SOBRE LA INYECTIVIDAD EN ESPACIOS EUCLIDIANOS

Roland Rabanal[1]

Diciembre, 2013

Resumen

Se dan algunos teoremas que garantizan la inyectividad global de los difeomorfismos locales en espacios euclidanos. De momento el trabajo no es aún exaustivo, ni pretende serlo, simplemente se describe algunos resultados utiles en la teoría del estudio de las aplicaciones inyectivas. La primera parte describe algunos resultados relacionados con la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales, y presenta una caracterización de la inyectividad global de aplicaciones en el plano por medio de la existencia de un centro global isócrono. Tambien se presenta el problema de la estabilidad asintótica global. La segunda parte describe la "condición de Palais – Smale".

MSC(2010): 34C05, 34D23, 58C15.

Palabras clave: *Inyectividad global, condición de Palais-Smale, centro isócrono.*

1. *Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias, PUCP.*

1. Introducción

La teoría que estudia los diffeomorfismos locales utiliza varias áreas de la matemática. Por ejemplo álgebra [12, 27], análisis [1, 4, 28], geometría [23], topologia [3], teoria espectral [26], sistemas dinámicos [24, 14, 15, 10, 11] entre otros [9, 7, 5, 22, 18]. En la presente nota se describen algunos resultados relacionados con el estudio de la inyectividad, y su relación con los sitemas dinámicos y con el análisis.

En la primera parte de la sección 2 se describen algunos resultados para garantizar la inyectividad global de un difeomorfismo local, que usualmente es una aplicación continuamente diferencialble cuyo determinante nunca se anula. Se presentan algunos casos, en la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales, donde el concepto de inyectividad es de gran utilidad. Aqui solo se describe su relación con sistemas en el plano y se empieza con el caso especial de los sitemas Hamiltonianos. Se da un método para construir algunos sistemas Hamiltonianos que admiten al origen como un centro global isócrono, es decir el periódo de todos las soluciones no triviales es constante. A partir de esto, en el parágrafo **2.5** se usa la existencia de un centro global isócrono para caracterizar la inyectividad global de una aplicación que está definida en todo el plano y cuyo determinante jacobiano es igual a una constante no-nula.

La ultima parte de la sección 2 describe el problema de la estabilidad asintotica global (2.5), que se relaciona con las caracterizaciones espectrales dadas en [26] y con los resultados espectrales de [9, 10], los cuales garantizan la inyectividad global de un difeomorfismo local. En particular, [9] introduce la conjetura debil de Markus-Yamabe según la cual el conjunto de singularidades, la preimagen de cero, es a lo más unitario cuando los autovalores de cada matriz jacobiana tiene la parte real negativa. Tal conjetura de [9] se cumple en el plano, y si se acepta como verdadera en cualquier dimensión, garantiza la inyectividad global de cualquier aplicación polinomial cuyo determinante jacobiano es uno.

Se describe la conjetura bidimensional de Chamberland [7] que daria la inyectividad del un difeomorfismo local cuando sus autovalores evitan un disco de radio positivo (vea también el Teorema 3.3).

En [1, 4, 28] se estudian importantes teorias del análisis. A partir de esto se introduce lo que después quedó conocida como la condición de Palais–Smale [17], la cual a sido sorprendentemente utilizada en otras áreas de la matemática. Por ejemplo, en [7] se dá una util aplicación para tratar de obtener la inyectividad global de las aplicaciones polinomiales cuyo determinante jacobiano es uno (i.e aplicación de Keller). En [23] tal condición se extiende inteligentemente al estudio de la geometria en fibrados de Ehresmann y en [25, 21] se describre la influencia de tal condicion en la inyectividad global de los difeomorfismos locales para espacios de Banach de dimensión finita. En la sección 3 se describe algunos resultados para espacios euclidianos [7] y se presentan los resultados de [14] que estudian la condicion de Palais-Smale para obtener difeomorfismos globales por medio de la teoria cualitativa de las ecuaciones diferenciales, especificamente se garantiza la biyectividad de un difeomorfismo local cuando se consigue que un determinado sistema asociado sea completo.

2. Inyectividad en Dinámica

En esta sección se describe algunas propiedades cualitativas de las ecuaciones diferenciales ordinarias que tienen una estrecha relacion con la inyectividad de aplicaciones. La primera parte relaciona la inyectividad global por medio de la existencia de un sistema Hamiltoniano que admite un centro global isócrono. La segunda parte describe la existencia de un atractor global y su sorprendente relación con la inyectividad. Los resultados presentados solo describen sistemas en el plano.

