Reducción del grado en aplicaciones de Keller

P. Fernandez [1,2], ***R. Rabanal*** [1,2,3]

Octubre, 2014

Resumen

A las aplicaciones polinomiales con el determinante de su matriz jacobiana igual a 1 se las llama aplicaciones de Keller. Según la conjetura jacobiana de Keller, cada aplicación de Keller es inyectiva. Tal conjetura es verdadera para las aplicaciones polinomiales de grado menor o igual a dos. En el presente trabajo también se muestra que el caso general se reduce a estudiar la inyectividad de aplicaciones de la forma $z \mapsto z + H(z)$, donde las componentes no nulas de H son polinomios homogeneos de grado tres y cada matriz Jacobiana $DH(z)$ es nilpotente.

MSC(2010): 14R15; 13F20.

Palabras Clave: Aplicacion Keller, anillo de polinomios, automorfismo.

[1] *Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias, PUCP.*

[2] *Proyecto PUCP-DGI 2010-0058.*

[3] *ICTP-ITALY (220 (Maths) RR/ab).*

1. Introducción

Este artículo pretende divulgar algunos resultados clásicos relacionados con la inyectividad global de los difeomorfismos locales [18, 20, 5, 3, 15, 16, 9, 19, 4]. Sólo describimos los difeomorfismos locales inducidos por aplicaciones polinomiales con coeficientes complejos; en particular, aquellos que son obtenidos por las **aplicaciones de Keller**. Esto significa que la aplicación es polinomial y el determinante de cada matriz jacobiana es igual a uno [12]. Un ejemplo inicial de este tipo de aplicaciones es originado por una polinomial inyectiva que preserva el área; esto porque su inversa también es polinomial, y será Keller por una aplicación directa de la regla de la cadena (ver § **3.2**). Recíprocamente, no es difícil comprobar que cada aplicación de Keller lineal es una biyección, y lo mismo sucederá si tal aplicación estuviera formada por polinomios de grado menor o igual a dos (ver § **3.3**). Sin embargo, aún no se conoce una respuesta general a la **conjetura jacobiana de Keller**, según la cual cada aplicación de Keller es injectiva [12, 21, 10, 2, 23] (ver también [9, 3, 5, 17]).

Dar una solución a tal conjetura consiste en demostrar que cada aplicación de Keller es inyectiva, o en su defecto encontrar explícitamente una aplicación de Keller no inyectiva. Para hacer esto es necesario examinar atentamente las aplicaciones polinomiales inyectivas. A este estudio se ha dedicado la sección 2, donde mostramos que las polinomiales inyectivas también son dominantes, porque son sobreyectivas (ver § **2.4**) y, consecuentemente, su inversa no sólo es birracional sino también polinomial. Finalmente, en la sección 3 mostramos que por una sucesión finita de cambios de variables, estudiar la conjetura jacobiana de Keller se reduce a trabajar con aplicaciones polinomiales de grado menor o igual a tres. Precisamente, en § **4.8** se demuestra que *para resolver la conjetura jacobiana de Keller bastará estudiar la inyectividad de todas la aplicaciones de la forma* $z \mapsto z + H(z)$, *donde las componentes no nulas de* H *son polinomios homogéneos de grado tres y cada derivada* $DH(z)$ *es nilpotente [2].*

2. Aplicaciones polinomiales e inyectividad

Describimos algunos resultados básicos acerca de las aplicaciones polinomiales inyectivas. Concluimos con el apartado § **2.6**, mostrando que cada polinomial inyectiva es una biyección con inversa polinomial.

2.1. Sea $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n] = \mathbb{C}[X]$ el anillo de los polinomios en n variables con coeficientes en el cuerpo de los números complejos. Cada subconjunto ordenado $(F_1, \ldots, F_n)$ de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ determina con exactitud una aplicación del espacio vectorial $\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, \ldots, z_n) : z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}\}$ en sí mismo. Esta aplicación, definida por la regla $z \mapsto F(z) = \big(F_1(z), \ldots, F_n(z)\big)$, se denomina **aplicación polinomial** y se denota por $F = (F_1, \ldots, F_n)$. Como de costumbre, la regla $z \mapsto F_i(z)$ define una de las funciones **coordenadas** de F, que se identifica con el polinomio F_i.

2.2. Cada polinomial F está asociada a un único conjunto ordenado $(F_1, \ldots, F_n)$, el cual induce el anillo $\mathbb{C}[F_1, \ldots, F_n]$. Si $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ y $\mathbb{C}[F_1, \ldots, F_n]$ son iguales, se dice que la aplicación es **algebraicamente invertible**. En este caso, existe algún polinomio $G_i(F_1, \ldots, F_n)$ con $G_i(F_1, \ldots, F_n) = X_i$; por eso $G = (G_1, \ldots, G_n)$ es una inversa a izquierda de F. Por otro lado, si la polinomial $H = (H_1, \ldots, H_n)$ es una inversa a izquierda de F, cada variable X_i es $H_i(F_1, \ldots, F_n)$ y, así, está en $\mathbb{C}[F_1, \ldots, F_n]$. En conclusión, *algebraicamente invertible equivale a la existencia de alguna polinomial como inversa a izquierda.*

