Cálculo exacto de la matriz exponencial

Rubén Agapito[1]

Octubre, 2014

Resumen

Presentamos varios métodos que permiten el cálculo exacto de la matriz exponencial e^{tA}. Los métodos que incluyen el cálculo de autovectores y la transformada de Laplace son bien conocidos, y son mencionados aquí por completitud. Se mencionan otros métodos, no tan conocidos en la literatura, que no incluyen el cálculo de autovectores, y que proveen de fórmulas genéricas aplicables a cualquier matriz.

MSC(2010): 15A16, 15A18, 34-01, 44A10.

Palabras Clave: Matriz exponencial, matriz diagonalizable, forma canónica de Jordan, triangularización de Schur, funciones matriciales, interpolación de Lagrange-Sylvester, fórmula espectral de Putzer, transformada de Laplace.

1. *Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias, PUCP.*

1. Introducción

La matriz exponencial es una herramienta muy útil en la resolución de sistemas lineales de primer orden. Nos provee de una fórmula cerrada para sus soluciones, y con ayuda de ésta puede analizarse la controlabilidad y observabilidad de un sistema lineal ([1]). Existen varios métodos para calcular la matriz exponencial, ninguno de ellos computacionalmente eficiente ([9]). Sin embargo, desde el punto de vista teórico es importante conocer propiedades de esta función matricial. Fórmulas que involucran el cálculo de autovectores generalizados y transformada de Laplace han sido utilizados en una amplia cantidad de libros texto, y por este motivo, en este trabajo, se pretende brindar métodos alternativos, no muy conocidos, de didáctica amable. Existen otros métodos ([4],[5]) de por sí interesantes pero que no han sido mencionados en la lista de casos, debido a su practicidad en implementación.

Desarrollaremos ocho casos o métodos para calcular la matriz exponencial. Se brindan ejemplos de cómo aplicar los métodos no tan conocidos en casos concretos, y para los casos más conocidos se cita la respectiva bibliografía.

2. Definiciones y resultados básicos

La matriz exponencial e^{tA} puede ser definida generalizando la noción de serie de Maclaurin de la función exponencial escalar vía

$$\Phi(t) = \mathrm{e}^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k.$$

Para establecer la convergencia de esta serie, definamos primero la norma de Frobenius de una matriz de tamaño $m \times n$ mediante

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}.$$

Si $A(:,j)$ denota a la j-ésima columna de A, y $A(i,:)$ su i-ésima fila, es fácil ver que se cumple

$$\|A\|_F = \left(\sum_{j=1}^{n} \|A(:,j)\|_2^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{m} \|A(i,:)\|_2^2\right)^{1/2}.$$

Usaremos esta norma por comodidad, ya que en un espacio vectorial de dimensión finita todas las normas son equivalentes.

Una propiedad importante que utilizaremos es saber cómo acota la norma de Frobenius a un producto de matrices. Dadas las matrices $A_{m\times p}$ y $B_{p\times n}$, formamos el producto $C = AB$, con entradas $c_{ij} = A(i,:)\,B(:,j)$. Si A tuviese entradas complejas, en la obtención de c_{ij} se aplica conjugada a la fila $A(i,:)$. Recuérdese la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|c_{ij}| \leq \|A(i,:)\|_2 \, \|B(:,j)\|_2.$$

Luego se tiene

$$\begin{aligned}
\|AB\|_F^2 &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|^2 \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \|A(i,:)\|_2^2 \|B(:,j)\|_2^2 \\
&= \sum_{i=1}^{m} \|A(i,:)\|_2^2 \sum_{j=1}^{n} \|B(:,j)\|_2^2 = \|A\|_F^2 \|B\|_F^2.
\end{aligned}$$

Si aplicamos esta desigualdad a una matriz cuadrada A es fácil deducir lo siguiente

$$\|A^n\|_F \leq \|A\|_F^n, \quad \text{para todo } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Formalmente debemos examinar la convergencia del siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}\right).$$

Para ello basta observar que se satisface

$$\left\|\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}\right\|_F \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{\|A^k\|_F}{k!} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{\|A\|_F^k}{k!} \leq \mathrm{e}^{\|A\|_F},$$

y así queda demostrado que e^{A} está bien definido para cualquier matriz cuadrada con entradas constantes.

Es útil recordar cómo se comporta la matriz exponencial bajo derivación:

$$\begin{aligned}
\Phi^{(1)}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^{k}A^{k}\right)\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(I + tA + \frac{1}{2!}t^{2}A^{2} + \cdots + \frac{1}{k!}t^{k}A^{k} + \cdots\right)\\
&= A + \frac{2}{2!}tA^{2} + \cdots + \frac{k}{k!}t^{k-1}A^{k} + \cdots\\
&= A\left(I + tA + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}t^{k-1}A^{k-1} + \cdots\right) = A\,\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tA}\,A.
\end{aligned}$$

Usando inducción y el convenio $\Phi^{(0)}(t) = \Phi(t)$, se deduce la fórmula

$$\Phi^{(k)}(t) = \frac{\mathrm{d}^{k}}{\mathrm{d}t^{k}}\,\mathrm{e}^{tA} = A^{k}\,\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tA}\,A^{k}, \quad k \in \mathbb{Z}_{0}^{+}. \tag{2.1}$$

Obsérvese que la fórmula para la primera derivada implica que la función $x(t) = \mathrm{e}^{tA}\,x_0$ es solución del problema de valor inicial del siguiente sistema de primer orden

$$\dot{x} = Ax, \qquad x(0) = x_0.$$

Dos resultados conocidos de álgebra lineal (ver [8]) que usaremos más adelante son los siguientes teoremas.

Teorema 2.1 (de triangularización de Schur). *Toda matriz $A_{n\times n}$ es (unitariamente) similar a una matriz triangular superior T, esto es, existe una matriz unitaria U tal que $A = UTU^{-1}$. Además, las entradas en la diagonal de T son los autovalores de A.* □

Teorema 2.2 (de Cayley-Hamilton). *Cualquier matriz $A_{n\times n}$ es raíz de su propio polinomio característico.* □

Pasamos ahora a detallar ocho casos o métodos para hallar la matriz exponencial.