2.1. Centros isócronos

Cada aplicación $F = (f, g)$ continuamente diferenciable y definida en un abierto U del plano $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ induce el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & f(x, y) \\ \dot{y} & = & g(x, y), \end{array} \tag{2.1}$$

donde $\cdot = \frac{d}{dt}$. Este sistema genera un flujo bien definido por medio de la soluciones maximales

$$\mathbb{R} \supset I_z \ni t \mapsto \phi(t, z) \in U \subset \mathbb{R}^2$$

que envian el cero en $z \in U$, es decir $\phi(0, z) = z$. En particular, donde tenga sentido las composiciones[1] se cumple $\phi(t, \phi(s, z)) = \phi(t+s, z)$. Un caso particular de (2.1) viene dado por los sistemas Hamiltonianos, estos tienen la forma[2]

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & H_y(x, y) \\ \dot{y} & = & -H_x(x, y), \end{array} \tag{2.2}$$

donde H_y y H_x son las respectivas derivadas parciales de una función $H : U \to \mathbb{R}$, de clase C^2. Un ejemplo que ilustra este tipo de sistemas viene dado por $H(X, Y) = \frac{X^2+Y^2}{2}$ que es una integral primera del sistema lineal

$$\begin{array}{rcl} \dot{X} & = & Y \\ \dot{Y} & = & -X, \end{array} \tag{2.3}$$

cuyas soluciones son todas periodicas: definen circunferencias donde $H(X; Y) = \frac{X^2+Y^2}{2}$ es constante. En general, $z_0 \in U$ se dice que es un **centro** para (2.1) si $F(z_0) = (0, 0)$ (i.e z_0 es una singularidad) y existe un abierto $U_0 \subset U$ con $z_0 \in U_0$ de modo que $U_0 \setminus \{z_0\}$ esta formado por orbitas periodicas no–triviales. Así a cada centro, digamos 0, se le puede asociar su **anillo de periodos** N_0 definido como la cerradura del

[1] Por ejemplo para sistemas completos: $I_z = \mathbb{R}, \forall z$

[2] Algunos autores consideran el signo menos en la otra componente del campo Hamiltoniano.

conjunto más grande que contiene al centro y está formado por orbitas periódicas. En particular, un **centro isócrono** viene dado por un centro que admitne algun conjunto U_0 donde todas la soluciones periodicas, no triviales tienen el mismo periódo. Una intesante descripción de estos centros se encuentra en [6].

2.1. Observe que si $F = (P, Q)$ es polinomial, es decir cada $P, Q \in \mathbb{R}[x, y]$, la aplicación

$$H_F(x, y) = \frac{P(x, y)^2 + Q(x, y)^2}{2}$$

queda definida en todo el plano. Además, cuando $P(0, 0) = Q(0, 0) = 0$ el sistema Hamiltoniano es polinomial y

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & PP_y + QQ_y \\ \dot{y} & = & -PP_x - QQ_x \end{array} \tag{2.4}$$

admite al origen como un centro isócrono (vea por ejemplo el sistema lineal dado por H_I con $I(x, y) = (x, y)$). Si $F = (P, Q)$ es inyectiva y preserva el área (i.e $det(DF) = 1$), el difeomorfimo global $z \mapsto F(z)$ (vea [2, 27, 19]) define una equialencia topologica entre el sistema $\dot{z} = F(z)$ y (2.3), con las nuevas coordenadas $X = P(x, y)$ y $Y = Q(x, y)$. Para ver esto basta calcular las derivadas de las componentes P y Q a lo largo de las soluciones de (2.4):

$$\begin{aligned} \dot{P} &= P_x\dot{x} + P_y\dot{y} = P_x(PP_y + QQ_y) - P_y(PP_x + QQ_x) \\ &= Qdet(DF) = Q, \\ \dot{Q} &= Q_x\dot{x} + Q_y\dot{y} = Q_x(PP_y + QQ_y) - Q_y(PP_x + QQ_x) \\ &= -Pdet(DF) = P. \end{aligned}$$

A partir de esto no es dificil obtener el siguiente teorema.

Teorema 2.2 (Sabatini [24])**.** *Sea $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación de clase C^2 cuyo determinante jacobiano es uno. (i.e $det(DF(z)) = 1, \forall z$) tal que $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$. Se cumple lo siguiente:*

1. *El origen es un centro isócrono de* (2.4) *con $P = f$ y $Q = g$.*

2. *La restricción al anillo de periodos,* $F| : N_0 \to \mathbb{R}^2$ *es inyectiva.*

3. *Si el sistema del primer item es completo y el centro es global (i.e* $N_0 = \mathbb{R}^2$*) entonces* F *es inyectiva.*

Observación 2.3. Una manera de obtener un sistema completo con un centro global como en (2.4) es asumir la condición

$$\int_0^\infty \frac{1}{\mu(r)} = \infty, \quad \textit{donde} \quad \mu(r) = \sup\{||\nabla H_F(z)|| : ||z|| = r\}.$$

Vea también el teorema número 3.7.

