MEDIDA ALEATORIA DE POISSON

Johel Beltran[1]

Noviembre, 2013

Resumen

En esta monografía continuamos con el desarrollo iniciado en [1] sobre las herramientas fundamentales usadas en el abordaje propuesto en [2,3] para el estudio de la metaestabilidad. Definimos las medidas aleatorias de Poisson y probamos las principales propiedades que serán usadas para construir procesos de Markov con espacio de estados finito. Esta forma de abordar la propiedad Markoviana nos permitirá dar una demostración probabilística de que la ley de un proceso de Markov resuelve un problema martingala.

MSC(2010): 60G07.

Palabras clave: *Medida aleatoria de Poisson, proceso de Markov, Martingalas.*

1. *Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias, PUCP.*

1. Introducción

En los artículos [2, 3] fue propuesto el uso del problema martingala en el estudio del fenómeno conocido como metaestabilidad. Las principales herramientas usadas en este abordaje, además del problema martingala, son la traza de un proceso de Markov y teoría potencial. Estas herramientas son bastante bien conocidas en la literatura de procesos estocásticos. La contribución en los artículos mencionados es el modo en que se conjugan estas herramientas para poder deducir el comportamiento metaestable de procesos de Markov. La estrategia que es usada es original en la literatura de metaestabilidad.

En el texto [1], se examina el concepto de traza de un proceso de Markov y su relación con teoría potencial. Ambas herramientas son usadas en conjunto para resolver un problema interesante sobre procesos de Markov. Más precisamente, su representación en circuitos eléctricos y el principio variacional de Dirichlet. En esta monografía continuamos con el desarrollo de las herramientas usadas en [2, 3], que el lector puede usar tanto como para la lectura de los artículos como para desarrollar nuevos proyectos dentro del abordaje propuesto por tales trabajos.

El problema martingala es el principal ingrediente en este abordaje. Consiste en caracterizar la ley de un proceso de Markov como la única ley que consigue tornar una cierta familia de procesos, martingalas. Son conocidas las pruebas analíticas de esta caracterización usando el generador y semigrupo asociados al proceso de Markov. Para dar una prueba probabilística de este resultado veremos que es natural considerar las medidas aleatorias de Poisson. Estos objetos aleatorios consisten en una forma particular de marcar puntos de forma aleatoria sobre un conjunto S.

Para la aplicación en procesos de Markov con espacio de estados finito E, marcaremos puntos sobre el conjunto

$$(E \times E) \times (0, \infty) \, ,$$

donde $E \times E$ representa el conjunto de posibles transiciones para el proceso de Markov y $(0, \infty)$ representa el tiempo, que contiene los instantes en que estas transiciones ocurren. Así, el plan será reconstruir el proceso de Markov a partir de los puntos que sus transiciones marcan sobre el espacio $(E \times E) \times (0, \infty)$. La ley adecuada para la propiedad Markoviana del proceso corresponde a la ley de una medida aleatoria de Poisson sobre $(E \times E) \times (0, \infty)$. Esta forma de construir el proceso nos permitirá deducir la propiedad martingala de forma más clara y natural. Además, observar las medidas aleatorias de Poisson correspondiendo a procesos de Markov en metaestabilidad, admite la posibilidad de mejorar los resultados obtenidos en [2, 3].

El objetivo de esta monografía es definir este modo particular de marcar puntos de forma aleatoria sobre un conjunto S y estudiar sus propiedades más fundamentales. Usaremos luego este texto de referencia para la construcción de un proceso de Markov, con espacio de estados finito, a partir de una medida aleatoria de Poisson. En el texto [5] el lector interesado puede encontrar más información sobre un modo más general de medidas aleatorias.

En la siguiente sección estableceremos el contexto en el que trabajaremos e identificaremos los subconjuntos enumerables (o finitos) de un conjunto con las medidas simples de contar sobre dicho conjunto. En la Sección 3 recordamos la definición de la distribución de Poisson y damos algunos cálculos sobre esta distribución. En la Sección 4 definimos las medidas aleatorias de Poisson y en la Sección 5 mejoramos las propiedades enunciadas en la definición para futuras aplicaciones. En la última sección examinamos las integrales con respecto a medidas aleatorias de Poisson, que usaremos luego cuando relacionemos tales medidas aleatorias con los procesos de Markov en espacios de estado finitos.

2. Preliminares

Dado un espacio medible $(S, \mathcal{B})$, denotaremos por $\mathcal{M}_p(S)$ el espacio de todas las medidas θ sobre $(S, \mathcal{B})$ de la forma

$$\theta = \sum_{s \in E} \delta_s$$

para algún E subconjunto enumerable o finito de S. Asumiremos que la medida nula pertenece también a $\mathcal{M}_p(S)$ y corresponde al caso en que $E = \varnothing$. Para simplificar la exposición, durante todo el texto diremos que un conjunto es "enumerable" para querer decir que el conjunto es infinito enumerable, finito o vacío.

Asumiremos que $(S, \mathcal{B})$ es tal que los conjuntos unitarios son medibles

$$\{s\} \in \mathcal{B} \,, \quad \forall s \in S \,. \tag{2.1}$$

Para cada $\theta \in \mathcal{M}_p(S)$ denotaremos por E_θ el *único* subconjunto enumerable de S tal que

$$\theta = \sum_{s \in E_\theta} \delta_s \,.$$

La unicidad de E_θ está garantizada por Vemos así que (2.1) garantiza que $\theta \mapsto E_\theta$ define una correspondencia biunívoca entre el espacio de subconjuntos enumerables de S y $\mathcal{M}_p(S)$.