3. Matriz diagonalizable

Dada una matriz diagonal $n \times n$

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n),$$

es fácil deducir que se cumple $D^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)$ para todo $k \in \mathbb{Z}^+$. Luego

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{tD} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} D^k = \operatorname{diag}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda_1^k, \ldots, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda_n^k \right) \\ &= \operatorname{diag}\big(\mathrm{e}^{t\lambda_1}, \ldots, \mathrm{e}^{t\lambda_n}\big), \end{aligned}$$

es también una matriz diagonal. Ahora, en el caso que A sea una matriz diagonalizable se sabe que existe una matriz invertible P formada por los autovectores de A y una matriz diagonal D formada por los correspondientes autovalores de A tales que $A = PDP^{-1}$. Es sencillo verificar la identidad $A^k = PD^kP^{-1}$ para todo $k \in \mathbb{Z}^+$. Luego se tiene

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{tA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \big(PD^kP^{-1}\big) = P \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} D^k \right) P^{-1} \\ &= P\,\mathrm{e}^{tD}\,P^{-1}. \end{aligned}$$

En consecuencia, es trivial encontrar la matriz exponencial de una matriz diagonalizable, siempre y cuando hallemos previamente todos los autovalores de A con sus correspondientes autovectores.

Este caso es bien conocido. Ver [11] para apreciar algunos ejemplos de cerca.

4. Matriz no diagonalizable

Cuando una matriz no es diagonalizable se sabe que es similar a una matriz en forma canónica de Jordan, esto es, una matriz diagonal por bloques, donde cada bloque es de la forma (para un bloque de tamaño $k \times k$ con autovalor λ)

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & & \\ & \lambda & 1 & & 0 & \\ & & \lambda & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{bmatrix}.$$

En este caso la matriz exponencial toma la forma

$$\mathrm{e}^{tJ} = \mathrm{e}^{t\lambda} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2! & t^3/3! & \cdots & t^{k-1}/(k-1)! \\ & 1 & t & t^2/2! & \cdots & t^{k-2}/(k-2)! \\ & & 1 & t & \cdots & t^{k-3}/(k-3)! \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & & & t \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Una manera de demostrar esta fórmula es considerar el sistema de primer orden $\dot{x} = Jx$ con condición inicial $x(0) = x_0$. Por un lado, sabemos que la solución de este sistema está dada por $x(t) = \mathrm{e}^{tJ} x_0$. Por otro lado, este sistema es fácil de resolver, empezando por la última ecuación, la cual está desacoplada, y luego se resuelve cada ecuación lineal de primer orden una por una, vía el método del factor integrante.

En el caso que la matriz $A_{n\times n}$ no es diagonalizable, se sabe que es similar a una forma canónica de Jordan $n \times n$

$$J = \mathrm{diag}(J_1, J_2, \ldots, J_m),$$

en donde hemos supuesto que existen m autovalores distintos con multiplicidades mayores o iguales a uno. Si algún bloque de Jordan J_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, es de tamaño 2×2 o superior, se debe a que el autovalor λ_k no posee una base completa de autovectores, y debe entonces completarse con autovectores generalizados, ver [11]. Si formamos la matriz P en donde cada columna es un autovector (generalizado), resulta ser una matriz invertible y se cumple

$$A = PJP^{-1}.$$

Al aplicar un cálculo similar al caso diagonalizable se demuestra

$$\mathrm{e}^{tA} = P\,\mathrm{diag}\big(\mathrm{e}^{tJ_1}, \mathrm{e}^{tJ_2}, \ldots, \mathrm{e}^{tJ_m}\big)P^{-1}.$$

Este caso es también muy conocido. Ver [11] para apreciar algunos ejemplos.

5. Matrices triangulares

Sea S una matriz triangular superior (para una matriz triangular inferior se realiza un desarrollo similar) y escribámosla como la suma de una matriz diagonal con una matriz nilpotente

$$S = D + N.$$

Recuérdese que una matriz N es llamada *nilpotente* si existe un entero positivo r tal que $N^r = 0$. El menor entero positivo para el cual esta igualdad se cumple, es llamado el *índice de nilpotencia* de la matriz.

Asumiendo la conocida propiedad sobre matrices exponenciales (ver [1])

$$\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^{A}\,\mathrm{e}^{B}, \quad \text{si } AB = BA,$$

calculamos

$$\mathrm{e}^{tS} = \mathrm{e}^{t(D+N)} = \mathrm{e}^{tD}\,\mathrm{e}^{tN}.$$

Sabemos cómo calcular la matriz exponencial de una matriz diagonal, así que discutamos cómo obtener e^{tN}. Basta observar que al ser N nilpotente, la serie de esta matriz se vuelve finita, ya que el número de sumandos queda acotado por el índice de nilpotencia de N. Éste a su vez queda acotado por el grado de su polinomio minimal (recordar que toda matriz nilpotente posee todos sus autovalores iguales a cero).

Podemos generalizar este método a cualquier matriz $A_{n\times n}$. Para ello, basta aplicar el teorema de triangularización de Schur, $A = USU^{-1}$, donde U es una matriz unitaria y S está en forma triangular superior. Con ello obtenemos

$$\mathrm{e}^{tA} = U\,\mathrm{e}^{tS}\,U^{-1},$$

y de aquí ya sabemos cómo proceder.

6. La fórmula espectral de Putzer

En [10], Putzer describe dos métodos para calcular e^{tA}. Estos se basan en el hecho de que e^{tA} es un polinomio en A cuyos coeficientes son funciones escalares de t que pueden ser halladas recursivamente resolviendo un sistema sencillo de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Mostraremos sólo el segundo método, por ser más fácil de entender e implementar.

