HIPERSUPERFICIES GENERALIZADAS EN $\mathbb{C}^n$

Percy Fernández S.[1]***, Jorge Mozo F.***[2] ***y Hernán Neciosup P.***[2]

Noviembre, 2013

Resumen

El objetivo principal de este artículo es demostrar que la reducción de singularidades de una hipersuperficie generalizada coincide con una reducción de singularidades de su separatriz; el cual es una generalización del resultado presentado en [8] por los dos primeros autores.

MSC(2010): 37F75, 32S65.

Palabras clave: *Foliaciones holomorfas, Clasificación analítica, Resolución de singularidades.*

[1] *Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias, PUCP.*

[2] *Facultad de Ciencias, Campus Miguel Delibes, Univ. de Valladolid, España.*

1. Introducción

En [8] se estudian los gérmenes de foliaciones holomorfas singulares no-dicríticas de co-dimensión uno en $(\mathbb{C}^3, 0)$ tal que en su reducción de singularidades no aparecen silla nodo. Este tipo de foliaciones son denominados *superficies generalizadas*. Demuestran que una reducción de singularidades de su separatriz coincide con la reducción de singularidades de la foliación, resultado que es análogo al que muestran C. Camacho, A. Lins Neto y P. Sad en [1] para curvas generalizadas no dicríticas.
La noción anterior puede darse en un espacio de dimensión arbitraria, mediante secciones transversales, y es así como llevamos acabo la generalización del mismo.

Sea $\mathcal{F}$ una foliación en $(\mathbb{C}^n, 0)$ definida por una 1-forma integrable ω. Una aplicación $\varphi : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$, es llamada ***genéricamente transversal*** a $\mathcal{F}$ si $\varphi^*(\mathcal{F}) \not\equiv 0$; geométricamente esto significa que la imagen de φ es no invariante (ver [2]).
Por otro lado, una inmersión $i : (\mathbb{C}^l, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ se dice ***transversal*** a $\mathcal{F}$ si se cumplen las siguientes condiciones

1. $\operatorname{Sing}(i^*\omega) = i^{-1} \operatorname{Sing}(\omega)$;
2. $\operatorname{codim} \operatorname{Sing}(i^*\omega) = \text{mín} \Big\{ l - \text{mín} \big\{0, \dim \operatorname{Sing}(\omega)\big\}, \operatorname{codim} \operatorname{Sing}(\omega) \Big\}$.

Para más detalles ver [11] y [6], con el convenio: $\dim(\emptyset) = -1$ para el caso de foliaciones regulares. Cuando $l = 2$, la condición (2) es equivalente a $\operatorname{Sing}(i^*\omega) \subseteq \{0\}$. Así, la inmersión $i : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ es transversal a $\mathcal{F}$ si y solo si

- $\nu_0(i^*\omega) = \nu_0(\omega)$, donde ν_0 denota el orden en 0;
- $\operatorname{Sing}(i^*\omega) \subseteq \{0\}$.

Observe que cualquier inmersión trasversal a $\mathcal{F}$ es genéricamente transversal, lo recíproco es falso.

En $(\mathbb{C}^2, 0)$ una foliación holomorfa singular $\mathcal{F}$, está dado por $\omega = 0$, donde ω una 1-forma holomorfa. Se dice que $\mathcal{F}$ es ***dicrítica***, si tiene una infinidad de curvas analíticas invariantes (separatrices). Por otro lado, sabemos que existe la reducción de singularidades de $\mathcal{F}$ debido a Seidenberg [12]. Esto nos permite dar una formulación equivalente del concepto de dicriticidad, en el sentido siguiente: la foliación $\mathcal{F}$ es dicrítica en el origen si y solo si existe una reducción de singularidades tal que el divisor excepcional tenga una componente irreducible genéricamente transversal.

En dimensión tres, una foliación holomorfa singular $\mathcal{F}$, está dada por una 1-forma holomorfa ω tal que $\omega \wedge d\omega = 0$. En este caso, existen distintas nociones de dicriticidad no necesariamente equivalentes (ver [4], [5], [7]). Nosotros adoptamos la noción debido a F. Cano en [2]: una foliación holomorfa singular $\mathcal{F}$ sobre $(\mathbb{C}^n, 0)$ es llamada ***dicrítica*** si existe $\varphi : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$, germen de aplicación analítica, tal que

1. $\varphi^* \mathcal{F} = (dx = 0)$.
2. $\varphi(y = 0)$ es invariante para $\mathcal{F}$.

