

SALTO DESDE LA ESTRATOSFERA

*Casio R. Oré*¹

Agosto, 2013

Resumen

El domingo 14 de octubre del año 2012 el austriaco Félix Baumgartner ejecutó en Roswell, Nuevo México, un nuevo salto espectacular. Se arrojó desde una altura de 39 km, lugar al que había ascendido con la ayuda de un enorme globo repleto de helio. El presente trabajo tiene como objetivo aplicar el formalismo de la Física para tratar de reproducir mediante ecuaciones los detalles de la caída.

Palabras clave: *Caídas gravitacionales. Resistencia atmosférica*

1. *Sección Física, Departamento de Ciencias, PUCP.*



1. Introducción

Con la ayuda de un globo aerostático, el austriaco Félix Baumgartner logró ascender 39 km en el estado de Nuevo México para luego salir de la cápsula que lo cobijaba y arrojarse al vacío. Durante su caída superó la velocidad del sonido. Los dos últimos kilómetros los hizo en paracaídas tocando tierra en forma impecable. La empresa que propició esta hazaña fue la Red Bull Stratos RBS ¹. Esta misma empresa es la que, después del salto, se encargó de revisar los datos acumulados y finalmente emitió un reporte final, cuatro meses más tarde.

¹Datos finales de la misión **Red Bull Stratos**

En el presente artículo se trata de reproducir el salto utilizando las leyes pertinentes de la mecánica clásica haciendo uso intensivo de las cifras proporcionadas por la Red Bull Stratos (RBS). Estas cifras serán mostradas a medida que se va desarrollando el tema.

2. Teoría

P. Mohazzabi y J. H. Shea [1] tratan el problema de caída desde grandes altitudes. A la resistencia que ofrece la atmósfera a la caída, ordinariamente tomado como proporcional al cuadrado de la velocidad [2], ellos le adicionan un factor que se haga cargo de la variación de la densidad del aire a medida que aumenta la altitud. La ley de la atmósfera de Laplace es la encargada de contabilizar esta variación.

La ecuación dinámica para un cuerpo m que cae es entonces [1]

$$mv \frac{dv}{dz} = -mg + k_0 v^2 \exp\left(-\frac{z}{\lambda}\right) \quad (1)$$

donde z es la altura del cuerpo con respecto al nivel del mar, k_0 es la constante de arrastre y $\lambda = RT/gM$ la constante atmosférica de Laplace. R es la constante de los gases ideales, T , la temperatura y M , la masa molecular del aire. El factor $\exp(-z/\lambda)$ con el valor $\lambda = 7,4621 \times 10^3 m$ representa muy cercanamente el comportamiento de la densidad con la altitud z .

Definamos nuevas variables y constantes:

$$v_t^2 = \frac{mg}{k_0}; \quad u = \frac{v^2}{v_t^2}; \quad x = \exp\left(-\frac{z}{\lambda}\right); \quad c = \frac{2g\lambda}{v_t^2} \quad (2)$$

La ecuación toma entonces la forma:

$$\frac{du}{dx} + cu = \frac{c}{x} \quad (3)$$

Multiplicando por el factor de integración $\exp(cx)$ se tiene la solución

$$u(x) = c \exp(-cx) \int_{cx_0}^{cx} \frac{\exp^\eta}{\eta} d\eta \quad (4)$$

x_0 está relacionado con z_0 , altura desde donde empieza el descenso mientras que x lo está con la altura z de cualquier otra posición durante el proceso de caída.

La integral puede ser resuelta expandiendo la exponencial en una serie de Taylor e integrando término por término. Se obtiene entonces una serie infinita de potencias:

$$u(x) = c \exp(-cx) \left[\ln \left(\frac{x}{x_0} \right) + \sum_n \frac{c^n (x^n - x_0^n)}{n \cdot n!} \right] \quad (5)$$

Lamentablemente, esta serie converge muy lentamente y se complican más aún las cosas cuanto más el punto de evaluación x se aleja del punto inicial x_0 , es decir, a medida que la distancia recorrida aumenta. Es preferible una integración numérica y eso es lo que se hace en el presente trabajo.

La integración proporciona la función $u = u(x)$ que luego puede ser cambiada a $v = v(z)$ con la ayuda de (2). Estas ecuaciones concebidas por M y S serán nuevamente utilizadas en este trabajo. Ellos presentan cálculos para saltos de 30, 20 y 10 km de altura. Los resultados fueron complementados por el autor de estas notas [3] para proporcionar las ecuaciones paramétricas $z = z(t)$, $v = v(t)$ y $a = a(t)$. Lamentablemente, los resultados numéricos obtenidos por M y S no fueron refrendados por casos reales.