2.3. A partir de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ se define $\mathbb{C}(X_1, \ldots, X_n)$, su cuerpo de fracciones. Análogamente, cada polinomial $F = (F_1, \ldots, F_n)$ origina el cuerpo $\mathbb{C}(F_1, \ldots, F_n)$. Si ambos cuerpos de fracciones son iguales, la polinomial se denomina **birracional**. En este caso, cada X_i se escribe como un cociente $\dfrac{g_i(F_1, \ldots, F_n)}{h_i(F_1, \ldots, F_n)}$ y, así, la aplicación $\psi : z \mapsto \big(\dfrac{g_1(z)}{h_1(z)}, \ldots, \dfrac{g_n(z)}{h_n(z)}\big)$ es una inversa a izquierda de F. Recíprocamente, cuando F tiene alguna aplicación racional como inversa a izquierda, $\mathbb{C}(X_1, \ldots, X_n)$ es un subcuerpo de $\mathbb{C}(F_1, \ldots, F_n)$ y por eso son iguales. En el acápite § **2.5** se verá que la aplicación $\mathbb{C}[F_1, \ldots, F_n] \ni \phi \mapsto \phi \circ F \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ induce $\mathbb{C}(F_1, \ldots, F_n) \hookrightarrow \mathbb{C}(X_1, \ldots, X_n)$. Por tanto, *ser birracional equivale a la existencia de alguna aplicación racional como inversa a izquierda.*

2.4. La inyectividad de $F = (F_1, \ldots, F_n)$ se describe vía los ceros de algunos ideales de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n] = \mathbb{C}[X, Y]$. Ello es posible porque F es inyectiva si y solo si cada solución $(z, w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ del sistema $F_i(X) - F_i(Y) = 0, j = 1, \ldots, n$, también es solución del sistema $X_i - Y_i = 0, j = 1, \ldots, n$. Esto significa que los ceros del ideal $I = \big(F_1(X) - F_1(Y); \cdots ; F_n(X) - F_n(Y)\big)$ pertenecen al conjunto de ceros $V(J) = \{(z, w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n : f(z, w) = 0, f \in J\}$, donde J es el ideal generado por $X_1 - Y_1, X_2 - Y_2, \ldots, X_n - Y_n$. Por el teorema de los ceros de Hilbert [13, Nullstellensatz], la inclusión $V(I) \subset V(J)$ implica que para algún $m \in \mathbb{N}$ se tiene $(X_i - Y_i)^m \in I$, es decir existen polinomios $h_{i,k} \in \mathbb{C}[X, Y]$ sujetos a

$$(X_i - Y_i)^m = \sum_{k=1}^{n} h_{i,k}(X, Y)[F_k(X) - F_k(Y)]. \tag{2.1}$$

Por medio de esta identidad se prueba que *cada polinomial inyectiva es sobreyectiva* [1]. Como en [11, 21, 6], se procede por contradicción y para alguna aplicación inyectiva $(F_1, \ldots, F_n)$ se elige un $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^n$ de modo que el sistema $F_i(X) - c_i, i = 1, \ldots, n$, no tenga solución en $\mathbb{C}^n$; en otras palabras, la variedad $V(F_1(X) - c_1; \cdots ; F_n(X) - c_n)$ resulta vacía y por lo tanto igual a $V(1)$. En consecuencia existirián polinomios $h_i \in \mathbb{C}[X, Y]$ que cumplirán

$$1 = \sum_{i=1}^{n} h_i(X, Y)[F_i(X) - c_i]. \tag{2.2}$$

Con esto, se considera el conjunto $\{d_1, \ldots, d_t\}$ formado por la unión de $\{c_1, \ldots, c_n\}$ con los coeficientes de todos los polinomios $F_i(X)$, $h_{i,k}(X, Y)$, $h_i(X, Y)$. A partir de ahí se construye el subanillo $\mathbb{Z}[d_1, \ldots, d_t]$ de $\mathbb{C}$, una $\mathbb{Q}-$álgebra. Por el lema de normalización de

Noether, como aparece en Nagata [14, 22] (ver apendice), existe un ideal maximal $\mathfrak{m}$ del anillo $\mathbb{Z}[d_1, \ldots, d_t]$ de modo que el cociente $K = \mathbb{Z}[d_1, \ldots, d_t]/\mathfrak{m}$ es un cuerpo finito. Por otro lado, por cada subconjunto ordenado $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ de $\mathbb{Z}[d_1, \ldots, d_t]$ se cumple que la imagen $F_i(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ también está en $\mathbb{Z}[d_1, \ldots, d_t]$, pues los coeficientes de F_i están en $\{d_1, \ldots, d_t\}$. Por eso $\phi : (\eta_1, \ldots, \eta_n) \mapsto \big(F_1(\eta_1, \ldots, \eta_n), \ldots, F_n(\eta_1, \ldots, \eta_n)\big)$ determina una polinomial en el producto $(\mathbb{Z}[d_1, \ldots, d_t])^n$, y su cociente módulo $\mathfrak{m}$ induce una aplicación ϕ_0 por medio del diagrama