Se dice que $\mathcal{F}$ es ***estrictamente dicrítica*** en el origen si existe un germen de aplicación analítica no invariante para $\mathcal{F}$, $\varphi : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ tal que $\varphi^* \mathcal{F}$ tiene una infinidad de curvas analíticas invariantes que se acumulan en el origen. Estos conceptos coinciden en el caso 2-dimensional y son equivalentes a decir que la foliación tiene infinidad de curvas analíticas invariantes en el origen (ver [2]).

En [9], damos una forma pre-normal de las foliaciones cuspidales casi-homogéneas en $(\mathbb{C}^n, 0)$ con separatriz prescrita. En particular, para un caso especial, damos una condición necesaria, análoga a la de F. Loray [10] de manera que después de una resolución de singularidades de su separatriz, las singularidades de la foliación son automáticamente simples en el sentido de Cano-Cerveau [5]. Un trabajo en preparación

por los autores, es ver si la clasificación analítica de este tipo de foliaciones coincide con la clasificación analítica de la holonomía proyectiva de una cierta componente del divisor excepcional. Esta propiedad es similar a la propiedad de ser curva generalizada y es una motivación a la generalización de esta noción a dimensión tres [8] y en consecuencia para dimensión arbitraria.
Cuando el espacio ambiente es de dimensión mayor a tres, aún no se conoce una forma de reducir las singularidades. En dimensión tres la reducción de singularidades se debe a F. Cano y D. Cerveau [5] en el caso no-dicrítico y por F. Cano [4] en el caso dicrítico. Por otro lado la noción de genéricamente transversal y el de no-degenerada transversa debido a [11] junto con un trabajo de existencia de separatriz, en dimensión arbitraria, debido a [7], llevan al resultado principal:

Teorema 1. *Sea $\mathcal{F}$ una hipersuperficie generalizada en $(\mathbb{C}^n, 0)$, y $S := (f = 0)$ la ecuación reducida del conjunto de sus separatrices. Dado $\pi : (M, E) \to (\mathbb{C}^n, 0)$, el morfismo de una resolución de singularidades inmersa de S, entonces $\pi^*(\mathcal{F})$ tiene singularidades simples adaptadas al divisor E.*

2. Preliminares: Singularidades Pre-simples y Simples

Sea X una variedad compleja de dimensión n. Dado $p \in X$ y ω un germen de 1-forma diferencial e integrable tal que $\omega = 0$ define una foliación, $\mathcal{F}$, localmente en p. Consideremos el subespacio

$$\mathcal{D}(\omega)(p) = \Big\{ \mathcal{X}(p) : \ \mathcal{X} \in \mathfrak{X}_{X,p} \quad y \quad \omega(\mathcal{X}) = 0 \Big\} \subset T_pX.$$

La co-dimensión de $\mathcal{D}(\omega)(p)$ en T_pX es llamado el ***tipo dimensional*** denotado por $t = \tau(\mathcal{F}, p)$, este número representa la mínima cantidad de coordenadas necesarias para expresar un generador de $\mathcal{F}$. Sea $E \subset X$ un divisor con cruzamientos normales tal que las componentes irreducibles de E son no-dicríticas, es decir, cada componente irreducible de E es invariante por $\mathcal{F}$. A continiación presentamos algunas deficiciones de las singularidades pre-simples y simple, debido a F. Cano (ver [5]).

Denotemos por $e = e(E,p)$ el número de componentes irreducibles de E a través de p. Claramente $e \leq t$. Así, podemos tomar coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ alrededor del punto $p = (0, \ldots, 0)$ y $A \subset \{1, \ldots, t\}$ tal que

$$E = \left\{ \prod_{i \in A} x_i = 0 \right\}$$

y entonces ω es escrito como

$$\omega = \left(\prod_{i \in A} x_i \right) \left(\sum_{i \in A} b_i(x_1, \ldots, x_t) \frac{dx_i}{x_i} + \sum_{i \in \{1,\ldots,t\} - A} b_i(x_1, \ldots, x_t) dx_i \right) \tag{2.1}$$

Definimos el ***orden adaptado*** (orden de ω en p, relativo a E):

$$\nu(\mathcal{F}, E, p) = \text{mín}\{\nu_p(b_i) : i = 1, \ldots, t\},$$

donde $\nu_p(b_i)$ es la multiplicidad algebraica de b_i en p. Definimos también la ***multiplicidad adaptada***

$$\mu(\mathcal{F}, E, p) = \text{mín} \left\{ \{\nu_p(b_i)\}_{i \in A} \cup \{\nu_p(b_i) + 1\}_{i \notin A} \right\}.$$