3. Resultados

Según Red Bull Stratos (RBS) el salto se inició a la altura de 38 969,6 m (= z_0). A los 50s de caída y a una altitud de 27 833 m adquiere

la velocidad máxima v_M :

$$v_M = 1357,6 \text{ km/h} = 377,1 \text{ m/s}, \quad (6)$$

De acuerdo a la ecuación 1, el máximo en la velocidad es obtenido cuando $dv/dz = 0$. Se tiene entonces:

$$\frac{mg}{k_0} = 377,1^2 \exp\left(\frac{-27833}{7462}\right)$$

Puede aprovecharse esta relación para hallar el valor de la constante

$$\frac{mg}{k_0} = 3412 = v_1^2$$

cifra que será usado en todo este trabajo.

Este valor contrasta con el utilizado por M y S , $v_t^2 = 1600$. Ellos tomaron este número considerándolo razonable. En el presente trabajo se toman los datos cuando Félix alcanza la velocidad máxima v_M . El nuevo valor de v_t conduce a

$$\mathbf{c = 42,865}$$

RBS también reporta que el máximo de la velocidad fue obtenido a los 50s de caída. Comparemos este resultado con la distancia que hubiera recorrido en ausencia de aire. El espacio recorrido en 50s en una región desprovista de aire sería

$$z = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times 9,8 \times 50^2 = 12\,250 \text{ m}.$$

Según el reporte de RBS la distancia recorrida fue $38969 - 27833 = 11136 \text{ m}$

Lo que significa que ya a esas alturas el aire, aunque escasa, ya frenaba la caída. La ley de la atmósfera concede a 38969 m una densidad de aire $0,5\%$ comparado con el nivel del mar y a 27833 una relación del $2,4\%$.

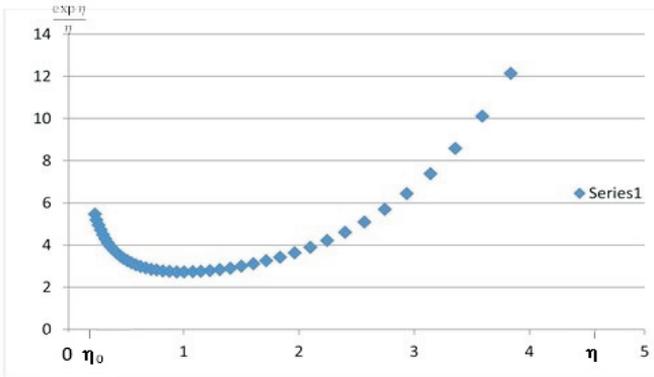


Fig. 1 $\exp \eta$ vs. η mostrando la región de integración

La región de integración empieza en $\eta_0(= cx_0) = 0,231$, ($z_0 = 38969 \text{ m}$, $x_0 = 0,00539$) y termina en un punto $\eta = cx = c \exp(-z/\lambda)$ punto en el cual uno quiere calcular la velocidad.

Una vez hallada la integración, hay que multiplicarlo por $c \exp(-cx)$ para obtener $u(x)$ tal como muestra (4), como paso previo para calcular la velocidad v .

La figura muestra claramente la presencia de un mínimo en la función $\exp \eta/\eta$ cuando $\eta = 1$.

La ecuación (1) no contiene al tiempo. Sin embargo, conociendo la velocidad v y la altitud z puede calcularse el tiempo empleado [3]

$$\Delta t_n = \frac{(z_{n+1} - z_n)}{\frac{1}{2}(v_{n+1} + v_n)} \tag{7}$$

El lado derecho de la ecuación (1)

$$g \left(-1 + \left[\frac{k_0}{mg} \right] \right) v^2 \exp \left[-\frac{z}{\lambda} \right]$$

representa la aceleración de caída a . Conocida las velocidades v a diferentes alturas z pueden ser encontrados los valores numéricos de las aceleraciones.