Del mismo modo, no es dificil probar la siguiente.

Proposición 2.4. *Sea* $F = (P, Q) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *una aplicación polinomial de modo que el determinante del jacobiano siempre es distinto de cero tal que* $P(0,0) = Q(0,0) = 0$*. Las sigueintes afirmaciones son equivalentes:*

1. *El origen es un centro global para el sistema* (2.4)*.*

2. F *es un difeomorfismo global del plano en si mismo.*

2.5. En consecuencia, usando una aplicacion de Keller se obtiene que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- Cada aplicación de Keller es inyectiva.
- Cada centro construido como en el paragrafo **2.1** es un centro global.

2.2. Atractores Globales

Otra aplicación interesante de la inyectividad de $F = (f, g)$, una función definida en todo el plano con $F(0,0) = (0,0)$ se encuentra en el estudio de la **basía de atracción** del sistema (2.1) que se define como el siguiente conjunto

$$W_0^s = \{z \in \mathbb{R}^2 : \omega(z) = \{(0,0)\}\},$$

donde $\omega(z)$ es el conjunto omega límite de z, inducido por (2.1). Para explicar esto se introduce el **espectro** de F definido por

$$Spc(F) = \{\text{autovalor de } DF(z) : z \in \mathbb{R}^2\}.$$

Por ejemplo, no es dificil ver que si $F(x, y) = (ax + by, cx + dy)$, (2.1) es un sistema lineal y se cumple

$$Spc(F) \subset \big\{z \in \mathbb{C}^2 : \Re(z) < 0\big\} \Rightarrow W_0^s = \mathbb{R}^2. \tag{2.5}$$

Esto significa que el origen es un **atractor global**: $W_0^s = \mathbb{R}^2$.

Observación 2.6. En $\mathbb{R}^3$ no es verdadera una afirmacion analoga a (2.5). Los autores de [8] definen la aplicación polinomial

$$F(x, y, z) = \big(-x + z(x + zy)^2, -y - (x + zy)^2, -z\big),$$

la cual satisface $F(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$ y

$$Spc(F) = \{-1\} \subset \big\{z \in \mathbb{C}^2 : \Re(z) < 0\big\}.$$

Sin embargo el sistema inducido $\dot{p} = F(p), p \in \mathbb{R}^3$ admite una solución que va hacia infinito cuando el parametro crece indefinidamente. Tal solución es

$$t \mapsto (18e^t, -12e^{2t}, e^{-t}).$$

Por lo tanto, el origen no es un atractor global.

2.7. A pesar de esta observación, la afirmación (2.5) es verdadera para (2.1). Fue Olech [16] el primero que encontro una importante relación entre la existencia de un atractor global y la inyectividad de la aplicación inducida. Especificamente, él se dio cuenta que la inyectividad de $F = (f, g)$ con una singularidad en el origen garatiza la existencia de dos constantes positivas $c > 0$ y $\rho > 0$ tales que

$$||(x, y)|| \geq c \Rightarrow ||F(x, y)|| \geq \rho. \tag{2.6}$$

Esto le permitio controlar el comportamiento del sistema en el infinto, en particular en la frontera de W_0^s, con lo cual consiguió demostrar la equivalencia de las siguientes afirmaciones

- $Spc(F) \subset \{z \in \mathbb{C}^2 : \Re(z) < 0\} \Rightarrow F$ es inyectiva, y
- $Spc(F) \subset \{z \in \mathbb{C}^2 : \Re(z) < 0\} \Rightarrow$ el origen es un atractor global,

cuando $F(0,0) = (0,0)$. Además, en este mismo trabajo [16], Olech cosiguió probar (2.5) cuando se cumple la condicion adicional (2.6). Finalmente, 30 años después Carlos Gutierrez demostro (2.5) sin ninguna restricción.