Por definición tenemos las siguientes desigualdades

$$\nu(\mathcal{F}, E, p) \leq \mu(\mathcal{F}, E, p) \leq \nu(\mathcal{F}, E, p) + 1.$$

Definición 2. Una singularidad $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$ es llamada ***pre-simple*** de $\mathcal{F}$ adaptada a E si y solo si una de las siguientes propiedades se cumple:

1. $\nu(\mathcal{F}, E, p) = 0$
2. $\nu(\mathcal{F}, E, p) = \mu(\mathcal{F}, E, p) = 1$ y existe un i tal que la parte lineal b_i^1 de b_i no depende solamente de las variables $\{x_i : i \in A\}$.

Observe que en dimensión 2 una singularidad pre-simple corresponde a una singularidad de multiplicidad 1 que no es *nilpotente.*

Definición 3. Una singularidad $p \in \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ es llamada ***simple*** de $\mathcal{F}$ adaptada a E si y solo si es formalmente equivalente a una de las formas:

1. Existen $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, s$, tal que

$$\omega = \prod_{i=1}^{s} x_i \left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i \frac{dx_i}{x_i} \right)$$

   y para todo $n_1, \ldots, n_s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ no todos nulos tenemos $\sum_{i=1}^{s} n_i \lambda_i \neq 0$.

2. Existe un entero k, $1 \leq k \leq s$ tal que

$$\omega = \prod_{i=1}^{s} x_i \left(\sum_{i=1}^{k} p_i \frac{dx_i}{x_i} + \psi(x_1^{p_1} \ldots . x_k^{p_k}) \sum_{i=2}^{s} \alpha_i \frac{dx_i}{x_i} \right)$$

   donde los $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{N}$ primos entre si, $\psi(t) \in \mathbb{C}[[t]]$, con $\psi(0) \neq 0$; $\alpha_i \in \mathbb{C}$ y para todo entero $n_{k+1}, \ldots, n_s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ no todos nulos tenemos $\sum_{i=k+1}^{s} n_i \alpha_i \neq 0$.

Si p es una singularidad pre-simple de tipo dimensional t, considere el conjunto

$$A := \Big\{ q \in U \setminus \{p\} : q \in \mathrm{Sing}(\mathcal{F}), U \text{ una vecindad de } p \Big\}.$$

Todos los elementos de este conjunto son singularidades de tipo dimensional 2 (ver [5]). Entonces, p es simple si y solo si todos los elementos en A son simples.

3. Hipersuperficie Generalizada

La definición de ***curva generalizada*** fue introducido por C. Camacho, A. Lins Neto y P. Sad en [1]: foliación holomorfa singular de co-dimensión uno en $(\mathbb{C}^2, 0)$ que no admite sillas-nodos en su reducción de singularidades. Sea $(f = 0)$ la ecuación analítica del conjunto de separatrices de una curva generalizada $\mathcal{F}$ y ω la 1-forma que define $\mathcal{F}$, en [1] demuestran:

1. $\nu_0(\omega) = \nu_0(df)$;

2. La reducción de singularidades de $\mathcal{F}$ coincide con la reducción de $(f = 0)$.

Cuándo el espacio ambiente es tres, la noción anterior se verifica en [8] con $\mathcal{F}$ no-dicrítica. Si el espacio ambiente es $n > 3$ el resultado principal en [8] se sigue verificando y que a continuación pasamos a dar detalles de la demostración.

Definición 4. Sea $\mathcal{F}$ una foliación holomorfa de co-dimension uno definida por una 1-forma integrable ω in $(\mathbb{C}^n, 0)$. Diremos que $\mathcal{F}$ es una ***hipersuperficie generalizada*** si se satisfacen las siguientes condiciones

1. $\mathcal{F}$ es no dicrítica.

2. Para cada aplicación $\varphi : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$, genéricamente transversal a $\mathcal{F}$, $\varphi^*\mathcal{F}$ es una curva generalizada.

Lema 5. *Sea $\mathcal{F}$ una hipersuperficie generalizada generada por una 1-forma holomorfa ω y $S := (f = 0)$ la ecuación reducida del conjunto de sus separatrices. Entonces $\nu_0(\omega) = \nu_0(df)$.*

Demostración. Dada una inmersión $i : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ transversal a $\mathcal{F}$. Por definición $i^*\mathcal{F}$ es curva generalizada, con $\big(i^* f = 0\big)$ como separatriz.