La **tabla I** consigna valores de la altitud z , la velocidad v a esa altura, el tiempo t empleado para llegar a esa altura y la aceleración a respectivamente.

z (km)	$v(m/s)$	$t(s)$	a/g	z (km)	$v(m/s)$	$t(s)$	a/g
38,97	0	0	-1,00	20	265,1	74,0	0,41
38	137,5	14,0	-0,97	19	248,5	77,9	0,41
37	193,9	20,1	-0,92	18	229,0	82,1	0,38
36	234,8	24,7	-0,87	17	212,7	86,6	0,35
35	268,2	28,7	-0,81	16	195,3	91,5	0,31
34	295,5	32,2	-0,74	15	178,9	96,8	0,26
33	316,0	35,1	-0,65	14	163,8	102,7	0,20
32	333,5	38,6	-0,54	13	150,1	109,0	0,16
31	350,4	41,5	-0,42	12	137,8	116,0	0,11
30	356,3	44,3	-0,33	11	126,8	123,5	0,08
29	363,0	47,1	-0,19	10	116,7	131,7	0,05
28	366,6	49,9	-0,09	9	107,7	140,7	0,02
27	367,2	52,6	0,06	8	95,9	150,5	-0,08
26	363,7	55,3	0,20	7	90,0	161,2	-0,07
25	356,5	58,1	0,31	6	84,6	172,7	-0,06
24	345,8	61,0	0,40	5	78,2	184,9	-0,08
23	332,1	63,9	0,48	4	72,1	198,3	-0,03
22	310,9	67,0	0,47	3	66,4	212,7	-0,14
21	288,5	70,4	0,46				

Las figuras 2, 3 y 4 muestran las dependencias z vs. v , v vs. t y z vs. a , respectivamente.

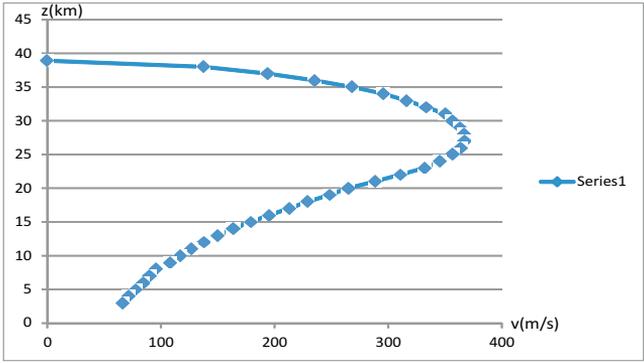


Fig. 2 Altitud z vs. velocidad v

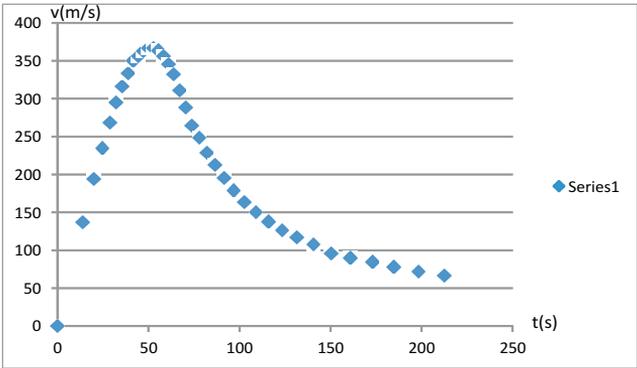
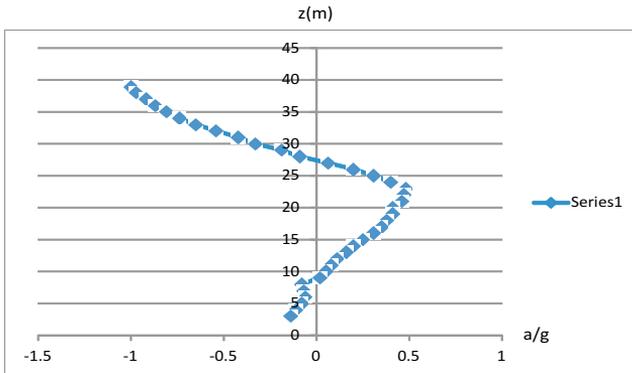


Fig. 3 Velocidad v vs. tiempo t

Fig. 4 Altitud z vs. Aceleración a/g

La observación a las figuras muestran que en los primeros segundos la velocidad aumenta rápidamente. A continuación el ritmo de aumento de la velocidad va disminuyendo, alcanza un máximo y luego desciende. No se advierte la presencia de una velocidad terminal aunque la aceleración adquiere valores cercanos a cero. En líneas generales este comportamiento coincide con los datos proporcionados por RBS: Incremento de la velocidad, presencia de un máximo y luego disminución de velocidad.