Vamos a definir un modo aleatorio de marcar un conjunto enumerable de puntos sobre S o equivalentemente de sortear un elemento de $\mathcal{M}_p(S)$. Por cada $A \in \mathcal{B}$ definimos la función $\Psi_A : \mathcal{M}_p(S) \to [0, \infty]$ como

$$\Psi_A(\theta) := \theta(A) = \# E_\theta \cap A \,, \quad \forall \theta \in \mathcal{M}_p(S) \,, \tag{2.2}$$

es decir, la cantidad de puntos de E_θ que se encuentran dentro de A. Una vez sorteado un elemento de $\mathcal{M}_p(S)$, nos interesará la familia de observaciones

$$(\Psi_A)_{A \in \mathcal{B}} \,.$$

Por este motivo, dotaremos a $\mathcal{M}_p(S)$ del σ-álgebra

$$\mathcal{G} \ := \ \sigma(\Psi_A : A \in \mathcal{B}) \ .$$

Este será el σ-álgebra usado para todas las cuestiones de medibilidad sobre $\mathcal{M}_p(S)$.

Definition 2.1. *Un elemento aleatorio de $\mathcal{M}_p(S)$ es una función medible*

$$\mathcal{N} : \Omega \to \mathcal{M}_p(S)$$

definida sobre algún espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$.

Dado un elemento aleatorio $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}_p(S)$, denotaremos

$$\mathcal{N}_A \ := \ \Psi_A \circ \mathcal{N} \ , \quad \forall A \in \mathcal{B} \ .$$

Es claro que $\{\mathcal{N}_A : A \in \mathcal{B}\}$ resulta una familia de variables aleatorias tomando valores en $[0, \infty]$. Por cada $\omega \in \Omega$, la medida $\mathcal{N}(\omega) \in \mathcal{M}_p(S)$ es de la forma

$$\mathcal{N}(\omega) = \sum_{s \in E(\omega)} \delta_s$$

para algún subconjunto enumerable (aleatorio) $E(\omega) \subseteq S$. Luego

$$\mathcal{N}_A(\omega) \ = \ \#E(\omega) \cap A$$

donde $\#$ denota cardinalidad. Es decir, $\mathcal{N}_A$ indica la cantidad (aleatoria) de puntos del conjunto $E(\omega)$ que caen dentro de A.

Para definir un modo de sortear un elemento aleatorio de $\mathcal{M}_p(S)$ tenemos que determinar una ley de probabilidad sobre $(\mathcal{M}_p(S), \mathcal{G})$. Esta ley definirá una ley para cada ψ_A, que además debe ser una ley con soporte sobre $\mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$. Para la aplicación en cadenas de Markov nos interesa que estas leyes sean distribuciones de Poisson.

3. Distribución de Poisson

En esta sección definimos una familia de probabilidades sobre el conjunto de enteros no negativos. Consideremos el conjunto

$$\mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

y denotamos por $2^{\mathbb{Z}_+}$ su respectivo conjunto potencia. Dado $\lambda > 0$, una probabilidad sobre $(\mathbb{Z}_+, 2^{\mathbb{Z}_+})$ es llamada *distribución de Poisson de parámetro* λ si con respecto a ella la probabilidad de cada subconjunto unitario $\{k\}$ es

$$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \, .$$

Dada una variable aleatoria X, usaremos la notación usual $X \sim Poiss(\lambda)$ para decir que la ley de X es una distribución de Poisson de parámetro λ. La siguiente proposición resume algunos datos que usaremos sobre la distribución de Poisson

Proposition 3.1. *Sea X una variable aleatoria con distribución de Poisson de parámetro $\lambda \in (0, \infty)$.*

(a) La función característica $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de X es

$$\phi(u) \;=\; e^{\lambda(e^{iu}-1)} \, .$$

(b) El valor esperado de X es λ.

(c) Si Y es independiente de X y $Y \sim Poiss(\sigma)$ entonces $X + Y \sim Poiss(\lambda + \sigma)$.

Demostración. (a) Un cálculo simple prueba la primera afirmación

$$\phi(u) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} e^{iuk} \left(e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \right) \;=\; e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{iu}\lambda)^k}{k!} \;=\; e^{-\lambda} e^{\lambda e^{iu}} \, .$$

(b) El valor esperado de X coincide con $(-i)\phi'(0) = \lambda$.

(c) Si ϕ_X, ϕ_Y y ϕ_{X+Y} son las funciones características de X, Y y Z respectivamente entonces tenemos la relación $\phi_{X+Y}(u) = \phi_X(u)\phi_Y(u)$ para todo $u \in \mathbb{R}$. Luego,

$$\phi_{X+Y}(u) \;=\; e^{\lambda(e^{iu}-1)}e^{\sigma(e^{iu}-1)} \;=\; e^{(\lambda+\sigma)(e^{iu}-1)}\,.$$

Esto prueba que $X + Y \sim Poiss(\lambda + \sigma)$.

$\square$

El parámetro λ nos permite entonces calibrar el valor esperado de la variable $X \sim Poiss(\lambda)$. Si dos variables tienen distribución de Poisson, será "mayor" el que tenga el mayor parámetro en su distribución de Poisson. La siguiente proposición ofrece un enunciado preciso de esta afirmación.