Teorema 6.1. *Dada una matriz A de tamaño $n\times n$, supongamos que conocemos todos sus autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, no necesariamente distintos, listados en un orden especificado pero arbitrario. Entonces se cumple*

$$\mathrm{e}^{tA} = r_1(t)P_0 + r_2(t)P_1 + \cdots + r_n(t)P_{n-1},$$

donde

$$P_0 = I, \qquad P_k = \prod_{j=1}^{k}(A - \lambda_j I), \quad k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

y $r_1(t), \ldots, r_n(t)$ son soluciones del sistema diferencial

$$\begin{aligned}
\dot{r}_1 &= \lambda_1 r_1, & r_1(0) &= 1,\\
\dot{r}_2 &= \lambda_2 r_2 + r_1, & r_2(0) &= 0,\\
&\ \vdots\\
\dot{r}_n &= \lambda_n r_n + r_{n-1}, & r_n(0) &= 0.
\end{aligned}$$

Prueba. Ponemos

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} r_{k+1}(t) P_k,$$

y definimos $r_0(t) \equiv 0$. Teniendo en cuenta $\dot{r}_{k+1} = \lambda_{k+1} r_{k+1} + r_k$, calculamos

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) - \lambda_n \Phi(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \dot{r}_{k+1}(t) P_k - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_n r_{k+1}(t) P_k \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k+1} r_{k+1} P_k + \sum_{k=0}^{n-1} r_k P_k \right) - \left(\sum_{k=0}^{n-2} \lambda_n r_{k+1} P_k + \lambda_n r_n P_{n-1} \right). \end{aligned}$$

Como del primer término podemos extraer $\lambda_n r_n P_{n-1}$, y el segundo puede ser reescrito como

$$\sum_{k=0}^{n-1} r_k P_k = \sum_{k=1}^{n-1} r_k P_k = \sum_{k=0}^{n-2} r_{k+1} P_{k+1},$$

el lado derecho de la igualdad se simplifica a

$$\sum_{k=0}^{n-2} \Big[(\lambda_{k+1} - \lambda_n) P_k + P_{k+1} \Big] r_{k+1}.$$

Ahora, como se cumple $P_{k+1} = (A - \lambda_{k+1} I) P_k$, la expresión entre corchetes se reduce a $(A - \lambda_n I) P_k$. Además se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-2} (A - \lambda_n I) P_k r_{k+1} &= \sum_{k=0}^{n-1} (A - \lambda_n I) P_k r_{k+1} - \underbrace{(A - \lambda_n I) P_{n-1}}_{P_n} r_n, \\ &= (A - \lambda_n I)\Phi - P_n r_n. \end{aligned}$$

Pero el teorema de Cayley-Hamilton fuerza $P_n = 0$. Así, hemos obtenido que $\dot{\Phi} - \lambda_n \Phi = (A - \lambda_n I)\Phi$ implica $\dot{\Phi} = A\Phi$. Por último, como $\Phi(0) = r_1(0) P_0 = I$, se sigue $\Phi(t) = \mathrm{e}^{tA}$ por unicidad de soluciones. $\square$

Como aplicación de este método, hallemos fórmulas para la matriz exponencial de una matriz 2×2 en la forma

$$\mathrm{e}^{tA} = r_1(t)I + r_2(t)(A - \lambda_1 I),$$

con autovalores $\{\lambda_1, \lambda_2\}$. De acuerdo con la naturaleza de los autovalores tenemos tres casos a estudiar.

- **Autovalores reales y distintos.** Debemos resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= \lambda_1 r_1, & r_1(0) &= 1, \\ \dot{r}_2 &= \lambda_2 r_2 + r_1, & r_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

  Si resolvemos la primera ecuación, la cual siempre está desacoplada, obtenemos $r_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}$. Para la segunda, usando el método del factor integrante obtenemos

$$r_2(t) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\,\mathrm{e}^{(\lambda_1+\lambda_2)t} - \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}.$$

  En consecuencia, logramos la siguiente fórmula

$$\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{\lambda_1 t} I + \frac{\mathrm{e}^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}\big(\mathrm{e}^{\lambda_1 t} - 1\big)(A - \lambda_1 I).$$

- **Autovalores reales e iguales.** En este caso, al resolver el sistema de ecuaciones obtenemos $r_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}$ y $r_2(t) = t\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}$. Así, obtenemos la fórmula

$$\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{\lambda_1 t} I + t\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}(A - \lambda_1 I).$$

- **Autovalores complejos.** En el caso $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, con autovalores λ_1, λ_2, no habría problema en utilizar la misma fórmula que en el caso de autovalores reales y distintos. Pero si A tiene entradas reales, sus autovalores serían complejos y conjugados, digamos

$\lambda_1 = a + ib$, $\lambda_2 = a - ib$, con $b \neq 0$. En este caso, al resolver el sistema de ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned} r_1(t) &= \mathrm{e}^{\lambda_1 t} = \mathrm{e}^{at}\big[\cos(bt) + i\,\mathrm{sen}(bt)\big], \\ r_2(t) &= \frac{\mathrm{e}^{\lambda_1 t} - \mathrm{e}^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \mathrm{e}^{at}\,\frac{\mathrm{sen}(bt)}{b}. \end{aligned}$$

Como $x(t) = \mathrm{e}^{tA}\,x_0$ es solución del sistema $\dot{x} = Ax$, con condición inicial $x(0) = x_0$, al tener x_0 y A entradas reales, buscamos obviamente una solución real. Así, la parte real de la fórmula espectral es la solución real a considerar, esto es,

$$x(t) = \mathfrak{Re}\{x(t)\} = \big(\mathfrak{Re}\{r_1(t)\}I + \mathfrak{Re}\{r_2(t)(A - \lambda_1 I)\}\big)x_0 = \mathrm{e}^{tA}\,x_0,$$

y en consecuencia se concluye

$$\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{at}\cos(bt)I + \mathrm{e}^{at}\,\frac{\mathrm{sen}(bt)}{b}(A - aI).$$

7. Los casos particulares de Apostol

En [2], Apostol muestra cómo obtener fórmulas explícitas para la matriz exponencial e^{tA} en los siguientes casos:

- todos los autovalores de A son iguales,
- todos los autovalores de A son distintos,
- A tiene solo dos autovalores distintos, con uno de ellos de multiplicidad algebraica uno.

Si bien estos casos no cubren todas las alternativas posibles para el conjunto de autovalores de una matriz, exhibiremos estas fórmulas por su sencillez y porque nos ayudan a encontrar todas las fórmulas posibles para las matrices exponenciales de tamaño menor o igual a 3×3. Cabe señalar que la fórmula espectral de Putzer también nos ayudaría a deducir estas fórmulas, pero la manera obtenida por Apostol es más contundente.