Teorema 2.8 (Gutierrez, [11])**.** *Sea $F = (f,g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación de clase C^1 con $f(0,0) = g(0,0) = 0$. Si la parte real de todos los autovalores es negativa, es decir $Spc(F) \subset \{z \in \mathbb{C}^2 : \Re(z) < 0\}$, entonces $F = (f,g)$ es inyectiva y el origen es un atractor global del sistema* (2.1)*: $W_0^s = \mathbb{R}^2$.*

2.9. Recientemente, en [10] se ha simplificado la demostración de este resultado y se ha extendido a aplicaciones apenas diferenciables, no necesariamente continuamente diferenciables. Del mismo modo, se ha encontrado una nueva condición espectral que garantiza la inyectividad y se ha probado que

$$\exists \varepsilon > 0, Spc(F) \cap [0,\varepsilon) = \emptyset \Rightarrow F \text{ es inyectiva.}$$

(vea también [20]). En paticular, se demuestra afirmativamente la conjetura bibimendsional de Chamberland [7]

3. Inyectividad en Análisis

3.1. Lema del Paso de la Montaña

Se utiliza una versión debil del lema: ‘paso de la montaña’ [1], pero para espacios de dimensión finita e inspirada en [4]. Para enunciarlo se considera $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y su gradiente usual $\nabla h(x) = \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial h}{\partial x_n}(x)\right)$ dado por las derivadas parciales; de este modo tal función h podría adaptarse a cualquiera de las siguientes condiciones.

C_1 Condición de compacidad de Palais-Smale en $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(PS)_\alpha \left\{ \begin{array}{l} \text{Cada sucesion } x_n \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } h(x_k) \to \alpha \text{ y } ||\nabla h(x_k)|| \to 0, \\ \text{tiene una subsucesión convergente.} \end{array} \right.$$

C_2 Condición de compacidad de Palais-Smale:

$$(PS) \left\{ \begin{array}{l} \text{Se dice que } h \text{ satisface } (PS) \text{ si } (PS)_\alpha \text{ sucede en cada } \alpha \in \mathbb{R}. \\ \text{Esta condicion fue definida por Palais y Smale en [17].} \end{array} \right.$$

C_3 Condición del paso de la montaña:

$$(PM) \left\{ \begin{array}{l} \text{Existe una vecindad abierta } U \text{ de } 0 \text{ y un punto } x_0 \notin \overline{U} \\ \text{tal que } \max\{h(0), h(x_0)\} < m := \inf\{h(x) : x \in \partial U\}. \\ \text{Sea } A \text{ la familia de curvas continuas } g : [0,1] \to \mathbb{R}^n, \\ \text{con } g(0) = 0 \text{ y } g(1) = x_0 \text{ y } c = \inf_{g \in A} \max_{t \in [0,1]} h(g(t)). \\ \text{Claramente } c \geq m. \end{array} \right.$$

Lema 3.1 (Paso de la montaña)**.** *Sea $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una aplicación de clase C^1 que satisface la condición (PM). Entonces existe una sucesión (x_k) en $\mathbb{R}^n$ tal que*

$$h(x_k) \to c \quad y \quad ||\nabla h(x_k)|| \to 0.$$

Si además h también satisface $(PS)_c$ con c definido en (PM), entonces c es un valor critico de h, es decir por cada $x_c \in \mathbb{R}^n$ con $h(x_c) = c$ se cumple $\nabla h(x_c) = 0$.

Demostración. La demostración se obtiene directamente de las definiciones. Se deja los detalles al lector. □

Observación 3.2. Para aplicaciones continuamente diferenciables, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la condición (PS) equivale a decir: 'por cada sucesión (x_k) tal que $h(x_k)$ es limitada y $||\nabla h(x_n)|| \to 0$, existe (x_{k_m}) una subsucesión convergente'(vea [28, p.161]). Más aún, cuando tal h no admite puntos criticos, en [14] se observa que la condición (PS) para h es equvalente a

$$\inf \left\{ ||\nabla h(x)|| : x \in h^{-1}([a,b]) \right\} > 0, \tag{3.1}$$

para todo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ con $a < b$. En efecto, (PS) se satisface por vacuidad cuando se cumple (3.1). Reciprocamente, si el ínfimo en (3.1) es cero, (PS) no se debe satisfacer, pues de hacerlo es posible encontrar $x \in \mathbb{R}^n$ (el limite de alguna subsucesión) con $\nabla h(x) = 0$, contradiciendo la condición de no existencia de puntos criticos. Por lo tanto, cuando h **no** admite puntos criticos

$$(PS) \Leftrightarrow 0 \notin \overline{\{||\nabla h(x)|| : x \in \mathbb{R}^n\}} \Leftrightarrow (3.1), \tag{3.2}$$

pues el dominio de h es $\mathbb{R}^n = \bigcup_{[a,b]\subset\mathbb{R}} \{h^{-1}([a,b]) : a < b\}$.