Proposition 3.2. *Sean X y X' dos variables con distribución de Poisson de parámetros λ y λ'. Supongamos que $\lambda < \lambda'$. Si $f : \{0, 1, 2, \dots\} \to \mathbb{R}$ es una función creciente entonces $E[f(X)] < E[f(X')]$.*

Demostración. Primero construiremos el siguiente acoplamiento de (X, X'). Considere una sucesión de variables i.i.d. $(\xi_n)_{n\geq 1}$ con distribución Bernoulli de parámetro $p := \lambda/\lambda'$ y una variable Y', definida en el mismo espacio de probabilidad, independiente de (ξ_n) y con distribución de Poisson de parámetro λ'. Ahora defina

$$Y \;:=\; \sum_{i=1}^{Y'} \xi_i$$

donde $Y = 0$ si $Y' = 0$. El Lema 3.3 abajo nos dice que $Y \sim Poiss(\lambda)$. Así tenemos $Y \sim X$ y $Y' \sim X'$. Además es claro que $Y \leq Y'$ y por tanto $f(Y) \leq f(Y')$. Ya que

$$P\{f(Y) < f(Y')\} \;>\; 0$$

entonces $E[f(Y)] < E[f(Y')]$. Observe que la integral de f está bien definida porque, siendo una función creciente, la parte negativa de f es limitada. Concluimos que

$$E[f(X)] \;=\; E[f(Y)] \;<\; E[f(Y')] \;=\; E[f(X')]\,.$$

Eso termina la prueba. $\square$

Lemma 3.3. *Sean $N \sim Poiss(\lambda)$ y $(\xi_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de variables con distribución Bernoulli de parámetro p, todas las variables definidas en un mismo espacio de probabilidad y todas independientes. Si definimos*

$$M \;:=\; \sum_{k=1}^{N} \xi_k\,,$$

donde $M = 0$ si $N = 0$, entonces $M \sim Poiss(p\lambda)$.

Demostración. Vamos a calcular la función característica de M:

$$\phi_M(u) \;=\; E(e^{iuM}) \;=\; P\{N=0\} + \sum_{n=1}^{\infty} E(e^{iu\sum_{k=1}^{n}\xi_k}\mathbf{1}_{\{N=n\}})\,. \quad (3.1)$$

Usando la independencia, la última sumatoria coincide con

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(e^{iu\sum_{k=1}^{n}\xi_k})P\{N=n\} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\big[E(e^{iu\xi_1})\big]^n e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\,.$$

La última expresión es igual a

$$e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\big[\lambda E(e^{iu\xi_1})\big]^n}{n!} \;=\; e^{-\lambda}(e^{\lambda[E(e^{iu\xi_1})]} - 1)\,.$$

Usando este cálculo en (3.1) obtenemos

$$\phi_M(u) \;=\; e^{-\lambda}(e^{\lambda[E(e^{iu\xi_1})]}) \;=\; e^{p\lambda(e^{iu}-1)}\,.$$

Esta es la función característica de una distribución de Poisson de parámetro $p\lambda$ y por lo tanto $M \sim Poiss(p\lambda)$. $\square$

Será útil para la exposición incluir los casos degenerados en que "$\lambda = 0$" y "$\lambda = \infty$". Denotaremos

$$X \sim Poiss(0) \quad \text{y} \quad X \sim Poiss(\infty) \tag{3.2}$$

para querer decir que $X = 0$ casi ciertamente y $X = \infty$ casi ciertamente, respectivamente.

Proposition 3.4. *Sea $(X_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de variables independientes con distribución*

$$X_n \sim Poiss(\lambda_n) \ , \quad \lambda_n \in [0, \infty]$$

para todo $n \geq 1$. Entonces la variable $Z := \sum_n X_n$ tiene distribución de Poisson con parámetro $\sum_n \lambda_n$.

Demostración. Podemos asumir que $\lambda_n < \infty$ para todo $n \geq 1$, porque caso contrario la afirmación es trivial. Por otro lado, si $\lambda_j = 0$ para un cierto j es claro que podemos descartar X_j de la suma. Es claro además que si $\{n : \lambda_n > 0\}$ es vacío la afirmación se cumple trivialmente. En el caso en que $\{n : \lambda_n > 0\}$ es finito la afirmación es consecuencia de (c) en Proposición 3.1.

Podemos entonces asumir, sin pérdida de generalidad, que $0 < \lambda_n < \infty$ para todo $n \geq 1$. Denotemos, para cada $k \geq 1$, la suma

$$\sigma_k := \sum_{n=1}^{k} \lambda_n \ .$$

Supongamos en primer lugar que $\sigma_k \uparrow \infty$. Fijemos $M \in \mathbb{N}$ arbitrario. Tenemos

$$P\{Z \leq M\} \ \leq \ P\left\{\sum_{n=1}^{k} X_n \leq M\right\} \ .$$

Gracias a (c) en la Proposición 3.1 tenemos que la probabilidad de la derecha es igual a

$$e^{-\sigma_k} \sum_{\ell=1}^{M} \frac{(\sigma_k)^\ell}{\ell!} \ .$$

Ya que la sumatoria es un polinomio en σ_k, la expresión arriba converge a cero cuando $k \uparrow \infty$. Eso prueba que

$$P\{Z \leq M\} \ = \ 0 \ .$$

Ya que $M \in \mathbb{N}$ fue arbitrario concluimos que $Z = \infty$ casi ciertamente. Supongamos ahora que $\sigma_k \uparrow \sigma < \infty$. Sabemos por (c) en la Proposición 3.1 que

$$Z_k \ := \ \sum_{n=1}^{k} X_n \ \sim \ Poiss(\sigma_k) \ , \quad \forall k \geq 1 \ .$$

Además, ya que Z_k converge a Z puntualmente, tenemos también convergencia de leyes. Esto implica que, si ϕ_k, ϕ son las funciones características de Z_k y Z respectivamente, entonces

$$\phi_k(u) \to \phi(u) \ , \quad \forall u \in \mathbb{R} \ .$$

Por (a) en Proposición 3.1 tenemos

$$\phi_k(u) = e^{\sigma_k(e^{iu}-1)} \ , \quad \forall u \in \mathbb{R} \ .$$

Luego,

$$\phi_k(u) \to e^{\sigma(e^{iu}-1)} \ , \quad \forall u \in \mathbb{R} \ .$$

Esto implica que Z tiene distribución de Poisson con parámetro σ. $\square$

4. Existencia de la Medida Aleatoria

En esta sección vamos a definir una familia de leyes de probabilidad sobre $(\mathcal{M}_p(S), \mathcal{G})$ llamadas medidas de Poisson, donde el conjunto de parámetros que define la familia es el conjunto de medidas finitas sobre $(\mathcal{M}_p(S), \mathcal{G})$. Las leyes en esta familia son llamadas de Poisson porque para cada elemento aleatorio $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}_p(S)$ con una de estas leyes resultará que, para cada $A \in \mathcal{B}$, $\mathcal{N}_A$ tendrá distribución de Poisson.

