{14,2}z + ba_{17,1}$ y $\triangle(F_0) = 12b^3a_{11,3}$ $(3a_{11,3}a_{17,1} - a^2_{14,2})$.

• El lado l_1 es determinado por los monomios $h_{1,0} = 3ba_{11,3}x^{11}y^2$ y $h_{1,1} = 7by^6$.
De donde $F_1(z) = 7bz^4 + 3ba_{11,3}$
$\triangle(F_1) = (84a_{11,3})^3$.

Por tanto:

$$U = K(7,19) - \left[Z(a_{11,3}a_{14,2}a_{17,1}) \cup Z(b^3(3a_{11,3}a_{17,1} - a^2_{14,2}))\right],$$

es un abierto donde las curvas son de tipo general.

En particular considerando $a_{11,3} = a_{14,2} = a_{17,1} = 1$, tenemos de que la curva:

$$f = y^7 - x^{19} + x^{11}y^3 + x^{14}y^2 + x^{17}y$$

es una curva de tipo general en $K(7,19)$.

3.1. Rutina Computacional

En esta sección presentamos una rutina *rpolar* realizada en Maple, que nos permite obtener datos relativos a la polar de una curva dada en $K(n,m)$.

La siguiente sub-rutina *impl*, será usada para la rutina principal *rpolar*. Ella determina la ecuación explicita de una curva irreducible, a partir de su ecuación paramétrica de Puiseux.

$impl := proc(xt, yt)$
$local\ \ i, n, rpu, f;$

$n := ldegree(xt);$
$rpu := cos(2 * Pi/n) + I * sin(2 * Pi/n);$
$f := 1;$
$for\ \ i\ \ from\ 0\ to\ n-1\ do$
$f := f * (y - subs(t = rpu^i * x^(1/n), yt));$
$od;$
$f := sort(collect(expand(f), y), [y, x], 'plex');$
$end :$

La rutina *rpolar*, determina a partir de una curva dada en su forma paramétrica de Puiseux $\big(x(t), y(t)\big)$, y de un determinado orden de truncamiento, la ecuación de su polar, las parametrizaciones de las componentes irreducibles de la polar y sus índices de intersección dos a dos.

$rpolar := proc(xt, yt, n)$
$local\ f, P, R, i, nR, j, Cx, Cy, H, grauCx;$
$f := impl(xt, yt);$
$P := simplify(expand(a * diff(f, x) + b * diff(f, y)));$
$with(algcurves) :$
$R := puiseux(P, x = 0, y, n, t);$
$nR := nops(R);$
$print(\text{ramos da polar});$
$for\ i\ from\ 1\ to\ nR\ do$
$print(ramo = i);$
$print(parametrizacao = R[i]);$
$Cx[i] := convert(R[i][1], list);$
$Cy[i] := convert(R[i][2], list);$
$grauCx := degree(Cx[i][2], t);$
$if\ Cx[i][2] <> t^{grauCx}\ then$
$Cx[i][2] := subs(t = (coeff(Cx[i][2], t, grauCx))^{(1/grauCx)} * t, Cx[i][2]);$
$Cy[i][2] := subs(t = (coeff(Cx[i][2], t, grauCx))^{(1/grauCx)} * t, Cx[i][2]);$
$fi;$
$f[i] := impl(Cx[i][2], Cy[i][2]);$
$print(\text{equacao implicita} = f[i]);$

$print(ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo);$
$od;$
$print(\text{multiplicidade de intersecao});$
$for\ i\ from\ 1\ to\ nR-1\ do$
$for\ j\ from\ i+1\ to\ nR\ do$
$H[i,j] := ldegree$
$(simplify(expand(subs(x = Cx[i][2], y = Cy[i][2], f[j]))), t);$
$print((r[i], r[j]) = H[i,j]);$
$od;$
$od;$
$end:$

3.2. Curvas de Tipo Especial en $K(n,m)$

De la proposición (2) tenemos de que la polar de una curva de tipo general en $K(n,m)$ es Newton no degenerada, en particular sus componentes irreducibles son curvas de género cero, o uno. Una pregunta natural es que si cualquier curva en $K(n,m)$ tiene su polar con componentes irreducibles de género menor o igual a uno.