A continuación comparemos los resultados numéricos del presente trabajo PT con los datos proporcionados por RBS. (v_s , velocidad del sonido)

	RBS	PT
Velocidad máxima v_M	377,1 m/s	367 m/s
Altitud para v_M	27833 m	27500 m
Tiempo para v_M	50 s	51 s
Inicio de $v > v_s$ - altitud	34 s - 33,44 km	38 s - 32 km
Término de $v > v_s$ - altitud	64 s - 27,8 km	64 s - 24 km
Tiempo con $v > v_s$	30 s	26 s
$v(180\text{ s})$ - altitud	79 m/s - 7,6 km	80 m/s - 5,5 km
Tiempo total del vuelo	260 s	≈ 212 s

4. Conclusiones

En líneas generales, la ecuación construida por M y S reproduce las características principales del salto de Félix Baumgartner como son en orden cronológico:

- a.- Rápido aumento de la velocidad.
- b.- Disminución paulatina del ritmo de crecimiento de la velocidad.
- c.- Obtención de un máximo en la velocidad.
- d.- Seguimiento de una disminución sostenida de ella pero sin lograr una velocidad terminal.

La figura 4 ayuda a comprender la física del comportamiento. Al principio, la caída es exclusivamente debido a la fuerza gravitatoria mg . No aparece todavía la fuerza de arrastre pues esta se postula dependiente de la velocidad y de la densidad del aire, ambas muy escasas. El fuerte incremento de la velocidad en los primeros momentos se aprecia en las figuras 2 y 3.

El aumento de la velocidad y de la densidad del aire traen como consecuencia un aumento de la fuerza de arrastre. La aceleración neta de caída disminuye. Al igualarse la fuerza de arrastre a la fuerza gravitatoria, la aceleración neta es 0 y la velocidad alcanza un máximo.

La posterior disminución de la velocidad es debida mayormente al incremento en la densidad del aire. La fuerza de arrastre se torna mayor a la gravitatoria. La aceleración es ahora hacia arriba.

Los tramos finales muestran una lucha entre los dos factores de la fuerza de arrastre. Debe disminuir al disminuir la velocidad. Por otro lado debe aumentar debido al aumento de la densidad del aire. El resultado concreto es la reaparición de la aceleración hacia abajo, pero de un valor muy bajo.

En lo que respecta a valores numéricos, la ecuación (1) reproduce muy cercanamente los datos proporcionados por RBS los primeros momentos

($\approx 100s$) de la caída para luego discrepar. Por ejemplo, el tiempo total real del vuelo es 40 s más que el calculado.

La concordancia entre los valores numéricos podrían mejorarse buscando valores alternativos para v_t^2 . Se dijo que M y S utilizaron 1600 mientras que en el presente trabajo se usó 3412. Los datos proporcionados por RBS para los 180 s de caída podría ser un ejemplo. Con seguridad acertaría la diferencia entre los tiempos totales de vuelo pero la armonía en los momentos que se logra la velocidad máxima serían alterados.

Podría también cambiarse el valor de λ , aunque el valor empleado es el más utilizado en la ecuación de la atmósfera.

Vale la pena también recordar que el uso de v^2 en la expresión para la fuerza restrictiva es también artificial. Este valor es preferible a v y como tal se está usando [2]. Es indudable que la fuerza restrictiva dependa de la velocidad pero no necesariamente a la potencia 1 o 2. Estos exponentes se toman exclusivamente para poder conseguir una solución analítica manejable de la ecuación 1, más no porque la naturaleza se comporte siguiendo sus pautas.

Referencias

- [1] Mohazzabi, P. and Shea , J. H.: Am. J. Phys. Vol 64, Oct. 1996.
- [2] P. Timmerman and J. P. van der Weele.: Am. J. Phys. Vol 67, June 1999
- [3] Oré, C.: PRO MATH. Vol. XIII/ Nos. 25-26 PUCP 99.

Abstract

On sunday october 14, 2012, the Austrian Félix Baumgartner did a spectacular jump in Roswell, New Mexico. He ascended 39 km high in a he-

Casio R. Oré

lium contained globe and jumped. In this work I try to apply physical laws to understand the details of the trajectory.

Keywords: Gravitational falls. Atmospheric dragg.

Casio R. Oré
Sección Física
Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú
core@pucp.pe