Es claro que si $A \subseteq B$ entonces $\mathcal{N}_A \leq \mathcal{N}_B$ y por tanto el parámetro de la ley de $\mathcal{N}_A$ debe ser menor o igual al parámetro de la ley de $\mathcal{N}_B$. De un modo más general, si A y B son conjuntos donde el "tamaño" de A es menor que el "tamaño de B" entonces esperamos que el parámetro de la ley de $\mathcal{N}_A$ sea menor que el parámetro de la ley de $\mathcal{N}_B$. El "tamaño" de cada conjunto $A \in \mathcal{B}$ será determinado por una medida Λ sobre $(S, \mathcal{B})$. Esta medida será el parámetro que determina esta familia de leyes.

Definition 4.1. *Dado el espacio de medida $(S, \mathcal{B}, \Lambda)$, una medida aleatoria de Poisson (MAP) de intensidad Λ es un elemento aleatorio $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}_p(S)$,*

$$\mathcal{N} : \Omega \to \mathcal{M}_p(S),$$

definida sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ de modo que:

(i) Si A_1, A_2, …, A_k son medibles en S disjuntos dos a dos, entonces las variables $\{\mathcal{N}_{A_1}, \ldots, \mathcal{N}_{A_k}\}$ son independientes.

(ii) Para cada $A \in \mathcal{B}$, $\mathcal{N}_A \sim Poiss(\Lambda(A))$

La ley de una medida aleatoria de Poisson $\mathcal{N}$ está únicamente determinada por su intensidad Λ.

Lemma 4.2. *Si $\mathcal{N}^1$ y $\mathcal{N}^2$ son dos medidas aleatorias de Poisson con la misma intensidad Λ entonces $\mathcal{N}^1 \sim \mathcal{N}^2$.*

Demostración. Ya que $\mathcal{G}$ es generado por las variables $(\Psi_A)_{A \in \mathcal{B}}$, una ley de probabilidad sobre $(\mathcal{M}_p(S), \mathcal{G})$ es únicamente determinado por las leyes de los vectores de la forma

$$(\Psi_{A_1}, \Psi_{A_2}, \ldots, \Psi_{A_k})$$

con $k \geq 1$ y $A_i \in \mathcal{B}$ para todo $1 \leq i \leq k$. Entonces, para probar que $\mathcal{N}^1 \sim \mathcal{N}^2$ basta fijar $A_i \in \mathcal{B}$, $i = 1, \ldots, k$ y probar que

$$(\mathcal{N}^1_{A_1}, \mathcal{N}^1_{A_2}, \ldots, \mathcal{N}^1_{A_k}) \sim (\mathcal{N}^2_{A_1}, \mathcal{N}^2_{A_2}, \ldots, \mathcal{N}^2_{A_k}) .$$

El Ejercicio 4.3 nos garantiza la existencia de conjuntos medibles B_1, B_2, ..., B_m disjuntos dos a dos y de subconjuntos de índices $J_i \subseteq \{1,2,\ldots,m\}$, $i = 1,\ldots,k$, de modo que

$$A_i \;=\; \cup_{j\in J_i} B_j \ , \quad \forall i = 1,2\ldots,k \ .$$

En particular, para $r = 1,2$ tenemos

$$\mathcal{N}^r_{A_i} \;=\; \sum_{j\in J_i} \mathcal{N}^r_{B_j} \ , \quad \forall i = 1,2\ldots,k \ ,$$

y por lo tanto existe una función $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ medible tal que

$$(\mathcal{N}^r_{A_1}, \mathcal{N}^r_{A_2}, \ldots, \mathcal{N}^r_{A_k}) \;=\; f(\mathcal{N}^r_{B_1}, \mathcal{N}^r_{B_2}, \ldots, \mathcal{N}^r_{B_m}).$$

Para $r = 1,2$, las variables $\mathcal{N}^r_{B_1}$, $\mathcal{N}^r_{B_2}$, ..., $\mathcal{N}^r_{B_m}$ son independientes y sus distribuciones son determinadas por Λ

$$\mathcal{N}^r_{B_i} \sim Poiss(\Lambda(B_i)) \ , \quad \forall i \ .$$

En consecuencia,

$$(\mathcal{N}^1_{B_1}, \mathcal{N}^1_{B_2}, \ldots, \mathcal{N}^1_{B_m}) \sim (\mathcal{N}^2_{B_1}, \mathcal{N}^2_{B_2}, \ldots, \mathcal{N}^2_{B_m})$$

y por tanto

$$\begin{aligned}(\mathcal{N}^1_{A_1}, \mathcal{N}^1_{A_2}, \ldots, \mathcal{N}^1_{A_k}) &= f(\mathcal{N}^1_{B_1}, \mathcal{N}^1_{B_2}, \ldots, \mathcal{N}^1_{B_m}) \\ &\sim f(\mathcal{N}^2_{B_1}, \mathcal{N}^2_{B_2}, \ldots, \mathcal{N}^2_{B_m}) = (\mathcal{N}^2_{A_1}, \mathcal{N}^2_{A_2}, \ldots, \mathcal{N}^2_{A_k}) \ .\end{aligned}$$

Eso concluye la prueba. □

Ejercicio 4.3. *Sean A_1, A_2, ..., A_k subconjuntos medibles de S. Existen conjuntos medibles B_1, B_2, ..., B_m disjuntos dos a dos de modo que cada A_i se puede expresar como*

$$A_i \;=\; \cup_{j\in J_i} B_j$$

para algún $J_i \subseteq \{1,2,\ldots,m\}$.