Debido a [5] y [7], cualquier separatriz de $i^*\mathcal{F}$ se extiende a una separatriz de $\mathcal{F}$. Por transversalidad se sigue

$$\nu_0(\omega) = \nu_0(i^*\omega).$$

Como $i^*\mathcal{F}$ es curva generalizada, entonces

$$\nu_0(i^*\omega) = \nu_0(d(f \circ i)) = \nu_0(df).$$

Así, $\nu_0(\omega) = \nu_0(df)$. □

Lema 6. *Sea $\mathcal{F}$ una hipersuperficie generalizada en $(\mathbb{C}^n, 0)$. Si $\mathcal{F}$ tiene exactamente n hipersuperficies regulares transversales como separatriz, entonces $\mathcal{F}$ es simple.*

Demostración. Por hipótesis, podemos elegir coordenadas locales tales que el conjunto de separatrices de $\mathcal{F}$ está dado por

$$S := \left(\prod_{i=1}^{n} x_i = 0 \right).$$

Entonces $\mathcal{F}$ está generado por una 1-forma

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{dx_i}{x_i} \right), \tag{3.1}$$

donde $f_i, a_i \in \mathbb{C}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$.
Dada cualquier inmersión transversal a $\mathcal{F}$ en torno del origen, $i : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$, $i^*\mathcal{F}$ es una curva generalizada con n curvas regulares transversales como separatriz, así $\nu_0(i^*\omega) = n - 1$. Luego, por transversalidad se tiene

$$\nu_0(i^*\omega) = \nu_0(\omega) = n - 1. \tag{3.2}$$

De (3.1) y (3.2) se sigue, $\nu_0(f_i) = n - 1$ para algún i, así $\nu_0(a_i) = 0$ para algún i y por tanto el origen es una singularidad pre-simple. Además tenemos que el origen es una esquina. Por otro lado, la hipótesis de la no-dicriticidad de $\mathcal{F}$, implica la no-resonancia estricta de la singularidad,

por tanto **0** es simple (Ver [3], Def. 13).
Otra forma de ver esto es: dada cualquier inmersión transversal a $\mathcal{F}$,

$$i_p : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^n, p),$$

en torno de un punto $p \in \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$, con $p \neq \mathbf{0}$, entonces $i_p^*(\mathcal{F})$ es una curva generalizada con $n-1$ curvas regulares transversales como separatriz, por tanto

$$\nu_0(i^*\omega) = n - 2.$$

Luego por transversalidad se tiene

$$\nu_0(i^*\omega) = \nu_p(\omega) = n - 2. \tag{3.3}$$

Por otro lado, entorno de p, $\mathcal{F}$ está generado por una 1-forma ω_p

$$\omega_p = \left(\prod_{i=1}^{n-1} \tilde{x}_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{a}_i \frac{d\tilde{x}_i}{\tilde{x}_i}\right).$$

Entonces $\nu_0(\tilde{a}_i) = 0$ para algún $i \in \{1, \cdots, n-1\}$ y en consecuencia p es una singularidad pre-simple.
Ahora tomamos una inmersión transversal a $\mathcal{F}$ en torno de un punto $q \in \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ cerca de p. Prosiguiendo como antes, q es una singularidad pre-simple.
Por recurrencia, secciones transversales en torno de puntos p cerca del origen son simples y por tanto, el origen es singularidad simple de $\mathcal{F}$. $\square$

Observación
La condición de no dicritricidad en el Lema 6, permite pasar de pre-simple a simple. Lo que no ocurre en el ejemplo siguiente: para $n = 3$ la foliación $\mathcal{F}$ generada por la 1-forma ω

$$\omega = \frac{dx}{x} + p\frac{dy}{y} - (1+p)\frac{dz}{z};\ p \in \mathbb{I}.$$

El origen es una singularidad pre-simple, además es una esquina, sin embargo no podemos concluir que sea simple (no satisface la condición de no resonancia estricta ver [3]). Este ejemplo, se debe a Felipe Cano.

Teorema 1.
Sea $\mathcal{F}$ una hipersuperficie generalizada en $(\mathbb{C}^n, 0)$, y $S := (f = 0)$ la ecuación reducida del conjunto de sus separatrices. Dado $\pi : (M, E) \to (\mathbb{C}^n, 0)$, el morfismo de una resolución de singularidades inmersa de S, entonces $\pi^*(\mathcal{F})$ tiene singularidades simples adaptadas al divisor E.