Teorema 7.1. *Si A es una matriz $n\times n$ con todos sus autovalores iguales a λ entonces tenemos*

$$e^{tA} = e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k.$$

Prueba. Como las matrices λtI y $t(A-\lambda I)$ conmutan, tenemos

$$e^{tA} = e^{\lambda tI}\, e^{t(A-\lambda I)} = (e^{\lambda t}\, I)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k.$$

El teorema de Cayley-Hamilton implica $(A-\lambda I)^k = 0$ para $k \geq n$, y así el teorema queda demostrado. □

Teorema 7.2. *Si A es una matriz $n \times n$ con n autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, entonces tenemos*

$$e^{tA} = \sum_{k=1}^{n} e^{t\lambda_k}\, L_k(A),$$

donde los $L_k(A)$ son los coeficientes de interpolación de Lagrange dados por

$$L_k(A) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\frac{A-\lambda_j I}{\lambda_k-\lambda_j} \quad \textit{para } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Prueba. Aunque este teorema es un caso especial de la fórmula de interpolación de Lagrange-Sylvester (ver Sección 8, más adelante) daremos una prueba directa.

Definamos la siguiente función matricial de variable escalar

$$F(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{t\lambda_k}\, L_k(A).$$

Para probar $F(t) = e^{tA}$, mostraremos que F satisface la ecuación diferencial $F'(t) = AF(t)$, con condición inicial $F(0) = I$. En efecto, observemos que se cumple

$$AF(t) - F'(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{t\lambda_k}(A - \lambda_k I)L_k(A).$$

Por el teorema de Cayley-Hamilton se tiene $(A - \lambda_k I)L_k(A) = 0$ para cada k, y así F satisface la ecuación diferencial. Además, de

$$F(0) = \sum_{k=1}^{n} L_k(A) = I,$$

se deduce finalmente $F(t) = \mathrm{e}^{tA}$ por unicidad de soluciones. □

Teorema 7.3. *Sea A una matriz $n \times n$ ($n \geq 3$) con dos autovalores distintos λ y μ, donde λ tiene multiplicidad $n-1$ y μ tiene multiplicidad* 1. *Entonces se cumple*

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{tA} &= \mathrm{e}^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{t^k}{k!}(A - \lambda I)^k \\ &\quad + \left\{ \frac{\mathrm{e}^{\mu t}}{(\mu - \lambda)^{n-1}} - \frac{\mathrm{e}^{\lambda t}}{(\mu - \lambda)^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{t^k}{k!}(\mu - \lambda)^k \right\} (A - \lambda I)^{n-1}.\end{aligned}$$

Prueba. En versión escalar, para t fijo, la expansión de e^x en serie de Taylor centrada en λt es

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\lambda t}}{k!}(x - \lambda t)^k.$$

Ahora evaluamos en tA y particionamos convenientemente esta serie

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{tA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\lambda t}}{k!}(tA - \lambda t I)^k = \mathrm{e}^{\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(A - \lambda I)^k \\ &= \mathrm{e}^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{t^k}{k!}(A - \lambda I)^k + \mathrm{e}^{\lambda t} \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(A - \lambda I)^k \\ &= \mathrm{e}^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{t^k}{k!}(A - \lambda I)^k + \mathrm{e}^{\lambda t} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^{n-1+i}}{(n-1+i)!}(A - \lambda I)^{n-1+i}.\end{aligned}$$

Ahora reescribimos el segundo sumando de la última expresión. Como se cumple $A-\mu I = A-\lambda I-(\mu-\lambda)I$, tenemos, utilizando el teorema de Cayley-Hamilton, la igualdad

$$0=(A-\lambda I)^{n-1}(A-\mu I)=(A-\lambda I)^{n}-(\mu-\lambda)(A-\lambda I)^{n-1},$$

esto es, $(A-\lambda I)^n=(\mu-\lambda)(A-\lambda I)^{n-1}$. Por inducción, se deduce

$$(A-\lambda I)^{n+i}=(\mu-\lambda)^{i+1}(A-\lambda I)^{n-1},$$

y así también

$$\begin{aligned}(A-\lambda I)^{n-1+i}&=(A-\lambda I)^{n-1}(A-\lambda I)^{i}=\frac{1}{\mu-\lambda}(A-\lambda I)^{n}(A-\lambda I)^{i}\\&=\frac{1}{\mu-\lambda}(A-\lambda I)^{n+i}=(\mu-\lambda)^{i}(A-\lambda I)^{n-1}.\end{aligned}$$

Al reemplazar esta relación en la segunda suma obtenemos

$$\begin{aligned}&\left\{\sum_{i=0}^{\infty}\frac{t^{n-1+i}}{(n-1+i)!}(\mu-\lambda)^{i}\right\}(A-\lambda I)^{n-1}=\\&\qquad=\frac{1}{(\mu-\lambda)^{n-1}}\left\{\sum_{k=n-1}^{\infty}\frac{t^{k}}{k!}(\mu-\lambda)^{k}\right\}(A-\lambda I)^{n-1}\\&\qquad=\frac{1}{(\mu-\lambda)^{n-1}}\left\{\mathrm{e}^{t(\mu-\lambda)}-\sum_{k=0}^{n-2}\frac{t^{k}}{k!}(\mu-\lambda)^{k}\right\}(A-\lambda I)^{n-1},\end{aligned}$$

con lo cual culmina la demostración. □

Como aplicación deducimos las fórmulas de la matriz exponencial de cualquier matriz A de tamaño 3×3 de acuerdo con la multiplicidad de sus autovalores.

- Para un autovalor λ con multiplicidad algebraica tres, tenemos

$$\mathrm{e}^{tA}=\mathrm{e}^{\lambda t}\Big\{I+t(A-\lambda I)+\frac{1}{2}t^{2}(A-\lambda I)^{2}\Big\}.$$

- Para autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\, \frac{(A-\lambda_2 I)(A-\lambda_3 I)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)} &+ \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\, \frac{(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_3 I)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)} \\ &+ \mathrm{e}^{\lambda_3 t}\, \frac{(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}. \end{aligned}$$

- Para autovalores distintos λ_1, λ_2 con λ_1 de multiplicidad algebraica dos, tenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\big\{I + t(A-\lambda_1 I)\big\} &+ \frac{\mathrm{e}^{\lambda_2 t} - \mathrm{e}^{\lambda_1 t}}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}(A-\lambda_1 I)^2 \\ &- \frac{t\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}}{\lambda_2-\lambda_1}(A-\lambda_1 I)^2. \end{aligned}$$

8. Interpolación de Lagrange-Sylvester y el algoritmo de Gantmacher

El siguiente método, ilustrado en Gantmacher [3], no solo nos ayuda a calcular la matriz exponencial, sino también la evaluación matricial de cualquier función analítica. Primero mencionamos el caso en que los autovalores de una matriz son distintos, y luego el caso general cuando existen multiplicidades.