La prueba de la siguiente proposición nos muestra un modo de construir una medida aleatoria de Poisson $\mathcal{N}$ cuando la intensidad Λ es una medida finita.

Proposition 4.4. *Si Λ es una medida finita sobre $(S, \mathcal{B})$ entonces existe una medida aleatoria de Poisson $\mathcal{N}$ con Λ como intensidad.*

Demostración. Consideramos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sobre el cual están definidas variables independientes N, U_1, U_2,... de modo que $N \sim Poiss(\Lambda(S))$ y $U_k \sim \Lambda'$ para todo $k \geq 1$ donde Λ' es la probabilidad

$$\Lambda'(A) \ = \ \Lambda(A)/\Lambda(S) \ , \quad \forall A \in \mathcal{B} \ .$$

Entonces, afirmamos que

$$\mathcal{N}(\omega) \ = \ \sum_{k=1}^{N(\omega)} \delta_{U_k(\omega)} \ , \quad \omega \in \Omega$$

donde $\mathcal{N}$ es la medida nula si $N = 0$, resulta una medida aleatoria de Poisson de intensidad Λ. Para verificar (ii) de la definición de una MAP, fijemos un conjunto medible $A \in \mathcal{B}$ y determinemos la distribución de $\mathcal{N}_A$. Es claro de la construcción que

$$\mathcal{N}_A \ = \ \sum_{k=1}^{N} \xi_k$$

donde $\xi_k := \mathbf{1}_{\{U_k \in A\}}$ para cada $k \geq 1$. Ya que N, ξ_k, $k \geq 1$ son todas variables independientes, por el Lema 3.3 concluimos que $\mathcal{N}_A$ tiene distribución de Poisson cuyo parámetro es

$$\Lambda(S) P(U_1 \in A) \ = \ \Lambda(S)\Lambda'(A) \ = \ \Lambda(A) \ .$$

Para probar (ii) de la Definición 4.1, comenzaremos con el siguiente cálculo. Dada una función medible $f : S \to \mathbb{R}$ denotemos

$$\mathcal{N}_f \ := \ \int_S f d\mathcal{N} \ = \ \sum_{k=1}^{N} f(U_k) \ .$$

Entonces, un cálculo similar al hecho en la prueba del Lema 3.3 nos prueba que la función característica de $\mathcal{N}_f$ es

$$\phi_{\mathcal{N}_f}(u) \;=\; \exp\{\lambda(E(e^{iuf(U_1)}) - 1)\}$$

Finalmente, tenemos

$$\phi_{\mathcal{N}_f}(u) \;=\; \exp\{\int_S (e^{iuf(s)} - 1)\Lambda(ds)\}\;. \tag{4.1}$$

Fijemos ahora los subconjuntos medibles disjuntos A_1, A_2, $\ldots A_m$. Para probar que $\mathcal{N}_{A_k}$, $k = 1\ldots, m$, resultan independientes vamos a calcular la función característica ϕ_W del vector

$$W = (\mathcal{N}_{A_1}, \ldots, \mathcal{N}_{A_m})$$

Para $u = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m$ tenemos que calcular $\phi_W(u) = E[e^{i\langle u,W\rangle}]$. Pero

$$\langle u, W\rangle \;=\; \int_S f d\mathcal{N}$$

donde

$$f \;=\; \sum_{k=1}^m u_k \mathbf{1}_{A_k}\;.$$

Por lo tanto $\phi_W(u) = \phi_{\mathcal{N}_f}(1)$. Usando entonces este hecho y (4.1) tenemos

$$\phi_W(u) \;=\; \exp\{\int_S (e^{i\sum_{k=1}^m u_k \mathbf{1}_{A_k}(s)} - 1)\Lambda(ds)\}$$

Pero

$$e^{i\sum_{k=1}^m u_k \mathbf{1}_{A_k}(s)} - 1 \;=\; \sum_{k=1}^m (e^{iu_k} - 1)\mathbf{1}_{A_k}(s)\;.$$

Luego,

$$\phi_W(u) \;=\; \exp\Big\{\sum_{k=1}^m \Lambda(A_k)(e^{iu_k} - 1)\Big\}$$

y hemos probado así que

$$\phi_W(u) \;=\; \phi_{\mathcal{N}_{A_1}}(u_1)\cdots\phi_{\mathcal{N}_{A_m}}(u_m)\;.$$

Eso prueba que $\mathcal{N}_{A_k}$, $k = 1, \ldots, m$ son variables independientes. $\square$

Una vez que tenemos probada la existencia de medida aleatoria de Poisson con intensidad Λ finita, la existencia para intensidades σ-finitas se sigue de un argumento estándar.