3.1.1. Condiciones Espectrales y (PM)

Para $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, una aplicación de clase C^1 con $F = (F_1, \dots, F_n)$, por cada $x = (x_1, \dots, x_n)$ la matriz jacobiana dada por $(i,j) \mapsto \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x)$ se denota por $DF(x)$ y se identifica con la transformación lineal que define. Analogamente, $[DF(x)]^T$ denota la matriz transpuesta de $DF(x)$.

Teorema 3.3 (Chamberland-Meisters, [7]). *Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase C^1. Si existe una constante $\varepsilon > 0$ tal que $|\mu| \geq \varepsilon$ para todos los autovalores μ de $DF(x)[DF(x)]^T$ con $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces F es un difeomorfismo local, globalmente inyectivo.*

Demostración. Por el teorema de la función inversa, F es un difeomorfismo local, por lo tanto sólo de demuestra la inyectividad global. Para este fin, por cada $p \in \mathbb{R}^n$ se definen las funciones $G_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y $h_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ haciendo

$$G_p(x) = F(x+p) - F(p), \quad h_p(x) = \frac{||G_p(x)||^2}{2} = \frac{G_p(x) \cdot G_p(x)}{2} \tag{3.3}$$

donde $||x|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ es la norma euclidiana de $\mathbb{R}^n$. Como G_p es un difeomorfismo local, $(h_p)^{-1}(0) = (G_p)^{-1}(0)$ es un conjunto discreto que contiene al origen. La igualdad $\nabla h_p(x) = G_p(x) DG_p(x)$ muestra que tal conjunto de ceros está formado por los puntos críticos de h_p, porque

$\nabla h_p(x) = 0$ es equivalente a $h_p(x) = 0$. Finalmente, se observa que

$$F(p) = F(q) \Rightarrow q - p \in (G_p)^{-1}(0). \tag{3.4}$$

Si F no es inyectiva, existe $x_0 = q - p \neq 0$ y una constante $0 < r < ||x_0||$ tal que h_p satisface (PM) con $U = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| < r\}$ y $m = \text{mín}\{h_p(x) : ||x|| = r\} > 0$ ($h_p(0) = h_p(x_0) = 0$ y $(h_p)^{-1}(0)$ es discreto). Más aún, el respectivo $c \geq m$ de la condición (PM) no es un valor critico de h_p, ($\nabla h_p(x_c) = 0 \Leftrightarrow h_p(x_c) = 0$) y por el lemma 3.1, no se debe cumplir la condición de compacidad $(PS)_c$, para h_p. Por lo tanto, existe una sucesión (x_k) en $\mathbb{R}^n$ tal que

(i) $\text{lím}_{k\to\infty} h_p(x_k) = c \geq m > 0$ (i.e $\text{lím}_{k\to\infty} ||G_p(x_k)|| = \sqrt{2c} > 0$),

(ii) $\text{lím}_{k\to\infty} \nabla h_p(x_k) = \text{lím}_{k\to\infty} G_p(x_k)DG_p(x_k) = 0$, pero

(iii) $\text{lím}_{k\to\infty} ||x_k|| = \infty$.

Cuando una matriz real $A = (a_{i,j})$ es simétrica $(a_{i,j} = a_{j,i})$ y definida positiva $(a_{i,i} \geq 0)$, todos sus autovalores son reales no-negativos y por el [13, Theorem 11.7] $\text{mín}\{\mu : \text{autovalor de } A\} = \text{ínf}\{\frac{yAy}{||y||^2} : y \neq 0\}$ ($Av = \mu v, v \neq 0 \Rightarrow \mu = \frac{vAv}{||v||^2}$: cociente de Rayleigh). Aplicando éste resultado a la matriz $A = DG_p(x_k)[DG_p(x_k)]^T$ con $y = G_p(x_k)$ se obtiene que por cada $k \geq 1$, el minimo autovalor $\mu_1(x_k) = \text{mín}\{\mu : \text{autovalor de } A = DF(x_k + p)[DF(x_k + p)]^T\}$ satisface[3]

$$0 < \mu_1(x_k) \leq \frac{G_p(x_k)AG_p(x_k)}{||G_p(x_k)||^2} = \frac{||G_p(x_k)DG_p(x_k)||^2}{||G_p(x_k)||^2}, \quad \forall G_p(x_k) \neq 0. \tag{3.5}$$

Aqui, en (3.5), $||G_p(x_k)DG_p(x_k)||^2 \xrightarrow{k\to\infty} 0$, por (ii) y $||G_p(x_k)||^2 \xrightarrow{k\to\infty} 2c > 0$, por (i) en consecuencia $\mu_1(x_k) \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Esta contradicción con la hipotesis del teorema muestra que F es inyectiva. $\square$

[3] Las componentes de $DG_p(x_k)[DG_p(x_k)]^T$ son $a_{i,j} = \sum_{t=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_t}(x_k+p)\frac{\partial F_j}{\partial x_t}(x_k+p)$.