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}[d_1, \ldots, d_t])^n & \xrightarrow{\phi} & (\mathbb{Z}[d_1, \ldots, d_t])^n \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha \\ K^n & \xrightarrow{\phi_0} & K^n, \end{array}$$

donde $\alpha(\eta_1 \ldots, \eta_n) = (\overline{\eta}_1 \ldots, \overline{\eta}_n)$, con $\overline{\eta}_i$ la clase de η_i módulo $\mathfrak{m}$. Más aún, para ϕ_0 se cumplen dos propiedades. Primero, por (2.1) y la inyectividad de $F = (F_1, \ldots, F_n)$ en $\mathbb{C}^n$, la aplicación ϕ_0 es inyectiva. Segundo, a partir de (2.2) y la elección de $c = (c_1, \ldots, c_n)$, tal ϕ_0 no es sobreyectiva, pues $\alpha(c) \in K^n \setminus \phi_0(K^n)$. Esta contradicción entre apliaciones inyectivas de conjuntos finitos muestra que F es sobreyectiva. Por tanto, *cada aplicación polinomial inyectiva es sobreyectiva.*

2.5. Cada $F = (F_1, \ldots, F_n)$ inyectiva en $\mathbb{C}^n$ también es sobreyectiva. En particular, la imagen $F(\mathbb{C}^n)$ es densa en $\mathbb{C}^n$, lo que significa que F es una aplicación **dominante**. En consecuencia, cuando φ y ψ están en $\mathbb{C}[F_1, \ldots, F_n]$, la condición $\varphi \circ F = \psi \circ F$ en $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ implica $\varphi = \psi$ en $\mathbb{C}[F_1, \ldots, F_n]$. En otras palabras, el morfismo de anillos F^* definido por $\mathbb{C}[F_1, \ldots, F_n] \ni \phi \mapsto \phi \circ F \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ es inyectivo. Más aún, decir que F es dominante equivale a la inyectividad de F^*, el cual induce un monomorfismo entre los cuerpos de fracciones $\mathbb{C}(F_1, \ldots, F_n)$ y $\mathbb{C}(X_1, \ldots, X_n)$, el mismo que será sobreyectivo, pues el dominio y la imagen de F tienen igual dimensión. En efecto, el monomorfismo F^* induce una extensión finita de cuerpos $\mathbb{C}(F_1, \ldots, F_n) \hookrightarrow \mathbb{C}(X_1, \ldots, X_n)$ en el sentido que $\mathbb{C}(X_1, \ldots, X_n)$, es un espacio vectorial sobre

$\mathbb{C}(F_1, \ldots, F_n)$ y su dimensión $d(F)$ es finita. Esta dimensión $d(F)$ es el **grado geométrico** de F, y obviamente cuando $d(F) = 1$ los cuerpos de fracciones son iguales. Más aún, $d(F)$ describe las fibras $F^{-1}(w) = \{v : F(v) = w\}$ de F. Es decir, *existe un conjunto denso* $U \subset \mathbb{C}^n$ *tal que para todo* $w \in U$ *el grado* $d(F)$ *es igual a* $\#(F^{-1}(w))$, *el número de elementos de* $F^{-1}(w)$. En conclusión, si $F = (F_1, \ldots, F_n)$ es inyectiva, entonces $d(F) = \#(F^{-1}(w)) = 1$ y por consiguiente ambos cuerpos de fracciones, $\mathbb{C}(X_1, \ldots, X_n)$ y $\mathbb{C}(F_1, \ldots, F_n)$, coinciden y satisfacen la definición de § **2.3**. *Por tanto, cada polinomial inyectiva es una aplicación birracional.*

2.6. Cuando $F = (F_1, \ldots, F_n)$ es inyectiva, admite una inversa a la izquierda y, por § **2.4**, es una biyección. Para demostrar que su inversa es polinomial, se usa la sobreyectividad y § **2.5**, el cual asegura la existencia de polinomios que tienen a $1 \in \mathbb{C}$ como único divisor común, cuyo cociente satisface $\dfrac{g_i(F_1, \ldots, F_n)}{h_i(F_1, \ldots, F_n)} = X_i$. A partir de esto, se obtiene que F es algebraicamente invertible cuando $h_i \in \mathbb{C}^*$ para todo i. Si por el contrario, algún polinomio h_j no perteneciera a $\mathbb{C}^*$, entonces la variedad $V(h_j) = \{z \in \mathbb{C}^n : h_j(z) = 0\}$ sería un subconjunto no vacío de $V(g_j)$, porque cumplen $g_j(z) = w_j h_j(z)$ cuando $z = F(w_1, \ldots, w_n)$. Por el teorema de los ceros de Hilbert [13, 22], la inclusión $V(h_j) \subset V(g_j)$ implica que g_j^m, para algún $m \in \mathbb{N}$, es multiplo de h_j. Esta contradicción entre los divisores comunes de g_j y h_j muestra $h_j \in \mathbb{C}^*$ (vea [6, 12]). Por tanto, *cada polinomial inyectiva es una biyección algebraicamente invertible y su inversa también es polinomial.*

3. Aplicaciones Keller de grado pequeño

En esta sección probamos un caso particular de la conjetura jacobiana de Keller. Específicamente, demostramos la inyectividad de las aplicaciones de Keller cuyas funciones coordenadas son polinomios de grado menor o igual a dos (ver § **3.3**). Este resultado fue reportado por Wang [23], pero la demostración que presentamos es adoptada de [2].