Teorema 8.1. *Si $f(A)$ es una matriz polinomial en $A_{n\times n}$ y si los autovalores de A son distintos, entonces $f(A)$ puede ser descompuesta como*

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i) z(\lambda_i),$$

acá $\{\lambda_i\}_{i=1,\ldots,n}$ son los autovalores de A y $z(\lambda_i)$ es la matriz $n\times n$ dada por

$$z(\lambda_i) = \prod_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{n} \frac{A-\lambda_k I}{\lambda_i-\lambda_k}.$$

Prueba. Por el teorema de Cayley-Hamilton $f(A)$ puede ser reducida a un polinomio de grado $n-1$, digamos

$$f(A) = c_{n-1}A^{n-1} + c_{n-2}A^{n-2} + \ldots + c_1 A + c_0 I.$$

Esta expresión polinomial puede ser factorizada vía interpolación de Lagrange cual

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n} p_i \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} (A - \lambda_k I).$$

Para calcular los pesos p_i, multiplicamos por la derecha a ambos lados de la igualdad por el j-ésimo autovector v_j correspondiente a λ_j. Este procedimiento nos entrega

$$\begin{aligned} f(A)v_j &= \sum_{i=1}^{n} p_i \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} (A - \lambda_k I)v_j = p_j \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} (Av_j - \lambda_k v_j) \\ &= p_j \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} (\lambda_j - \lambda_k)v_j, \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se obtiene al considerar $(A - \lambda_j I)v_j = 0$. Como los autovalores de A son distintos, se tiene $f(A)v_j = f(\lambda_j)v_j$, y se deduce fácilmente por comparación la igualdad

$$p_j = \frac{f(\lambda_j)}{\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} (\lambda_j - \lambda_k)}.$$

Por lo tanto, todo junto nos da

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i) \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} \frac{A - \lambda_k I}{\lambda_i - \lambda_k}.$$

□

Cuando los autovalores no son distintos, el algoritmo de Gantmacher, ver [3], puede ser usado para expandir la función analítica $f(A)$ como

$$f(A) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{f^{(k-1)}(\lambda_j)}{(k-1)!} Z_{jk},$$

donde m es el número de autovalores distintos, m_j es la multiplicidad del j-ésimo autovalor, $f^{(k)}(\lambda_j)$ es la derivada con respecto a λ evaluada en el j-ésimo autovalor y Z_{jk} son las *matrices constituyentes* (constantes) que una vez halladas son fijas para cualquier función analítica $f(A)$.

Ilustremos el uso de esta fórmula con un ejemplo.

Ejemplo 8.2. Hallemos e^{tA} para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 6 \end{bmatrix},$$

con polinomio característico $p_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 4)^2$. Tenemos entonces dos autovalores distintos: $\lambda_1 = 2$ con multiplicidad $m_1 = 1$ y $\lambda_2 = 4$ con multiplicidad $m_2 = 2$. Luego se tiene

$$\begin{aligned} f(A) &= \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{f^{(k-1)}(\lambda_j)}{(k-1)!} Z_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^{1} \frac{f^{(k-1)}(\lambda_1)}{(k-1)!} Z_{1k} + \sum_{k=1}^{2} \frac{f^{(k-1)}(\lambda_2)}{(k-1)!} Z_{2k} \\ &= f(\lambda_1) Z_{11} + f(\lambda_2) Z_{21} + f'(\lambda_2) Z_{22}. \end{aligned}$$

Recordemos que esta expansión es válida para cualquier función analítica. En nuestra situación, estamos interesados en la versión matricial de $f(\lambda) = \mathrm{e}^{t\lambda}$. Aquí los coeficientes a considerar son

$$f(\lambda_1) = \mathrm{e}^{2t}, \quad f(\lambda_2) = \mathrm{e}^{4t}, \quad f'(\lambda_2) = t\,\mathrm{e}^{4t}\,.$$

Para hallar las matrices constituyentes utilizamos funciones polinomiales conocidas. Como la matriz es de tamaño 3×3, el teorema de Cayley-Hamilton afirma que e^{tA} debe ser una función polinomial en I, A, y A^2. Usaremos entonces los siguientes criterios.

- Si $f(A) = I$, la versión escalar es $f(\lambda) = 1$. Luego, los coeficientes son $f(\lambda_1) = 1, f(\lambda_2) = 1, f'(\lambda_2) = 0$. Obtenemos así la ecuación $I = Z_{11} + Z_{21}$.
- Si $f(A) = A$, la versión escalar resulta $f(\lambda) = \lambda$. Los coeficientes son $f(\lambda_1) = 2, f(\lambda_2) = 4, f'(\lambda_2) = 1$. Obtenemos la ecuación $A = 2Z_{11} + 4Z_{21} + Z_{22}$.
- Si $f(A) = A^2$, con versión escalar $f(\lambda) = \lambda^2$, los coeficientes son $f(\lambda_1) = 4, f(\lambda_2) = 16, f'(\lambda_2) = 8$. Obtenemos entonces la ecuación $A^2 = 4Z_{11} + 16Z_{21} + 8Z_{22}$.

En consecuencia, debemos resolver el sistema matricial formal

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{11} \\ Z_{21} \\ Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ A \\ A^2 \end{bmatrix},$$

cuya solución es

$$\begin{bmatrix} Z_{11} \\ Z_{21} \\ Z_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 16 & -8 & 1 \\ -12 & 8 & -1 \\ 16 & -12 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ A \\ A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4I - 2A + \frac{1}{4}A^2 \\ -3I + 2A - \frac{1}{4}A^2 \\ 4I - 3A + \frac{1}{2}A^2 \end{bmatrix}.$$