Se observa que la demostración no utiliza (iii), en consecuencia su apliación origina el siguiente corolario y muestra que el teorema 3.3 sigue dando la inyectividad global de un difemorfismo local aún cuando su hipotesis falle en un conjunto limitado.

Corolário 3.4. *Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo local de clase C^1. Si existen dos constantes $\rho > 0$ y $\varepsilon > 0$ tal que $|\mu| \geq \varepsilon$ para todos los autovalores μ de $DF(x)[DF(x)]^T$ con $||x|| > \rho$. Entonces F es globalmente inyectivo.*

Demostración. Por ser F un difeomorfismo local, se puede volver a definir las funciones de (3.3) y seguiran satisfaciendo las mismas propiedades, en particular la ecuación (3.4). Si se asume por el absurdo que $F(p) = F(q)$ para algun $q - p \neq 0$, la respectiva función h_p satisface (PM) y por lo tanto existe una sucesión (x_k) en $\mathbb{R}^n$ tal que

(i) $\text{lím}_{k\to\infty} h_p(x_k) = c \geq m > 0$ (i.e $\text{lím}_{k\to\infty} ||G_p(x_k)|| = \sqrt{2c} > 0$),

(ii) $\text{lím}_{k\to\infty} \nabla h_p(x_k) = \text{lím}_{k\to\infty} G_p(x_k) DG_p(x_k) = 0$, pero

(iii) $\text{lím}_{k\to\infty} ||x_k|| = \infty$.

La demostración del Teorema 3.3 muestra que el mínimo autovalor, $\mu_1(x_k) = \text{mín}\{\mu : \text{autovalor de } A = DF(x_k + p)[DF(x_k + p)]^T\}$ satisface (3.5) para la nueva sucesión (x_k), es decir $\mu_1(x_k) \xrightarrow{k\to\infty} 0$ y $||x_k|| \xrightarrow{k\to\infty} \infty$. Por lo tanto, existe algún x_k tal que $||x_k + p|| > \rho$ y $\mu_1(x_k) < \varepsilon$, esta contradicción con las hipótesis muestra el corolário. $\square$

En el siguiente resultado muestra que el teorema 3.3 se mantiene cuando su hipótesis sólo se cumple en un subconjunto denso del complemento de algún conjunto limitado.

Proposición 3.5. *Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo local de clase C^1. Si existen dos constantes $\rho > 0$ y $\varepsilon > 0$ y un subconjunto denso $D \subset \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| > \rho\}$ tal que por cada $x \in D$ todos los autovalores μ de $DF(x)[DF(x)]^T$ satisfacen $|\mu| \geq \varepsilon$. Entonces F es globalmente inyectivo.*

Demostración. Sea $\mu_1(x) = \text{mín}\{\mu : \text{autovalor de } DF(x)[DF(x)]^T\}$. Si F no es inyectiva, la prueba del corolario 3.4 permite encontrar $\tilde{x}$ con $||\tilde{x}|| > 2\rho$ tal que $0 < \mu_1(\tilde{x}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por la continuidad de la función $x \mapsto \mu_1(x)$ existe $r > 0$ de modo que $||x - \tilde{x}|| < r$ implica $||x|| > \rho$ y también $0 < \mu_1(x) < \frac{3\varepsilon}{4}$. A partir de esto se obtiene una contradicción con la hipótesis, pues $\{x : ||x - \tilde{x}|| < r\} \cap D \neq \emptyset$. Por lo tanto, F es inyectiva. □

Observación 3.6. Los autovalores de una matriz y su inversa son recíprocos y están limitados por la norma de su respectiva matriz. De este modo los autovalores μ (no degenerados) de $DF(x)[DF(x)]^T$ satisfacen

$$0 < \frac{1}{\mu} \leq ||(DF(x)[DF(x)]^T)^{-1}|| = ||(DF(x))^{-1}||^2,$$

además el producto de tales autovalores, μ es

$$det(DF(x)[DF(x)]^T) = (det(DF(x)))^2$$

Por lo tanto, decir que los autovalores de $DF(x)[DF(x)]^T$ están uniformemente lejos de cero, para todo $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ es equivalente

$$det(DF(x)) \neq 0,\ \forall x \in D \quad y \quad ||(DF(x))^{-1}|| \text{ es limtado en } D \subset \mathbb{R}^n.$$