3.1. Cada aplicación polinomial $F = (F_1, \dots, F_n)$ es holomorfa en $\mathbb{C}^n$. Gracias a esto siempre existen las derivadas parciales $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ y queda definida la **matriz jacobiana**

$$DF(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(z) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(z) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(z) & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(z) \end{pmatrix}.$$

Más aún, su determinante $det(DF(z))$ es un polinomio con algún cero de no ser constante, ya que $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado. Por tanto, *las afirmaciones* $det(DF(z)) \neq 0$*, para todo* $z \in \mathbb{C}^n$ *y existe* $c \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ *tal que* $det(DF(z)) = c$*, para todo* $z \in \mathbb{C}^n$ *son equivalentes.*

3.2. El apartado § **2.6** hizo patente que las aplicaciones polinomiales inyectivas son biyecciones con inversa polinomial. La regla de la cadena demuestra que cada matriz jacobiana tiene inversa. De esta manera, *las aplicaciones polinomiales inyectivas que preservan el área son Keller.*

3.3. Cada aplicación polinomial con polinomios de grado uno o cero es una transformación lineal y su matriz asociada en la base canónica es la matriz jacobiana. Luego, cada aplicación de Keller lineal es una biyección. Lo mismo sucede si en la aplicación de Keller $F = (F_1, \dots, F_n)$ los polinomios F_i son de grado menor o igual a dos, porque en este caso la condición $F(a) = F(b)$ implica dos cosas. Primero, la aplicación $G(z) = F(z + a) - F(b)$ satisface $G(b - a) = G(0) = 0$ y por eso se escribe $G = G_{(1)} + G_{(2)}$, donde cada $G_{(j)}$ es una aplicación polinomial formada por polinomios de grado $j \in \{1, 2\}$. Segundo, al jugar con cierta evaluación y derivada de $t \to G(t(b - a)) = tG_{(1)}(b - a) + t^2 G_{(2)}(b - a)$ se obtiene

$$\begin{aligned} 0 = G(b - a) &= \left\{G_{(1)}(b - a) + 2tG_{(2)}(b - a)\right\}_{t=\frac{1}{2}} \\ &= \{DF(t(b - a)) \cdot (b - a)\}_{t=\frac{1}{2}} . \end{aligned}$$

Como la matriz $DF(\frac{1}{2}(b - a))$ es invertible concluimos que, $F(a) = F(b)$ implica $a = b$. Por tanto, *cada aplicación de Keller es inyectiva, si sus componentes son de grado menor o igual a dos* (ver también [23, 15]).

4. Reducción del grado

El grado de una aplicación polinomial $F = (F_1, \ldots, F_n)$ es el mayor grado de las componentes F_i, es decir $deg(F) = \max_i deg(F_i)$, donde $deg(F_i)$ es el grado de las componentes en el sentido usual.

4.1. Para estudiar la inyectividad de F uno se toma la libertad de reemplazar F por $H \circ F \circ \widetilde{H}$ donde H y $\widetilde{H}$ son isomorfismos afines. En particular, se puede cambiar F por $T \circ F$ con T la traslación $T(z) = z - F(0)$ y trabajar con aplicaciones que envían el cero en el cero. Del mismo modo, si $DF(0)$ tiene inversa, al sustituir F por $(DF(0))^{-1} \circ F$ se obtiene una nueva aplicación cuyas componentes se escriben de la forma $X_i +$ términos de grado al menos dos. Por lo tanto, para estudiar la inyectividad se puede suponer que *la aplicación F satisface $F(0) = 0$ y que su derivada $DF(0)$ es la matriz identidad I_n.*

Observación 4.2. Gracias a la libertad concedida por el acápite § 4.1, en el estudio de la conjetura jacobiana de Keller muchos autores trabajan con polinomiales para las cuales el determinate de su matriz jacobiana es constante. Por otro lado, ya es conocido que la equivalencia anunciada en § **3.1** no es verdadera para aplicaciones reales $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$. Más aún, Pinchuck describe en [17] una polinomial real que no es inyectiva, aún cuando el determinante de su matriz jacobiana nunca se anula.