Al poner todo junto vemos que

$$\begin{aligned} f(A) = e^{tA} &= e^{2t}\, Z_{11} + e^{4t}\, Z_{21} + t\, e^{4t}\, Z_{22} \\ &= e^{2t} \begin{bmatrix} 9/4 & 9/4 & -3 \\ -7/4 & 1/4 & -3 \\ 9/4 & 9/4 & 1 \end{bmatrix} + e^{4t} \begin{bmatrix} -5/4 & -9/4 & 3 \\ 7/4 & 3/4 & 3 \\ -9/4 & -9/4 & 0 \end{bmatrix} \\ &\qquad + t\, e^{4t} \begin{bmatrix} 3/2 & 7/2 & -4 \\ -5/2 & -1/2 & -4 \\ 7/2 & 7/2 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4}e^{2t}\left(e^{2t}(6t-5)+9\right) & \frac{1}{4}e^{2t}\left(e^{2t}(14t-9)+9\right) & e^{4t}(3-4t)-3e^{2t} \\ -\frac{1}{4}e^{2t}\left(e^{2t}(10t-7)+7\right) & \frac{1}{4}\left(e^{4t}(3-2t)+e^{2t}\right) & e^{4t}(3-4t)-3e^{2t} \\ \frac{1}{4}e^{2t}\left(e^{2t}(14t-9)+9\right) & \frac{1}{4}e^{2t}\left(e^{2t}(14t-9)+9\right) & 4e^{4t}t+e^{2t} \end{bmatrix}$$

es la matriz exponencial buscada. Cabe insistir en que una vez halladas las matrices constituyentes, podemos hallar fácilmente $\cos(A), \operatorname{sen}(A), \ldots,$ esto es, funciones matriciales de funciones analíticas.

9. Uso de soluciones fundamentales de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes

El siguiente método evita preguntarse si la matriz es diagonalizable, y tiene como prerrequisitos apenas el conocer el teorema de Cayley-Hamilton y saber cómo resolver ecuaciones diferenciales lineales escalares homogéneas de orden n con coeficientes constantes, digamos tipo

$$x^{(n)} + c_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + c_1 x' + c_0 x = 0.$$

El método está basado en el artículo de Leonard [6]. Cabe notar que el método no es fácil de aplicar si las raíces de la ecuación polinomial (o ecuación característica) asociada a la ecuación anterior son tediosas de obtener algebraicamente.

Los siguientes teoremas nos ayudarán a entender cómo funciona el método. El primer teorema garantiza la existencia y unicidad de un problema de valor inicial para una ecuación diferencial matricial, mientras el segundo brinda un método para construir la matriz exponencial en base a soluciones de problemas de valor inicial de ecuaciones diferenciales escalares.

Teorema 9.1. *Sea A una matriz constante $n \times n$ con polinomio característico*

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0.$$

Entonces $\Phi(t) = \mathrm{e}^{tA}$ *es la única solución de la ecuación diferencial matricial de orden* n *dada por*

$$\Phi^{(n)} + c_{n-1}\Phi^{(n-1)} + \cdots + c_1\Phi' + c_0\Phi = 0, \tag{9.1}$$

con condición inicial

$$\Phi(0) = I, \quad \Phi'(0) = A, \quad \Phi''(0) = A^2, \ldots, \Phi^{(n-1)}(0) = A^{n-1}. \tag{9.2}$$

Prueba. Primero demostraremos la unicidad. Supongamos que $\Phi_1(t)$ y $\Phi_2(t)$ son dos soluciones de (9.1) que satisfacen las condiciones iniciales dadas en (9.2). Definamos $\Phi(t) = \Phi_1(t) - \Phi_2(t)$. Debido a linealidad, esta función satisface (9.1), pero con condición inicial

$$\Phi(0) = \Phi^{(1)}(0) = \cdots = \Phi^{(n-1)}(0) = 0.$$

Esto implica que cada entrada de $\Phi(t)$ satisface el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{gathered} x^{(n)}(t) + c_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + c_1 x^{(1)}(t) + c_0 x(t) = 0, \\ x(0) = x^{(1)}(0) = \cdots = x^{(n-1)}(0) = 0, \end{gathered}$$

donde es obvio que la única solución es $x(t) = 0$ para todo t, la trivial. Por ende se tiene $\Phi(t) = 0$ para todo t, y obtenemos unicidad.

Ahora demostramos la existencia al confirmar que $\Phi(t) = \mathrm{e}^{tA}$ satisface el problema de valores iniciales (9.1)-(9.2). Sea A la matriz constante con polinomio característico $p(\lambda)$ descrito en la hipótesis. Recordemos la fórmula de la derivada k-ésima de la exponencial (ver Ecuación (2.1))

$$\Phi^{(k)}(t) = A^k\,\mathrm{e}^{tA}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Reemplazamos en el lado derecho de la Ecuación (9.1) y obtenemos

$$\big(A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1 A + c_0 I\big)\,\mathrm{e}^{tA} = p(A)\,\mathrm{e}^{tA} = 0$$

respaldados por el Teorema de Cayley-Hamilton. Por último, de la fórmula de la derivada k-ésima se deduce

$$\Phi^{(0)}(0) = I,\ \Phi^{(1)}(0) = A,\ \ldots, \Phi^{(n-1)}(0) = A^{n-1};$$

así $\Phi(t)$ satisface las condiciones iniciales. Ello termina la demostración. $\square$

Teorema 9.2. *Sea A una matriz constante $n \times n$ con polinomio característico*

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0.$$

Entonces se tiene

$$\mathrm{e}^{tA} = x_1(t)I + x_2(t)A + x_3(t)A^2 + \cdots + x_n(t)A^{n-1},$$

donde los $x_k(t)$, $1 \leq k \leq n$, son las soluciones de las ecuaciones diferenciales escalares de orden n dada por

$$x^{(n)} + c_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + c_1x' + c_0x = 0 \tag{9.3}$$

y que satisfacen las condiciones iniciales

$$\begin{array}{ccc} x_1(0) = 1 & x_2(0) = 0 & x_n(0) = 0 \\ x_1'(0) = 0 & x_2'(0) = 1 & x_n'(0) = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(0) = 0, & x_2^{(n-1)}(0) = 0, & x_n^{(n-1)}(0) = 1. \end{array} \tag{9.4}$$

Prueba. Definamos $\Phi(t) = x_1(t)I + x_2(t)A + x_3(t)A^2 + \cdots + x_n(t)A^{n-1}$, donde los $x_k(t)$ son soluciones de los problemas de valor inicial mencionados en el enunciado. Primero mostraremos que $\Phi(t)$ satisface la Ecuación (9.1). En efecto, se tiene

$$\begin{aligned} \Phi^{(n)}(t) + c_{n-1}\Phi^{(n-1)}(t) &+ \cdots + c_1\Phi^{(1)}(t) + c_0\Phi(t) \\ &= \left(x_1^{(n)} + c_{n-1}x_1^{(n-1)} + \cdots + c_1x_1' + c_0x_1\right)I \\ &\quad + \left(x_2^{(n)} + c_{n-1}x_2^{(n-1)} + \cdots + c_1x_2' + c_0x_2\right)A + \cdots \\ &\quad + \left(x_n^{(n)} + c_{n-1}x_n^{(n-1)} + \cdots + c_1x_n' + c_0x_n\right)A^{n-1} \\ &= 0I + 0A + \cdots + 0A^{n-1} = 0. \end{aligned}$$