3.1.2. Flujos Completos inducidos por Gradientes y (PS)

Para una función continuamente diferenciable $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y una metrica riemanniana $g_x : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ (completa y con $x \in \mathbb{R}^n$) el gradiente de h respecto a g es el único vector $\nabla^{(g)} h(x) \in \mathbb{R}^n$ que satisface

$$\nabla h(x)w = g_x(\nabla^{(g)} h(x), w), \quad \forall w \in \mathbb{R}^n,$$

donde $\nabla h(x)w$ es el producto usual (de matrices). Más aún $||\nabla^{(g)} h(x)||_g$, la norma de $\nabla^{(g)} h(x)$ respecto a g cumple

$$||\nabla^{(g)} h(x)||_g = \text{máx}\{||\nabla h(x)w|| : g_x(w, w) = 1\}$$

por el teorema de Riez en $\mathbb{R}^n$, con el producto interno g_x. Por lo tanto, de acuerdo con la observación 3.2, se dice que, h satisface (PS), con respecto a la metica g si 'por cada sucesión (x_k) tal que $h(x_k)$ es limitada y $||\nabla^{(g)}h(x_n)||_g \to 0$, existe (x_{k_m}) una subsucesión convergente'. Por otro lado, cuando cada curva integral del campo $\nabla^{(g)}h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ está definida en todo $\mathbb{R}$, tal campo $\nabla^{(g)}h$ es completo.

Teorema 3.7 (Nollet-Xavier, [14]). *Sea $F = (F_1, \dots, F_n)$ un difeomorfismo local continuamente diferenciable de $\mathbb{R}^n$ en si mismo, por cada $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ defina $F^v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como $F^v(x) = vF(x) = \sum_{i=1}^{n} v_i F_i(x)$. Si existe alguna metrica completa g de modo que para todo $v \neq 0$ se cumple alguna de las condiciones:*

(a) $\dfrac{\nabla^{(g)}F^v(x)}{||\nabla^{(g)}F^v(x)||_g^2}$ *es completo en $\mathbb{R}^n$, o*

(b) F^v satisface (PS), respecto a g: (3.2) *con* $||\nabla^{(g)}F^v(x)||_g$.

Entonces, F es bijectiva.

Demostración. La condición (b) implica que $\nabla^{(g)}F^v(x)$ satisface

$$\int_0^{\infty} \min_{|x|=r} |\nabla^{(g)}F^v(x)|dr = \infty$$

y por lo tanto se cumple (a). A partir de eso sólo se mostrará que (a) implica la biyectividad de F. Además, el difeomorfismo local $G = G_0$ de (3.3) que satisface $G(0) = 0$ y es una biyección si y solo si F lo es, pues $G(x) = F(x) - F(0)$. Además $G^v(x) = vG(x)$ satisface $\nabla G^v(x) = \nabla F^v(x)$. Por lo tanto sin perdida de generalidad podemos suponer que $F(0) = 0$. Si denotamos por $\beta_v : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ la solución maximal a derecha inducida por (a) con $\beta_v(0) = 0$ la aplicación

$$\psi(v) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad v = 0 \\ F\big(\beta_v(|v|^2)\big), & \text{si} \quad v \neq 0 \end{cases}$$

es continua. Por el teorema fundamental del calculo y la regla de la cadena se cumple

$$F^v\big(\beta_v(|v|^2)\big) = |v|^2$$

y por lo tanto la imagen inversa de cero, satisface

$$F^{-1}(0) \cap \beta_v[0,\infty) = \{0\}$$

Por lo tanto, como $\psi(\mathbb{R}^n) = F(\mathbb{R}^n)$ la biyectividad de F se obtiene a partir de la sobreyectividad de ψ que sigue a partir del Lemma 2.1 de [14] $\square$

Referencias

[1] Ambrosetti, A. & Rabinowitz, P. H. *Dual variational methods in critical point theory and applications.* J. Functional Analysis **14** (1973) 349–381.

[2] Bialynicki–Birula A. and Rosenlicht M; *Injective morphisms or real algebraic varieties,* Proc. Am. Math. Soc. **13** (1962) 200–204.

[3] Balreira E. C; *Foliations and global inversion* Comment. Math. Helv. **85** (2010) 73–93.

[4] Brezis H. & Nirenberg L. *Remarks on finding critical points* Comm. Pure Appl. Math. **44**, no. 8-9, (1991) 939–963.