4.3. Sean P y Q dos polinomios en $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$. La inyectividad de la aplicación de Keller $F = (F_1, \ldots, F_n)$ es equivalente a la inyectividad de la nueva aplicacion de Keller $F^{[2]}$, definida en $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^2 = \{(z, w) : z \in \mathbb{C}^n, w \in \mathbb{C}^2\}$ por la regla $(z, w) \mapsto (F(z), w_1 - P(z), w_2 - Q(z))$ como es fácil observar. Tal equivalencia persiste, si se considera la composición $E_1 \circ F^{[2]} = (\widetilde{F}_1, \ldots, \widetilde{F}_{n+2})$ con $E_1(z, w) = (z_1 - w_1 w_2, z_2, \ldots, z_n, w_1, w_2)$, que también es Keller. Por esta razón, cuando la componente $F_1 \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ admite al producto PQ entre sus monomios de grado $d \geq 4$, en la componente modificada $\widetilde{F}_1(z, w) = [F_1(z) - P(z)Q(z)] - w_1 w_2 + w_1 Q(z) + w_2 P(z)$ ya no aparece PQ y los tres términos $w_1 w_2$, $w_1 Q(z)$ y $w_2 P(z)$ son de grado a lo mucho $d - 1$. Es decir, para estudiar la inyectividad, aumentado inductivamente las variables de ser necesario, será suficiente considerar aplicaciones polinomiales cuya primera componente tiene grado menor o igual a tres. Todo esto se puede repetir por cada componente. Por tanto, *la inyectividad de la aplicación de Keller* $F = (F_1, \ldots, F_n)$, *con grado al menos* 4, *es equivalente a la inyectividad de alguna aplicación de Keller* $G = (G_1, \ldots, G_{n+\tilde{m}})$ *con* $\tilde{m} \geq 2$ *y* $deg(G) \leq 3$ (ver [2]).

Observación 4.4. Si algún $X_j^{n_j}$ con $n_j \geq 2$ dividiera a un monomio $M = M(z, w)$ de la primera componente de $G = (G_1, \ldots, G_{n+\tilde{m}})$, la técnica de § **4.3** se podría repetir factorizando $M = PQ$ de modo que X_j divida a cada uno de los polinomios, a P y a Q. Éste proceso permite encontrar $(\widetilde{G}_1, \ldots, \widetilde{G}_{n+\tilde{m}+2})$, donde $\widetilde{G}_1(z, w, \widetilde{w}) = [G_1(z, w) - P(z, w)Q(z, w)] - \widetilde{w}_1\widetilde{w}_2 + \widetilde{w}_1 Q(z, w) + \widetilde{w}_2 P(z, w)$, y así $M = PQ$ no aparece como un monomio y, además, la potencia de X_j esta vez será $n_j - 1$. Por lo tanto, podemos concluir que las componentes de la aplicación del parágrafo anterior son lineales en cada variable.

4.5. Cuando la aplicación $F = (F_1, \ldots, F_n)$ de § **4.3** satisface las condiciones de § **4.1**, la aplicación $G = (G_1, \ldots, G_{n+\tilde{m}})$ envía el origen en el origen y su matriz jacobiana $DG(0)$ es la identidad $I_{n+\tilde{m}}$. Por tanto, *para investigar la inyectividad de una aplicación de Keller es suficiente estudiar aquellas de la forma*

$$z \mapsto z + F_{(2)}(z) + F_{(3)}(z),$$

donde cada componente de $F_{(i)}$ *o es cero o es un polinomio homogéneo de grado* $i \in \{2, 3\}$. (Por la observación 4.4, inclusive se puede conseguir que las componentes homogéneas estén formadas por monomios que son lineales en cada variable).

4.6. A partir de $F(z) = z + F_{(2)}(z) + F_{(3)}(z)$ se define en $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p = \{(z, \tilde{z}) : z, \tilde{z} \in \mathbb{C}^p\}$ la aplicación polinomial $\tilde{F}^{[p]}$ que a cada $(z, \tilde{z})$ le asigna $(F(z), \tilde{z})$. Así, es fácil ver que F y $\tilde{F}^{[p]}$ son simultáneamente inyectivas (resp. Keller) o no lo son. Del mismo modo se puede definir las aplicaciones $E_1(z,\tilde{z}) = (z+\tilde{z},\tilde{z})$ y $E_2(z,\tilde{z}) = (z,\tilde{z}-F_{(3)}(z))$. Por esta razón, la inyectividad de F es equivalente a inyectividad de $G = E_1 \circ \tilde{F}^{[p]} \circ E_2$, la misma que satisface

$$\begin{aligned} G(z,\tilde{z}) &= E_1 \circ \tilde{F}^{[p]}(z,\tilde{z}-F_{(3)}(z)), \\ &= E_1\big(F(z),\tilde{z}-F_{(3)}(z)\big), \\ &= (z+F_{(2)}(z)+\tilde{z},\tilde{z}-F_{(3)}(z)), \\ &= (z,\tilde{z})+\big(\tilde{z}+F_{(2)}(z),-F_{(3)}(z)\big). \end{aligned}$$

Además, su matriz jacobiana está dada por

$$DG(z,\tilde{z}) = \begin{pmatrix} I_p + DF_{(2)}(z) & I_p \\ -DF_{(3)}(z) & I_p \end{pmatrix},$$

y así los determinantes de $DG(z,\tilde{z})$ y $DF(z)$ son iguales. Por tanto, *si $F=(F_1,\ldots,F_n)$ es Keller, siempre existe $\hat{m}\geq 0$ tal que la inyectividad de F es equivalente a la inyectividad de alguna aplicación de la forma*

$$z \mapsto z + \tilde{H}_{(1)}(z) + \tilde{H}_{(2)}(z) + \tilde{H}_{(3)}(z),$$

donde $z\in\mathbb{C}^{n+\hat{m}}$, cada componente de $\tilde{H}_{(i)}$ o es cero o es homogéneo de grado $i\in\{1,2,3\}$ y cualquier matriz jacobiana de $\tilde{H}_{(1)}(z)+\tilde{H}_{(2)}(z)+\tilde{H}_{(3)}(z)$ es nilpotente[1].