A primera vista la respuesta parece afirmativa. No obstante mostraremos enseguida con un ejemplo las curvas en Z_1 no cumplen dicha afirmación.

Ejemplo 2. Consideremos la curva

$$f = y^5 - \frac{10}{3}x^5y^3 + 5x^8y^2 + 5x^{10}y + 5x^{12} \in K(5,12),$$

cuya polar genérica es dada por :

$$\begin{aligned} af_x + bf_y \quad = \quad & 5by^4 - \tfrac{50}{3}ax^4y^3 + (40ax^7 - 10bx^5)y^2 + \\ & (50ax^9 + 10bx^8)y + 60ax^{11} + 5bx^{10}. \end{aligned} \tag{3}$$

Vamos ahora a determinar las ramas (componentes irreducibles) de $P(f) = af_x + bf_y$. El polinomio asociado al único lado del polígono de

Newton de $P(f)$ es:

$$F(z) = 5bz^4 - 10bz^2 + 5b.$$

Sea a_1 una raíz de $F(z)$. Ejecutemos ahora el algoritmo de Newton, para determinar una solución de $P(f) = 0$ como serie de potencias fraccionarias en x. Para esto realizamos los siguientes cambios de variables:

$$x = x_1^2, \qquad y = x_1^5(a_1 + y_1).$$

sustituyendo en (3), tenemos que

$$\begin{aligned}
&5bx_1^{20}(a_1+y_1)^4 - \tfrac{50a}{3}x_1^8x_1^{15}(a_1+y_1)^3 + (40ax_1^{14} - 10bx_1^{10})x_1^{10}(a_1+y_1)^2 \\
&+(5ax_1^{18}10bx_1^{16})x_1^5(a_1+y_1) + 60ax_1^{22} + 5bx_1^{20} = \\
&\\
&x_1^{20}\{5ba_1^4 + 20ba_1^3y + 30ba_1^2y_1^2 + 20ba_1y_1^3 + 5by^4 - \tfrac{50a}{3}x_1^3(a_1+y_1)^3 + \\
&(40ax_1^4 - 10b)(a_1+y_1)^2 + (5ax_1^3 + 10bx_1)(a_1+y_1) + 60ax_1^2 + 5b\} = \\
&\\
&x_1^{20}f_1(x_1, y_1).
\end{aligned}$$

Ahora como $F(a_1) = 0$, entonces tenemos de que:

$$\begin{aligned}
f_1 \quad = \quad & (30ba_1^2 10b)y_1^2 + 20ba_1y_1^3 + 5by_1^4 - \tfrac{50}{3}x_1^3(a_1+y_1)^3 + \\
& 40ax_1^4(a_1+y_1)^4 + 5aa_1x_1^3 + 5ax_1y_1 + 10ba_1x_1 + 10x_1y_1 \\
& +60ax_1^2.
\end{aligned}$$

El polígono de Newton de f_1 tiene un sólo lado con polinomio asociado $F_1(z) = 10b(3a_1^3 - 1)z^2 + 10ba_1$. Sea ahora a_2 una raíz de F_1, luego a partir del cambio de variables

$$x_1 = x_2^2, \quad y_1 = x_2(a_2 + y_2)$$

tenemos de que

$$y = a_1x^{\frac{5}{2}} + a_2x^{\frac{11}{4}} + \cdots .$$

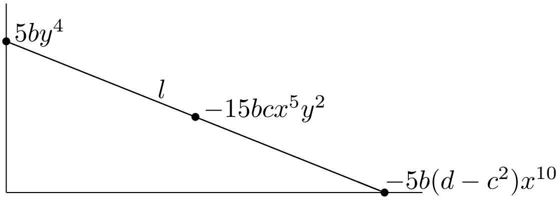
Ahora como $o(af_x + bf_y) = 4$, entonces tenemos de que la polar tiene apenas una componente irreducible con parametrización de Puiseux de la forma:

$$x = t^4, \quad y = a_1 t^{10} + a_2 t^{11} + \cdots .$$

Luego la polar de f es una curva irreducible de género dos.