Theorem 4.5. *Si Λ es una medida σ-finita sobre $(S, \mathcal{B})$ entonces existe una medida aleatoria de Poisson $\mathcal{N}$ con Λ como intensidad.*

Demostración. Sean D_1, D_2,... elementos de $\mathcal{B}$ disjuntos dos a dos tales que

$$\cup_{k\in\mathbb{N}} D_k \ = \ S \quad \text{y} \quad \Lambda(D_k) < \infty \ , \quad \forall k \geq 1 \ .$$

Entonces podemos considerar las medidas finitas

$$\Lambda^{(k)}(A) \ := \ \Lambda(A \cap D_k) \ , \quad k \geq 1 \ .$$

Podemos entonces construir medidas aleatorias de Poisson $\mathcal{N}^{(k)}$, $k \geq 1$, independientes y con intensidades $\Lambda^{(k)}$ respectivamente. Observe que, para cada $k \geq 1$, tenemos $\mathcal{N}^{(k)}_{S\setminus D^{(k)}} = 0$ P-casi ciertamente y entonces

$$\mathcal{N}^{(k)} = \sum_{s\in E^{(k)}} \delta_s$$

para algún enumerable $E^{(k)}$ de modo que $P\{E^{(k)} \subset D^{(k)}\} = 1$. En particular, con probabilidad uno los conjuntos $(E^{(k)})_{k\geq 1}$ son disjuntos dos a dos. Si definimos

$$\mathcal{N} \ := \ \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{N}^{(k)} \ ,$$

entonces $\mathcal{N} = \sum_{s\in E} \delta_s$ con $E = \cup_{k\geq 1} E^{(k)}$ y por lo tanto $\mathcal{N}$ toma valores en $\mathcal{M}_p(S)$. Verifiquemos que $\mathcal{N}$ es una medida aleatoria de Poisson con intensidad Λ.

Para verificar la propiedad (i) de la definición, fijemos los conjuntos A_1, ..., A_m en $\mathcal{B}$ disjuntos dos a dos. Usando la independencia de las medidas aleatorias $(\mathcal{N}^{(k)})_{k\geq 1}$ y luego la propiedad (i) en Definición 4.1 es fácil verificar que

$$\{\mathcal{N}^{(k)}_{A_j} \ : \ 1 \leq j \leq m \ , \ \ k \geq 1\}$$

resultan variables independientes. Por tanto,

$$\mathcal{N}_{A_i} \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{N}_{A_i}^{(k)} \ , \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

resultan también independientes.

Veamos ahora que vale la propiedad (ii) de la Definición 4.1. Fijemos un $A \in \mathcal{B}$. Entonces

$$\mathcal{N}_A \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{N}_A^{(k)} \ .$$

Luego, por la Proposición 3.4 concluimos que

$$\mathcal{N}_A \ \sim \ Poiss(\sum \Lambda^{(k)}(A)) \ = \ Poiss(\Lambda(A)) \ ,$$

como queríamos. □

5. Propiedades de la Medida Aleatoria de Poisson

El objetivo de esta sección es probar el Teorema 5.1. En este teorema probamos una forma equivalente de definir una MAP con propiedades que reemplazan a (i) y (ii) en Definición 4.1 que resultan más conveniente para las aplicaciones.

Dado un subconjunto medible $A \in \mathcal{B}$ y una medida $\theta \in \mathcal{M}_p(S)$ denotemos por $\theta^{(A)}$ la restricción de θ sobre A, es decir la medida sobre $(S, \mathcal{B})$ definida como

$$\theta^{(A)}(D) \ := \ \theta(A \cap D) \ , \quad \forall D \in \mathcal{B} \ .$$

Fijado $A \in \mathcal{B}$, la aplicación $\theta \mapsto \theta^{(A)}$ es una aplicación medible de $\mathcal{M}_p(A)$ a sí mismo. En efecto, por la definición de $\mathcal{G}$ basta probar que $\theta \mapsto \Psi_D(\theta^{(A)})$ resulta medible para cada función Ψ_D, $D \in \mathcal{B}$. Pero

$$\Psi_D \circ \theta^{(A)} \ = \ \Psi_{D \cap A}(\theta)$$

y la función $\Psi_{D \cap A}$ es medible, probando la afirmación.

Ahora, fijado un $A \in \mathcal{B}$ y un elemento aleatorio $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}_p(S)$, denotemos por $\mathcal{N}^{(A)}$ la medida (aleatoria) que se obtiene al restringir $\mathcal{N}$ a A, es decir,

$$\mathcal{N}^{(A)}(\omega) \ = \ (\mathcal{N}(\omega))^{(A)} \ , \quad \forall \omega \in \Omega \ ,$$

donde Ω es el dominio de $\mathcal{N}$. Observe que si

$$\mathcal{N} \ = \ \sum_{s \in E_{\mathcal{N}}} \delta_s$$

entonces

$$\mathcal{N}^{(A)} \ = \ \sum_{s \in E_{\mathcal{N}} \cap A} \delta_s \ ,$$

es decir, $\mathcal{N}^{(A)}$ consiste en borrar los puntos de $\mathcal{N}$ que estén fuera de A. Ya que $\theta \mapsto \theta^{(A)}$ es medible, $\mathcal{N}^{(A)}$ resulta también un elemento aleatorio de $\mathcal{M}_p(S)$.

En la siguiente afirmación escribimos las propiedades que se obtienen a partir de la Definición 4.1.

Theorem 5.1. *Sea $\mathcal{N}$ una MAP de intensidad Λ y sea $(A_j)_{j \in J}$ una familia de subconjuntos medibles de S disjuntos dos a dos. Entonces*

$$\{\mathcal{N}^{(A_j)} : j \in J\}$$

resulta una familia de medidas aleatorias de Poisson independientes. Además, para cada $j \in J$, la intensidad de $\mathcal{N}^{(A_j)}$ resulta $\Lambda^{(A_j)}$ definida como

$$\Lambda^{(A_j)}(D) \ := \ \Lambda(A_j \cap D) \ ,$$

para todo $D \in \mathcal{B}$.