Observación 4.7. En el acápite § 4.6 no es necesario considerar aplicaciones de Keller: basta elegir una aplicación polinomial cuya matriz jacobiana en el cero tiene inversa y concluir que la matriz jacobiana de $\tilde{H}_{(1)}(z)+\tilde{H}_{(2)}(z)+\tilde{H}_{(3)}(z)$ en el origen es nilpotente.

4.8. La aplicación $\tilde{z}\mapsto\tilde{z}+\tilde{H}_{(1)}(\tilde{z})+\tilde{H}_{(2)}(\tilde{z})+\tilde{H}_{(3)}(\tilde{z})$ induce en el producto $\mathbb{C}^q\times\mathbb{C}=\{(\tilde{z},t):\tilde{z}\in\mathbb{C}^q, t\in\mathbb{C}\}$ la aplicación

$$(\tilde{z},t)\mapsto(\tilde{z},t)+(t^2\tilde{H}_{(1)}(\tilde{z})+t\tilde{H}_{(2)}(\tilde{z})+\tilde{H}_{(3)}(\tilde{z}),0),$$

[1] En el anillo graduado de las matrices cuadradas de orden $n+\hat{m}$ se cumple que $I+a$ tiene inversa si y sólo si $a^N=0$ para algun $N\geq 2$ (i.e., a es nilpotente). De hecho, la inversa será $\sum_{k\geq 0}(-a)^k$. En efecto, cuando la inversa de $I+a$ (con $a\neq 0$) este bien definida, esta será de la forma $I+b_{i_1}+\cdots+b_{i_m}$, y asi la igualdad $(I+a)(I+b_{i_1}+\cdots+b_{i_m})=I$ junto a un natural argumento de inducción permite obtener la igualdad $b_{i_m}=(-a)^m$ y, así, $a^{m+1}=0$.

y ambas son mutuamente inyectivas (resp. Keller). En consecuencia, cuando la aplicación $F = (F_1, \ldots, F_n)$ es Keller, siempre existe $m \geq 0$ tal que la inyectividad de F es equivalente a la inyectividad de alguna aplicación de la forma $\hat{z} \mapsto \hat{z} + H(\hat{z})$, donde $\hat{z} \in \mathbb{C}^{n+m}$, cada componente de H es homogénea de grado tres y la matriz jacobiana de $H(\hat{z})$ es nilpotente. Por tanto, *para dar una respuesta a la conjetura jacobiana de Keller basta estudiar la inyectividad de todas las aplicaciones de la forma $z \mapsto z + H(z)$, donde las componentes no nulas de H son polinomios homogéneos de grado tres y cada $DH(z)$ es nilpotente [2].*

Observación 4.9. El resultado demostrado en § **4.8** aún se puede refinar. Por ejemplo, los autores de [7] muestran que en § **4.8** es posible suponer que cada $DH(z)$ no solo es nilpotente sino también simétrica. Del mismo modo, los trabajos de Drużkowski [8] reducen el estudio de la conjetura jacobiana de Keller a las aplicaciones de la forma

$$\mathbb{C}^n \ni z \mapsto z + \left(\ell_1^3, \ldots, \ell_n^3\right) \in \mathbb{C}^n,$$

donde cada $\ell_j = a_{1,j} z_1 + a_{2,j} z_2 + \cdots + a_{n,j} z_n$ es lineal en $z = (z_1, \ldots, z_n)$.

Apéndice

La siguiente proposición, tomada de [21], fue utilizada en § **2.4**.

Proposición 4.10. *Si $A = \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ es una $\mathbb{Z}$ subálgebra de una $\mathbb{Q}-$álgebra, entonces existe un conjunto finito $E \subset \mathbb{Z}$ fuera del cual cada primo $p \in \mathbb{Z}$ está en algún ideal maximal $\mathfrak{m}_p$ de A y el cociente $A/\mathfrak{m}_p$ es un cuerpo finito.*

Prueba. Se procede por indución sobre m. Si $m = 0$ se tiene $A = \mathbb{Z}$ y el resultado se logra con el ideal generado por p. Si $m \geq 1$, se consideran dos casos: cuando $x_1, \ldots, x_n$ son algebraicamente independientes sobre $\mathbb{Q}$, o en su defecto cuando existe un polinomio $f \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n] - \mathbb{Z}$ con $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

En el primer caso, la proposición se obtiene usando $(p, x_1, \dots, x_n) \subset A$, el ideal generado por $x_1, \dots, x_n$ y p.