Veremos ahora una familia de curvas en $K(5,12)$, cuyas polares son curvas irreducibles de género 2, y a la cual pertenece la curva del ejemplo 2.

Ejemplo 3. Consideremos la familia de curvas con semigrupo asociado $\langle 5, 12\rangle$ parametrizadas por $\varphi = (t^5, t^{12} + ct^{13} + dt^{14} + et^{16})$ y sea (f) la curva asociada a φ . Un cálculo muestra de que el polígono de Newton de $af_x + bf_y$ tiene un sólo lado l



Así el polinomio asociado a l es

$$F(z) = 5bz^4 - 15bcz^2 - 5b(d - c^2).$$

Al determinar el discriminante de F, vemos de que existe una constante no nula ρ, tal que

$$\triangle(F(z)) = \rho(c^2 - d)(5c^2 + 4d)^2.$$

Por lo tanto, considerenado $c = \frac{2}{3}$ e $d = \frac{-5}{9}$, obtenemos la familia $\varphi_e = t^{12} + \frac{2}{3}t^{13} - \frac{5}{9}t^{14} + et^{16}$, cuyos miembros poseen polares irreducibles de género 2.

En efecto, sea f_e la ecuación de la curva obtenida a partir de la parametrización φ_e.

Usando el programa *rpolar*, se puede mostrar de que la parametrización de Puiseux de $a(f_e)_x + b(f_e)_y$ es dada por:

$$x = t^4, \qquad y = q_1(e)t^{10} + q_2(e)t^{11} + \cdots ,$$

donde los $q_i(e)$ son polinomios en e. Así un término general de la familia de curvas parametrizadas por $x = t^5$, $\varphi_e = t^{12} + \frac{2}{3}t^{13} - \frac{5}{9}t^{14} + et^{16}$ tiene polar genérica irreducible, cuya singularidad es determinada por los exponentes característicos 4, 10 e 11 o equivalentemente por el semigrupo $\langle 4, 10, 21\rangle$.

Referencias

[1] E. Brieskorn and H. Knorrer.-*Plane algebraic curves* Birkhauser verlang, Basel, 1986.

[2] Casas-Alvero, E. - *On the singularities of polar curves.* Manuscripta Math. **43** (1983), 167-190.

[3] Casas-Alvero, E. - *Singularities of plane curves.* London Mathematical Society, Lectures Notes Series 276 (2000).

[4] García-Barroso, E.; Lenarcik, A.; Ploski, A. - *Characterization of non-degenerate plane curve singularities.* Proc. of the Effective Methods in Algebraic and Analytic Geometry. Effect 2006. Univ. Iagell. Acta Math. Fasc. XLV (2007), 27-36.

[5] Hefez, A. - *Irreducible Plane Curves Singularities, Real and Complex Singularities.* Lectures Notes in Pure and Appl, Math. 232 (2003).

[6] Hefez, A.; Hernandes, M.E. - *The Analytic Classification of Plane Branches.* Bull. London Math. Soc. **43** (2011), 289-298.

[7] Lê, D. T. - *Topological use of polar curves.* Proc. Symp. pure Math. Vol 29. (1975), 507-512.

[8] Merle, M. - *Invariants Polaires des Courbes Planes.* Inventiones Mathematicae, **41** (1977), 103-111.

[9] Oka, M. - *Non-degenerate complete intersection singularity.* Hermann 1997

[10] Pham F. -*Deformations equisingulieres des idéaux jacobiens des courbes planes.* In Proc of Liverpool Symposium on Singularities II, Volume 209 of lect Notes in Math, Springer Verlag, Berlin, London, new york (1971), 218-233.

[11] Zariski, O. - *The moduli problem for plane branches.* University lecture series AMS, Volume 39 (2006).

Abstract

Describe the topology of the polar for an irreducible curve germ of gender one and generic, we show that are nondegenerate Newton.

Keywords: Polar of a plane curve, singularity, Newton nondegenerate.

Fernando Hernández Iglesias
Facultad de Ciencias Matemáticas,
Escuela de Matemática.
UNMSM
fernando25132@gmail.com