Durante el resto de la sección probaremos este teorema. Para probar la independencia enunciada, basta fijar los subconjuntos disjuntos A_1, $\ldots$, A_m y probar que $\mathcal{N}^{(A_1)}$, $\ldots$, $\mathcal{N}^{(A_m)}$ resultan independientes. Por cada i, denotemos por $\mathcal{F}_{A_i}$ el σ-álgebra generado por $\mathcal{N}^{(A_i)}$. Observe que, para cada $i = 1, \ldots, m$,

$$\mathcal{F}_{A_i} \;=\; \sigma(\mathcal{N}_D^{(A_i)} : D \in \mathcal{B}) \;=\; \sigma(\mathcal{N}_D : D \in \mathcal{B}(A_i)) \;,$$

donde estamos denotando

$$\mathcal{B}(A_i) \;:=\; \{D : D \in \mathcal{B}, D \subseteq A_i\} \;, \quad i = 1, \ldots, m \;.$$

Para mostrar entonces la independencia de los σ-álgebras $\mathcal{F}_{A_i}$, $i = 1, \ldots, m$, basta fijar, para cada i, un subconjunto finito $\mathcal{D}_i \subset \mathcal{B}(A_i)$ y probar que

$$\sigma(\mathcal{N}_D : D \in \mathcal{D}_1) \;, \quad \sigma(\mathcal{N}_D : D \in \mathcal{D}_2) \;, \quad \ldots \;, \quad \sigma(\mathcal{N}_D : D \in \mathcal{D}_m) \tag{5.1}$$

son independientes. Usando el Ejercicio 4.3 podemos cambiar cada $D_i \subset \mathcal{B}(A_i)$ por un subconjunto finito $D_i' \subset \mathcal{B}(A_i)$ de modo que los elementos de D_i' son disjuntos dos a dos y

$$\sigma(\mathcal{N}_D : D \in \mathcal{D}_i) \;\subseteq\; \sigma(\mathcal{N}_D : D \in \mathcal{D}_i') \;, \quad \forall i = 1, \ldots, m \;.$$

Para simplificar la notación, podemos entonces suponer, sin pérdida de generalidad, que en (5.1) los elementos de D_i son disjuntos dos a dos, para todo $i = 1, \ldots, m$. Más aún, todo par de elementos de $\cup_i D_i$ resultan disjuntos dos a dos, ya que los conjuntos A_i, $i = 1, \ldots, m$, son disjuntos dos a dos. En consecuencia,

$$\{\mathcal{N}_D : D \in \cup_{i=1}^m \mathcal{D}_i\}$$

es una familia de variables independientes, por ser $\mathcal{N}$ una MAP. En particular, tenemos la independencia de los σ-álgebras en (5.1). De este modo concluimos la prueba de que

$$\{\mathcal{N}^{(A_j)} : j \in J\}$$

son elementos aleatorios independientes de $\mathcal{M}_p(S)$. La prueba de la última afirmación es elemental.

6. Integral Aleatoria

Durante esta sección f denotará una función medible $f : S \to \mathbb{R}$ y examinaremos la integral (aleatoria)

$$\int_S f d\mathcal{N}$$

con respecto a una medida aleatoria de Poisson $\mathcal{N}$. Una integral de este tipo aparecerá en la parte integral de la expresión que define el problema martingala para procesos de Markov.

Si f es una función simple positiva, es decir de la forma $f = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathbf{1}_{A_i}$ para $a_i \geq 0 \ \forall i$, entonces es claro que la aplicación

$$\theta \mapsto \int_S f d\theta \tag{6.1}$$

es medible ya que

$$\int_S f d\theta \ = \ \sum_{i=1}^{m} a_i \Psi_{A_i}(\theta) \ , \quad \forall \theta \in \mathcal{M}_p(S) \ .$$

Usando el argumento estándar podemos luego concluir que la aplicación en (6.1) es medible para toda función f positiva. En particular, tenemos que

$$\{\theta : \ f \text{ es } \theta\text{-integrable } \}$$

es un subconjunto medible de $\mathcal{M}_p(S)$. Además, para toda f podemos concluir que la aplicación en (6.1), definida sobre el subconjunto de $\mathcal{M}_p(S)$ donde tenga sentido la integral, resulta una aplicación medible.

Para $\mathcal{N}$, un elemento aleatorio de $\mathcal{M}_p(S)$, y $f : S \to \mathbb{R}$ medible positiva, podemos definir

$$\mathcal{N}_f \ := \ \int_S f d\mathcal{N} \ . \tag{6.2}$$

Por lo discutido anteriormente, $\mathcal{N}_f$ resulta una variable aleatoria en $[0, \infty]$.

Proposition 6.1. *Sea $\mathcal{N}$ una MAP de intensidad Λ. Para f positiva, tenemos*

$$E\left(\int_S f d\mathcal{N}\right) \;=\; \int_S f d\Lambda \,.$$

Demostración. La afirmación es fácil de ser verificada para una función f que sea simple positiva. Para probar el enunciado en su generalidad basta usar el argumento estándar y Teorema de la Convergencia Monónota. □

En particular, podemos concluir que si f, no necesariamente positiva, es Λ-integrable entonces

$$E\left(\int_S |f| d\mathcal{N}\right) \;=\; \int_S |f| d\Lambda \;<\; \infty$$

probando que f resulta $\mathcal{N}$-integrable casi ciertamente. En este caso, la variable $\mathcal{N}_f$ definida en (6.2) estará bien definida en un subconjunto de Ω de probabilidad total.