En el segundo caso, se asume que X_n aparece en la expresión de f y se observa que por cada $N \geq 1$ las reglas $X_n \mapsto X_n$ y $X_j \mapsto X_j + (X_n)^{N^j}$, $j < n$, definen de forma natural un $\mathbb{Z}-$automorfismo ϕ_n de $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$. Más aún, se obtiene la siguiente propiedad.

Afirmación: *Existe $N \geq 1$ tal que la imagen de f bajo ϕ_n es un polinomio de la forma*

$$cX_n^m + f_{m-1}(X_1, \dots, X_{n-1})X_n^{m-1} + \cdots + f_0(X_1, \dots, X_{n-1}),$$

donde $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, y para $0 \leq i \leq m-1$ se tiene $f_i \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_{n-1}]$.

Prueba de la afirmación. En efecto, basta elegir $N \geq 1$ como una cota superior de todos los exponentes en cada variable que aparece en f y estudiar los exponentes de X_n, en las imágenes de los monomios que aparecen en la expresión de f. Notemos que estos exponentes se escriben como expresiones polinomiales de N. Por los tanto, la afirmación es verdadera. $\square$

Hecho esto, aplicamos la hipótesis inductiva a $B = \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_{n-1}]$. De este modo, por cada $p \in \mathbb{Z}$ fuera de un conjunto finito $E_1 \subset \mathbb{Z}$, existe un ideal maximal $\eta_p = \eta$ de B de modo que $p \in \eta_p$ y el cociente B/η_p es un cuerpo finito.

Análogamente, para E_2, el conjunto de los divisores primos de $c \in \mathbb{Z}$, definido en la afirmación, se elige $E = E_1 \cup E_2$ y se cumple la propiedad deseada. Para ver esto se usa el proceso de localización, es decir se considera el conjunto $S = \{1, c, c^2, \dots\} \subset \mathbb{Z} \subset B$ y el anillo $S^{-1}B = \{\frac{g}{\mathfrak{s}} \in \mathbb{Q}[X_1, \dots . X_{n-1}] : g \in B, \mathfrak{s} \in S\}$. En ese sentido, la afirmación muestra que x_n es la raíz de un polinomio mónico con coeficientes en $S^{-1}B$.

Del mismo modo, el conjunto $\tilde{S} \subset B/\eta$ de las clases de equivalencias inducidas por S (cerrado por la multiplicación) permite definir el anillo $\tilde{S}^{-1}(B/\eta)$. Este anillo es isomorfo al cociente $S^{-1}B/S^{-1}\eta$, donde

$S^{-1}\eta = \{h/s : h \in \eta, s \in S\}$ es un ideal en $S^{-1}B$. Pero $p \in \eta$ y c son primos relativos, y así la clase $\tilde{c} \in B/\eta$ es una unidad en B/η. En consecuencia $\tilde{S}^{-1}(B/\eta)$ es igual a B/η. Por lo tanto $S^{-1}B/S^{-1}\eta \simeq \tilde{S}^{-1}(B/\eta)$ es un cuerpo finito.

Por otro lado se tiene $S^{-1}B \subset S^{-1}B[x_n]$. Como x_n es la raíz de un polinomio mónico con coeficientes en $S^{-1}B$, existe un ideal maximal $\mathfrak{m} \subset S^{-1}B[x_n]$ que contiene a $S^{-1}\eta$. A partir de esto se obtiene que la inclusión $S^{-1}B/S^{-1}\eta \hookrightarrow S^{-1}B[x_n]/\mathfrak{m}$ es integral y por eso finita. Por lo tanto $S^{-1}B[x_n]/\mathfrak{m}$ es un cuerpo finito.

Para terminar consideramos $\mathfrak{P} = \varphi^{-1}(\mathfrak{m})$, donde $\varphi : B[x_n] \to S^{-1}B[x_n]$ es la aplicación canónica. Este $\mathfrak{P}$ es un ideal primo en $B[x_n]$ y así la aplicación $B[x_n]/\mathfrak{P} \mapsto S^{-1}B[x_n]/\mathfrak{m}$ será inyectiva. En consecuencia, $B[x_n]/\mathfrak{P}$ es finito. Por lo tanto, si $\mathfrak{m}_p$ es un ideal maximal de $A = B[x_n]$ que contiene $\mathfrak{P}$, se obtiene que $A/\mathfrak{P} \mapsto A/\mathfrak{m}_p$ es sobreyectiva, y por lo tanto $A/\mathfrak{m}_p$ será un cuerpo finito. $\square$

Referencias

[1] Andrzej Białynicki-Birula and Maxwell Rosenlicht; *Injective morphisms of real algebraic varieties*, Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962), 200–203. MR 0140516 (25 #3936)

[2] Hyman Bass, Edwin H. Connell, and David Wright; *The Jacobian conjecture: reduction of degree and formal expansion of the inverse*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **7** (1982), no. 2, 287–330. MR 663785(83k:14028)

[3] L. Andrew Campbell; *Unipotent Jacobian matrices and univalent maps*, Combinatorial and computational algebra (Hong Kong, 1999), Contemp. Math., vol. **264**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, pp. 157–177. MR 1800694 (2001m:26027)