[5] Campbell L, A; *Unipotent Jacobian matrices and univalent maps.* Contemp. Math. **264** (2000) 157–177.

[6] Chavarriga, J. & Sabatini, M. *A survey of isochronous centers.* Qual. Theory Dyn. Syst. **1** (1999), no. 1, 1–70.

[7] Chamberland M. & Meisters G; *A mountain pass to the Jacobian conjecture.* Canad. Math. Bull. **41**, 4 (1998) 442–451.

[8] Cima, A. van den Essen, A. Gasull, A. Hubbers, E. & Mañosas, F. *A polynomial counterexample to the Markus-Yamabe conjecture.* Adv. Math. **131** (1997) 453–457.

[9] Fernandes A, Gutierrez C. & Rabanal R; *On local diffeomorphims of* $\mathbb{R}^n$ *that are injective,* Qual. Theory of Dyn. Sys. **5** (2004) 129–136.

[10] Fernandes A, Gutierrez C. & Rabanal R; *Global asymptotic stability for differentiable vector fields of* $\mathbb{R}^2$ J. Differential Equations **206** (2004) 470–482.

[11] Gutierrez, C. *A solution to the bidimensional global asymptotic stability conjecture.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **12** (1995) 627–671.

[12] Keller O. H; *Ganze Cremona–Transformationen,* Monats, Math. Physik **47** (1939) 299–306.

[13] Noble and Daniel Applied Linear Algebra, second edition, Prentince Hall, 1977.

[14] Nollet S. & Xavier F; *Global inversion via the Palais-Smale condition.* Discrete Contin. Dyn. Syst. **8**, 1 (2002) 17–28.

[15] Nollet S. & Xavier F; *Holomorphic injectivity and Hopf map.* GAFA, Geom. funct. anal. **14**, 1 (2004) 1339–1351.

[16] Olech, C. *On the global stability of an autonomous system on the plane.* Contributions to Differential Equations **1** (1963) 389–400.

[17] Palais R. S. & Smale S; *A generalized Morse theory.* Bull. Amer. Math. Soc. **70** (1964) 165–172.

[18] Parthasarathy, T. On global univalence theorems. Lecture Notes in Math. **977**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1983.

[19] Pinchuck S; *A counterexample to the strong Jacobian conjecture,* Math. Z. **217** (1994) 1–4.

[20] Rabanal, R *On differentiable area–preserving maps of the plane.* Bull. Braz. Math. Soc. (N. S.) **41** (2010) 73–82.

[21] Rabier, P. J. *On global diffeomorphisms of Euclidean space.* Nonlinear Anal. **21**, 12 (1993) 925–947.

[22] Rabier, P. J. *Global surjectivity of submersions via contractibility of the fibers.* Trans. Amer. Math. Soc. **347**, 9 (1995), 3405–3422.

[23] Rabier, P. J. *Ehresmann fibrations and Palais-Smale conditions for morphisms of Finsler manifolds.* Ann. of Math. (2) **146**, 3 (1997) 647–691.

[24] Sabatini, M. *A connection between isochronous Hamiltonian centres and the Jacobian conjecture.* Nonlinear Anal. **34** (1998), no. 6, 829–838.

[25] Silva, Elves A. B & Teixeira, Marco A. *Global asymptotic stability on Euclidean spaces.* Nonlinear Anal. Ser. A: Theory Methods, **50**,1 (2002) 91–114.

[26] Smyth S, and Xavier, F; *Injectivity of local diffeomorphisms from nearly spectral conditions.* J. Differential Equations **130**, 2 (1996) 406–414.

[27] van den Essen A; Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture, *Progress in Mathematics,* **190**. Berlin: Birkhäuser, 2000, 329+xiii pp.

[28] Zeidler, E. Nonlinear functional analysis and its applications. III. Variational methods and optimization. Translated from the German by Leo F. Boron. Springer-Verlag, New York, 1985. xxii+662 pp.

Abstract

We describe some classical results on global injectivity of local diffeomorphism on Euclidian spaces. This is not exhaustive, and it does not purport to be a complete history, it simply describes some useful results in injectivity. The first part describes some results related to the Qualitative Theory of Differential Equations, and presents a characterization of global injectivity on planar applications by using the existence of an isochronous global center. The Global Asymptotic Stability Problem is also described. The second part describes the so called Palais-Smale condition.

Keywords: Global injectivity, Palais-Smale condition, isochronous center

Roland Rabanal
Sección Matemática, Departamento de Ciencias,
Pontificia Universidad Católica del Perú
rrabanal@pucp.edu.pe