Demostración. Sea

$$\pi : (M_n, D_n) \xrightarrow{\pi_n} (M_{n-1}, D_{n-1}) \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\pi_1} (M_0, \mathbf{0}) \ .$$

Con $(M_0, \mathbf{0}) = (U, \mathbf{0}) \subset (\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$, una reducción de singularidades de S. Después de esto, en M_n tenemos la foliación $\mathcal{F}_n = \pi^*(\mathcal{F})$, transformado estricto de $\mathcal{F}$ por π. Cualquier $p \in \mathrm{Sing}(\mathcal{F}_n)$ se encuentra en la intersección de por lo menos dos hipersuperficies H_i regulares invariantes por $\mathcal{F}_n$.

Sea $p \in \bigcap_{i=2}^{k} H_i$ para cada $k \in \{2, 3, \cdots, n\}$ e $i_p : \mathcal{P} \simeq (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^n, p)$ una inmersión, entorno de p, transversal a $\mathcal{F}_n$, $i^*\mathcal{F}_n$ tiene k curvas regulares transversales como separatriz ($p = \mathbf{0}$, cuando $k = n$). Por el Lema 6, p es simple de tipo dimensional k y por tanto $\mathcal{F}_n$ es simple. $\square$

Agradecimiento

El primer y tercer autor agradecen el financiamiento de la Pontificia Universidad Católica del Perú mediante el proyecto DGI 2013-0047.
El segundo y tercer autor agradecen el financiamiento parcial al proyecto nacional Español MTM2010-15471. El tercer autor es financiado por el programa de becas de doctorado FPI-UVa para la formación de personal investigador (Universidad de Valladolid).

Referencias

[1] C. Camacho, A. Lins Neto, P. Sad, *Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields.* J. Differential Geom., 20 (1984), no. 1, 143-174

[2] F. Cano, *Dicriticidad de foliaciones holomorfas de codimensión uno.* Seminario Iberoamericano de Matemáticas. Vol. 3. Fascículo V-VI (2008).

[3] F. Cano. *Reduction of the singularities of codimensión one holomorphic foliations in dimension three.* Annals of Math. 160 (2004), 907–1011.

[4] F. Cano. *Dicriticalness of a singular foliations.*pp. 73-94 Holomorphic Dymamics (México 1986), Lecture Notes in Mathematics 1345, Springer-Verlag, 1988.

[5] F. Cano, D. Cerveau, *Desingularization of non-dicritical holomorphic foliations and existence of separatrices.*, Acta Math., 169 (1992), p. 1-103.

[6] F. Cano, D. Cerveau, J. Déserti, *Théorie élémentaire des feuilletages holomorphes singuliers.* Collection Echelles, Belin.

[7] F. Cano, J.-F. Mattei.*Hypersurfaces Intégrales des feuilletages holomorphes.* Ann. Inst. Fourier 42, (1992), p.49-72.

[8] P. Fernández-Sánchez, J. Mozo Fernández. *On generalized surfaces in* $(\mathbb{C}^3, 0)$. Astérisque 323 (2009), 261–268.

[9] P. Fernández-Sánchez, J. Mozo Fernández & H. Neciosup Puican. *On codimension one foliations with prescribed cuspidal separatrix.* preprint arXiv:1306.4695

[10] F. Loray, *Réduction formalle des singulatiés cuspidales de champs de vecteurs analytiques.* J. of Diff. Equations 158 (1999), 152-173.

[11] J.F. Mattei, R. Moussu, *Holonomie et intégrales premiéres*, Ann. Sci. École Normale Sup. 13 (1980) 469–523.

[12] A. Seidenberg. *Reduction of the singularities of the differentiable equation* $Ady = Bdx$. Amer. J. Math., 90 (1968), 248-269.

Abstract

The main aim of this paper is proof that the reduction of the singularities of a generalized hypersurfaces agrees with a reduction of singularities of its separatrix; which is a generalization of the result presented in [8] by the first two authors.

Keywords: Holomorphic foliations. Analytic classification. Resolution of singularities.

Percy Fernández Sánchez
Sección Matemática, Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú
pefernan@pucp.edu.pe

Jorge Mozo Fernández
Dpto. Matemática Aplicada, Facultad de Ciencias,
Campus Miguel Delibes, Universidad de Valladolid
Paseo de Belén, 7, 47011 Valladolid, España.
jmozo@maf.uva.es

Hernán Neciosup Puicán
Dpto. Análisis Matemático, Álgebra, Geometría y Topología, Facultad de Ciencias,
Campus Miguel Delibes, Universidad de Valladolid
Paseo de Belén, 7, 47011 Valladolid, España.
hneciosup@agt.uva.es