[4] Eduardo Cabral Balreira; *Foliations and global inversion*, Comment. Math. Helv. **85** (2010), no. 1, 73–93. MR 2563681 (2010j:58085)

[5] Marc Chamberland and Gary Meisters; *A mountain pass to the Jacobian conjecture*, Canad. Math. Bull. **41** (1998), no. 4, 442–451. MR 1658243 (99m:58044)

[6] Sławomir Cynk and Kamil Rusek; *Injective endomorphisms of algebraic and analytic sets*, Ann. Polon. Math. **56** (1991), no. 1, 29–35. MR 1145567 (93d:14025)

[7] Michiel de Bondt and Arno van den Essen; *A reduction of the Jacobian conjecture to the symmetric case*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), no. 8, 2201–2205. MR 2138860 (2006a:14107)

[8] Ludwik M. Drużkowski; *An effective approach to Keller's Jacobian conjecture*, Math. Ann. **264** (1983), no. 3, 303–313. MR 714105 (85b:14015a)

[9] Alexandre Fernandes, Carlos Gutierrez, and Roland Rabanal; *On local diffeomorphisms of* $\mathbb{R}^n$ *that are injective*, Qual. Theory Dyn. Syst. **4** (2003), no. 2, 255–262 (2004). MR 2129721 (2005m:58021)

[10] A. V. Jagžev; *On a problem of O.-H. Keller*, Sibirsk. Mat. Zh. **21** (1980), no. 5, 141–150, 191. MR 592226 (82e:14020)

[11] Ming Chang Kang; *Injective morphisms of affine varieties*, Proc. Amer. Math. Soc. **119** (1993), no. 1, 1–4. MR 1146862 (93k:14006)

[12] Ott-Heinrich Keller; *Ganze Cremona-Transformationen*, Monatsh. Math. Phys. **47** (1939), no. 1, 299–306. MR 1550818

[13] Serge Lang; *Algebra*, third ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 211, Springer-Verlag, New York, 2002. MR 1878556 (2003e:00003)

[14] Masayoshi Nagata; *Local rings*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 13, Interscience Publishers a division of John Wiley & Sons New York-London, 1962. MR 0155856 (27 #5790)

[15] Scott Nollet and Frederico Xavier; *Global inversion via the Palais-Smale condition*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **8** (2002), no. 1, 17–28. MR 1877825 (2002m:58013)

[16] S. Nollet and F. Xavier; *Holomorphic injectivity and the Hopf map*, Geom. Funct. Anal. **14** (2004), no. 6, 1339–1351. MR 2135170 (2006f:32025)

[17] Sergey Pinchuk; *A counterexample to the strong real Jacobian conjecture*, Math. Z. **217** (1994), no. 1, 1–4. MR 1292168 (95g:14018)

[18] Patrick J. Rabier; *Ehresmann fibrations and Palais-Smale conditions for morphisms of Finsler manifolds*, Ann. of Math. (2) **146** (1997), no. 3, 647–691. MR 1491449 (98m:58020)

[19] Roland Rabanal; *On differentiable area-preserving maps of the plane*, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) **41** (2010), no. 1, 73–82. MR 2609212 (2011e:26011)

[20] Brian Smyth and Frederico Xavier; *Injectivity of local diffeomorphisms from nearly spectral conditions*, J. Differential Equations **130** (1996), no. 2, 406–414. MR 1410896 (98b:58025)

[21] Arno van den Essen; *Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture*, Progress in Mathematics, vol. 190, Birkhäuser Verlag, Basel, 2000. MR 1790619 (2001j:14082)

[22] Arno van den Essen, Ha Huy Vui, Hanspeter Kraft, Peter Russell, and David Wright; *Polynomial automorphisms and related topics*, Publishing House for Science and Technology, Hanoi, 2007, Lecture notes from the International School and Workshop (ICPA2006) held in Hanoi, October 9–20, 2006, Edited by Hyman Bass, Nguyen Van Chau and Stefan Maubach. MR 2389268 (2009a:14001)

[23] Stuart Sui Sheng Wang; *A Jacobian criterion for separability*, J. Algebra **65** (1980), no. 2, 453–494. MR 585736 (83e:14010)

Abstract

The polynomial maps whose Jacobian determinant is equal to 1 are called Keller maps. The Keller Jacobian conjecture claims that every Keller map is injective. This conjecture is true for polynomials whose degree is less than or equal to two. In this paper we prove that the general case reduces to the study of the injectivity of maps of the form $z \mapsto z + H(z)$, where the nonzero components of H are homogeneous polynomials of degree three, and every Jacobian matrix $DH(z)$ is nilpotent.

Keywords: Keller maps, polinomial ring, automorphism.

Percy Fernandez
Sección Matemáticas
Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú
Av. Universitaria 1801, San Miguel, Lima 32, Perú
pefernan@pucp.edu.pe

Roland Rabanal
Sección Matemáticas
Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú
Av. Universitaria 1801, San Miguel, Lima 32, Perú
rrabanal@pucp.edu.pe