Ahora mostraremos que satisface la condición inicial dada en (9.2):

$$\begin{aligned}
\Phi(0) &= x_1(0)I + x_2(0)A + \cdots + x_n(0)A^{n-1} = I,\\
\Phi'(0) &= x_1'(0)I + x_2'(0)A + \cdots + x_n'(0)A^{n-1} = A,\\
&\vdots\\
\Phi^{(n-1)}(0) &= x_1^{(n-1)}(0)I + x_2^{(n-1)}(0)A + \cdots + x_n^{(n-1)}(0)A^{n-1} = A^{n-1}.
\end{aligned}$$

Luego, por unicidad, se cumple

$$\mathrm{e}^{tA} = \Phi(t) = x_1(t)I + x_2(t)A + \cdots + x_n(t)A^{n-1}$$

para todo t. □

Pasemos a ilustrar el método.

Ejemplo 9.3. Deseamos hallar la matriz exponencial e^{tA} de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2\\ 1 & 3 & 2\\ -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Para ello calculamos su polinomio característico cual

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 10\lambda^2 + 32\lambda - 32.$$

Asumimos, debido al Teorema 9.2, se cumple

$$\mathrm{e}^{tA} = x_1(t)I + x_2(t)A + x_3(t)A^2. \tag{9.5}$$

El polinomio característico produce la siguiente ecuación diferencial escalar con coeficientes constantes:

$$x^{(3)} - 10x'' + 32x' - 32x = 0.$$

La solución general es hallada en base a la ecuación característica

$$m^3 - 10m^2 + 32m - 32 = (m-2)(m-4)^2 = 0.$$

Así, la solución general toma la forma

$$x(t) = \alpha_1\,\mathrm{e}^{2t} + \alpha_2\,\mathrm{e}^{4t} + \alpha_3 t\,\mathrm{e}^{4t}.$$

- Para hallar $x_1(t)$ usamos las condiciones iniciales $x(0) = 1, x'(0) = 0, x''(0) = 0$. Usando esta información obtenemos
$$x_1(t) = 4\,\mathrm{e}^{2t} - 3\,\mathrm{e}^{4t} + 4t\,\mathrm{e}^{4t}\,.$$
- Para $x_2(t)$ usamos las condiciones $x(0) = 0, x'(0) = 1, x''(0) = 0$, y así lograr
$$x_2(t) = -2\,\mathrm{e}^{2t} + 2\,\mathrm{e}^{4t} - 3t\,\mathrm{e}^{4t}\,.$$
- Para $x_3(t)$ usamos las condiciones $x(0) = 0, x'(0) = 0, x''(0) = 1$, y obtenemos
$$x_3(t) = \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{2t} - \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{4t} + \frac{1}{2}t\,\mathrm{e}^{4t}\,.$$

Por último, reemplazamos estas funciones en la Fórmula (9.5) y conseguimos

$$\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{2t}(4 - 3\,\mathrm{e}^{2t} + 4t\,\mathrm{e}^{2t})I + \mathrm{e}^{2t}(-2 + 2\,\mathrm{e}^{2t} - 3t\,\mathrm{e}^{2t})A + \tfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^{2t}(1 - \mathrm{e}^{2t} + 2t\,\mathrm{e}^{2t})A^2$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4}e^{2t}\left(e^{2t}(6t-5)+9\right) & \frac{1}{4}e^{2t}\left(e^{2t}(14t-9)+9\right) & e^{4t}(3-4t)-3e^{2t} \\ -\frac{1}{4}e^{2t}\left(e^{2t}(10t-7)+7\right) & \frac{1}{4}\left(e^{4t}(3-2t)+e^{2t}\right) & e^{4t}(3-4t)-3e^{2t} \\ \frac{1}{4}e^{2t}\left(e^{2t}(14t-9)+9\right) & \frac{1}{4}e^{2t}\left(e^{2t}(14t-9)+9\right) & 4e^{4t}t+e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Puede verificarse que la matriz A no es diagonalizable, pero esto no es relevante para los cálculos.

¿Podemos obviar algunos cálculos en el ejemplo anterior? La respuesta es afirmativa, como lo sugiere Liz [7], en la obtención de las funciones escalares $x_i(t)$. Para ello, basta calcular la inversa de una matriz constante particular. El siguiente teorema sienta la pauta.

Teorema 9.4. *Sea A una matriz $n \times n$ constante con polinomio característico*
$$p(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0.$$
Entonces se tiene
$$\mathrm{e}^{tA} = x_1(t)I + x_2(t)A + \cdots + x_n(t)A^{n-1},$$

donde

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = B_0^{-1} \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{bmatrix}; \tag{9.6}$$

acá B_0 *es la evaluación, en* $t = 0$, *de la matriz*

$$B_t = \begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_1'(t) & \cdots & \varphi_1^{(n-1)}(t) \\ \varphi_2(t) & \varphi_2'(t) & \cdots & \varphi_2^{(n-1)}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_n(t) & \varphi_n'(t) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix},$$

siempre que $S = \{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)\}$ *sea un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación diferencial lineal homogénea*

$$x^{(n)} + c_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + c_1 x' + c_0 x = 0.$$

Prueba. Obsérvese que $p(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0 = 0$ es la ecuación característica de la ecuación diferencial

$$x^{(n)} + c_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + c_1 x' + c_0 x = 0. \tag{9.7}$$

Debido al Teorema 9.2 tenemos

$$\mathrm{e}^{tA} = x_1(t)I + x_2(t)A + \cdots + x_n(t)A^{n-1},$$

donde $x_k(t)$ es solución de (9.7) con condiciones iniciales (9.4), para $k = 1, 2, \ldots, n$. Observemos que el conjunto $\{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\}$ es también un conjunto fundamental de soluciones de (9.3), ya que el wronskiano $W(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ toma el valor 1 en $t = 0$. Más aún, al usar el conocido teorema de unicidad de las soluciones para el problema de valores iniciales (9.3)–(9.4), tenemos

$$\varphi_k(t) = \varphi_k(0)x_1(t) + \varphi_k'(0)x_2(t) + \cdots + \varphi_k^{(n-1)}(0)x_n(t),$$

para cada $k = 1, 2, \ldots, n$, de lo cual deducimos

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{bmatrix} = B_0 \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$$