Supongamos ahora que Λ es una medida finita y entonces $\mathcal{N}$ consiste, con probabilidad uno, de una cantidad finita de puntos. En este caso,

$$\mathcal{N}_f \;:=\; \int_S f d\mathcal{N} \;=\; \sum_{s \in E_{\mathcal{N}}} f(s)$$

está bien definida en el subconjunto de probabilidad total

$$\{E_{\mathcal{N}} \text{ es finito}\} \;\subseteq\; \Omega \,.$$

Para este caso, haremos unos cálculos sobre la distribución de $\int_S f d\mathcal{N}$.

Proposition 6.2. *Sea $\mathcal{N}$ una MAP con intensidad Λ. Supongamos que Λ es una medida finita. Entonces la variable $\mathcal{N}_f$ tiene función característica*

$$\phi_{\mathcal{N}_f}(u) \;=\; \exp\{\int_S (e^{iuf(s)} - 1)\Lambda(ds)\} \,.$$

Además, si f es Λ-cuadrado integrable entonces $\mathcal{N}_f$ es P-cuadrado integrable y

$$Var\,(\mathcal{N}_f) \;=\; \int_S f^2 d\Lambda \,.$$

Demostración. Ya que la medida Λ es finita, podemos usar la construcción de $\mathcal{N}$ hecha en la Sección 4. Así, la expresión de la función característica ya fue obtenida en la demostración de la Proposición 4.4.

Suponemos ahora que f es Λ-cuadrado integrable. Observe que la aplicación

$$u \mapsto \frac{1}{\Lambda(S)} \int_S e^{iuf(s)} \Lambda(ds) \tag{6.3}$$

es la función característica de la variable $f : S \to \mathbb{R}$. Gracias al Teorema 6.4.1 en [4], la función característica de f es una función C^2. Eso implica que $\phi_{\mathcal{N}_f} \in C^2$ y su segunda derivada evaluada en $u = 0$ resulta

$$-\left(\int_S f d\Lambda\right)^2 - \int_S f^2 d\Lambda\,. \tag{6.4}$$

Nuevamente por el Teorema 6.4.1 de [4] podemos concluir que $\mathcal{N}_f$ es cuadrado integrable y $-E(\mathcal{N}_f^2)$ coincide con la expresión en (6.4). Eso prueba la expresión de la varianza de $\mathcal{N}_f$ enunciada. $\square$

Supongamos ahora que $\mathcal{N}$ es una MAP de intensidad Λ, no necesariamente finita, y fijamos un subconjunto medible $A \subseteq S$ con medida finita. Ya que

$$P\{\mathcal{N}_A < \infty\} \;=\; 1$$

entonces $\int_A f d\mathcal{N}$ es una variable bien definida sobre un subconjunto de Ω de probabilidad total. Además observe que

$$\int_A f d\mathcal{N} \;=\; \int_S f d\mathcal{N}^{(A)}\,. \tag{6.5}$$

Por el Teorema 5.1, sabemos que $\mathcal{N}^{(A)}$ es una medida aleatoria de Poisson con intensidad $\Lambda^{(A)}$ tal que

$$\Lambda^{(A)}(D) \;=\; \Lambda(A \cap D)\,, \quad \forall D \in \mathcal{B}\,.$$

Ya que $\Lambda(A) < \infty$, la intensidad de $\mathcal{N}^{(A)}$ es una medida finita. Entonces, la relación (6.5) nos permite aplicar todos los cálculos vistos durante esta sección para la variable $\int_A f d\mathcal{N}$ (esperanza, varianza y función característica), realizando el correspondiente cambio de S por A en las expresiones.

En la siguiente proposición mostramos otra consecuencia de la relación (6.5) y el Teorema 5.1.

Proposition 6.3. *Sea $\mathcal{N}$ una medida aleatoria de Poisson de intensidad Λ y sea $f : S \to \mathbb{R}$ una función medible. Si $(A_j)_{j\in J}$ es una familia de subconjuntos medibles de S, disjuntos dos a dos, entonces las integrales aleatorias*

$$\int_{A_j} f d\mathcal{N} \,, \quad j \in J$$

resultan independientes.

Demostración. Por la observación hecha en (6.5) tenemos

$$\int_{A_j} f d\mathcal{N} \;=\; \int_S f d\mathcal{N}^{(A_j)} \,, \quad \forall j \,.$$

Por el Teorema 5.1, la medidas aleatorias $\mathcal{N}^{(A_j)}$, $j \in J$, son independientes. Eso prueba la independencia de las integrales en el enunciado. $\square$

Referencias

[1] Cadenas de Markov y teoría de potencial; J. Beltrán. Publicações Matemáticas do IMPA. 28o Colóquio Brasileiro de Matemática. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2011. iv+41 pp. ISBN: 978-85-244-0316-3

[2] Tunneling and metastability of continuous time Markov chains; J. Beltrán, C. Landim. Journal of Stat. Phys. Vol 140, No 6, pp 1065 – 1114, (2010).

[3] Tunneling and Metastability of Continuous Time Markov Chains II, the Nonreversible Case. Journal of Statistical Physics. Vol 149 No 4, pp. 598–618, (2012).

[4] K. L. Chung: *A Course in Probability Theory, Third Edition*, Academic Press, (2001).

[5] D. J. Daley, D. Vere-Jones: *An Introduction to the Theory of Point Processes, Volume II: General Theory and Structure*, 2nd edition, Springer, (2008).

Abstract

In this monograph we continue with the inspection initiated in [1] on the fundamental tools introduced in the approach proposed in [2,3] for the study of metastability. We give the definition of the Poisson random measures and prove the main properties that we will subsequently use to construct Markov processes with finite state space. Such construction will allow us to provide a probabilistic proof of the fact that the law of a Markov process solves the martingal problem.

Keywords: Poisson random measure, Markov process, Martingales.

Johel Beltrán
Sección Matemática
Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú
johel.beltran@pucp.edu.pe