Como B_0 es invertible, resulta la igualdad (9.6), lo cual completa la prueba. $\square$

Consideremos la matriz A del Ejemplo 9.3 para apreciar la simplificación de los cálculos para la tabulación de e^{tA}. Recordemos que el polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 10\lambda^2 + 32\lambda - 32 = (\lambda - 2)(\lambda - 4)^2,$$

al cual asociamos la ecuación diferencial lineal

$$x^{(3)} - 10x'' + 32x' - 32x = 0.$$

Como su ecuación característica es $(\lambda - 2)(\lambda - 4)^2 = 0$, se obtiene

$$\left\{\mathrm{e}^{2t}, \mathrm{e}^{4t}, t\,\mathrm{e}^{4t}\right\}$$

como conjunto fundamental de soluciones. Con ellos formamos la matriz

$$B_t = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{2t} & 2\,\mathrm{e}^{2t} & 4\,\mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^{4t} & 4\,\mathrm{e}^{4t} & 16\,\mathrm{e}^{4t} \\ t\,\mathrm{e}^{4t} & \mathrm{e}^{4t}(1+4t) & 8\,\mathrm{e}^{4t}(1+2t) \end{bmatrix},$$

de donde se calcula

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}, \quad \text{con inversa} \quad B_0^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 16 & -12 & 16 \\ -8 & 8 & -12 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Luego, como $\mathrm{e}^{tA} = x_1(t)I + x_2(t)A + x_3(t)A^2$, tenemos por el Teorema 9.4 que se cumple

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = B_0^{-1} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^{4t} \\ t\,\mathrm{e}^{4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\,\mathrm{e}^{2t} - 3\,\mathrm{e}^{4t} + 4t\,\mathrm{e}^{4t} \\ -2\,\mathrm{e}^{2t} + 2\,\mathrm{e}^{4t} - 3t\,\mathrm{e}^{4t} \\ \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{2t} - \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{4t} + \frac{1}{2}t\,\mathrm{e}^{4t} \end{bmatrix}.$$

Al reemplazar estas funciones en la fórmula de e^{tA}, se recupera la matriz exponencial del Ejemplo 9.3.

10. Transformada de Laplace

Es usual encontrar en textos de ingeniería el método de la transformada de Laplace para resolver problemas de valores iniciales de ecuaciones lineales escalares de orden n con coeficientes constantes. Este método se generaliza a resolver el problema de valor inicial $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$. Si aplicamos transformada de Laplace obtenemos que

$$sX(s) - x(0) = AX(s) \quad \text{implica} \quad (sI - A)X(s) = x(0),$$

con lo que, al despejar, se obtiene $X(s) = (sI - A)^{-1}x(0)$. Luego de tomar transformada inversa obtenemos

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\big\{(sI - A)^{-1}\big\}x(0).$$

Así, por unicidad, se logra

$$e^{tA} = \mathcal{L}^{-1}\big\{(sI - A)^{-1}\big\}.$$

En aplicaciones de ingeniería, la matriz exponencial es llamada la *matriz de transición de estado*. Para ejemplos e interesantes propiedades de la matriz exponencial, ver [1].

11. Conclusiones

Se ha ilustrado varios métodos para calcular la matriz exponencial de una matriz cuadrada. La mayoría de ellos no utiliza el cálculo de autovectores (generalizados) de la matriz, lo cual ha sido un método clásico de abordar el problema en varios textos a nivel de iniciación. Si bien estos métodos pueden aplicarse a cualquier matriz, todos ellos resultan ineficaces si tratamos con matrices grandes o con entradas inexactas (números decimales truncados o números acompañados con cierto error). Es aquí donde es preferible usar la computadora, pero como señala el trabajo de Moler-Van Loan [9], no existe un método infalible de implementación numérica. La descripción e implementación de estos métodos numéricos servirán de base para un artículo posterior.

Referencias

[1] P. J. Antsaklis & A. N. Michel; *A Linear Systems Primer.* Birkhaüser, Boston (2007).

[2] T. M. Apostol; *Some Explicit Formulas for the Exponential Matrix* e^{tA}. The American Mathematical Monthly (1969), **76**, 3:289–292.

[3] F. R. Gantmacher; *The Theory of Matrices*, Volume I. Chelsea, New York (1959).

[4] S-H Hou & W-K. Pang; *On the matrix exponential function.* International Journal of Mathematical Education in Science and Technology (2006), **37**, 1:65–70.

[5] R. B. Kirchner; *An explicit formula for* e^{At}. The American Mathematical Monthly (1967), **74**, 1200–1204.

[6] I. E. Leonard; *The Matrix Exponential.* SIAM Review (1996), **38**, 3:507–512.

[7] E. Liz; *A Note on the Matrix Exponential.* SIAM Review (1998), **40**, 3:700–702.

[8] C. D. Meyer; *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra.* SIAM (2001).

[9] C. Moler & Ch. Van Loan; *Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, Twenty-Five Years Later.* SIAM Review (2003), **45**, 1:3–49.

[10] E. J. Putzer; *Avoiding the Jordan Canonical Form in the Discussion of Linear Systems with Constant Coefficients.* The American Mathematical Monthly (1966), **73**, 1:2–7.

[11] S. H. Weintraub; *Jordan Canonical Form: Application to Differential Equations.* Series: Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics. Morgan & Claypool Publishers (2008).

Abstract

We present several methods that allow the exact computation of the exponential matrix e^{tA}. Methods that include computation of eigenvectors or Laplace transform are very well-known, and they are mentioned here for completeness. We also present other methods, not well-known in the literature, that do not need the computation of eigenvectors, and are easy to introduce in a classroom, thus providing us with general formulas that can be applied to any matrix.

Keywords: Exponential matrix, diagonalizable matrix, Jordan canonical form, Schur's triangularization, functions of matrices, Lagrange-Sylvester interpolation, Putzer's spectral formula, Laplace transform.

Rubén Agapito
Sección Matemáticas
Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú
ruben.agapito@pucp.pe