

Polígono de Newton de una foliación de tipo curva generalizada

Percy Fernández^{1,2}, *Nancy Saravia*^{1,2,3,4}

Marzo, 2016

Resumen

Foliaciones de tipo curva generalizada son una clase de foliaciones que tienen una reducción de singularidades similar a la que existe para curvas. Camacho, Lins Neto and Sad mostraron que aquellas que son no dicríticas tienen la misma reducción que la de su conjunto de separatrices. En este artículo presentamos una prueba novedosa del teorema de Dulac utilizando técnicas de Rouillé. Este teorema muestra que para foliaciones no dicríticas de tipo curva generalizada su polígono de Newton y el su conjunto de sepatrices coinciden. Mediante el teorema de Dulac retornamos a un resultado conjeturado por Loray que no es del todo cierto, como fue anotado por Fernández, Mozo y Neciosup.

MSC(2010): 37F75.

Palabras clave: foliaciones, polígono de Newton de una foliación, foliaciones de tipo curva generalizada.

¹ *Pontificia Universidad Católica del Perú.*

² *DGI 2015-1-0045, PUCP.*

³ *PAID 2014-0009, PUCP.*

⁴ *Beca Marco Polo 2015, PUCP*

1. Introducción

Consideremos un germen de foliación \mathcal{F}_ω definido por una 1-forma holomorfa ω en $(\mathbb{C}^2, 0)$ con una singularidad en $0 \in \mathbb{C}^2$. El origen es una **singularidad simple** de \mathcal{F}_ω si existen coordenadas locales (x, y) que permiten escribir $\omega = (\lambda x dy - \mu y dx) + \omega_1$, donde $\text{mult}(\omega_1) \geq 2$ y

1. $\lambda\mu \neq 0$ y $\frac{\lambda}{\mu} \notin \mathbb{Q}^+$, o
2. $\lambda\mu = 0$ y $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.

Las singularidades del tipo 1) son llamadas **singularidades no degeneradas**, mientras que las del tipo 2) se conocen como **sillas nodo**. Por el teorema de Seidenberg [20] toda singularidad se puede reducir a singularidades simples mediante un número finito de explosiones.

Una foliación \mathcal{F}_ω de tipo **curva generalizada** es por definición una foliación cuya reducción admite solo singularidades simples no degeneradas. En general, no es suficiente hacer la reducción de singularidades del conjunto de separatrices para desingularizar la foliación \mathcal{F}_ω . Sin embargo, Camacho, Lins Neto y Sad [4] muestran que las foliaciones curvas generalizadas no dicríticas tienen la misma reducción de singularidades que la de su conjunto de separatrices (ver sección 3).

La **multiplicidad** en $0 \in \mathbb{C}^2$ de la foliación \mathcal{F}_ω dada por la 1-forma $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$, con $A, B \in \mathbb{C}\{x, y\}$, se define como $\text{mult}(\mathcal{F}_\omega) = \min\{\text{ord}(A), \text{ord}(B)\}$. En [4] se muestra que la multiplicidad de una curva generalizada es un invariante topológico; con ello se extiende el resultado al caso de curvas. El **número de Milnor** $\mu(\mathcal{F}_\omega)$ de \mathcal{F}_ω se define como la multiplicidad de intersección $\mu(\mathcal{F}_\omega) = (A, B)_0$. En [4] se demuestra que si \mathcal{F}_ω tiene un número finito de separatrices y $\mathcal{C}_f : f = 0$ es una ecuación reducida de sus separatrices, entonces se tiene $\mu(\mathcal{F}_\omega) \geq \mu(f)$ y se cumple la igualdad si y solo si \mathcal{F}_ω es de tipo curva generalizada. Además, en este caso se satisface $\text{mult}(\mathcal{F}_\omega) = \text{mult}(\mathcal{C}_f) - 1$.

Denotamos por $\mathcal{N}(\omega)$ al polígono de Newton de ω . En este trabajo, vía técnicas de Rouillé ([19]), presentamos una prueba de un resultado de Dulac (ver [9]).

Teorema 1.1. *Si ω_1 y ω_2 son dos foliaciones de tipo curva generalizada no dicríticas con el mismo conjunto de separatrices, entonces se tiene*

$$\mathcal{N}(\omega_1) = \mathcal{N}(\omega_2).$$

Como consecuencia del teorema 1.1 se obtiene que las foliaciones curvas generalizadas no dicríticas tienen el mismo polígono de Newton que el de su conjunto de separatrices.

Como aplicación del teorema 1.1 probamos un resultado que involucra las singularidades de tipo nilpotente. Un germen de foliación \mathcal{F}_ω en $(\mathbb{C}^2, 0)$ se llama **nilpotente** si está generado por un campo de vectores X con parte lineal nilpotente y no nula. El resultado más significativo sobre las singularidades nilpotentes fue dado por F. Takens en 1974 [22]. Dicho resultado indica que, formalmente, podemos expresar el campo X en la forma

$$X = (y + a(x)) \frac{\partial}{\partial x} + b(x) \frac{\partial}{\partial y}, \quad (1.1)$$

con $\text{ord}(a), \text{ord}(b) \geq 2$. La presentación del campo dada en (1.1) se denomina **forma normal de Takens**. Consideremos $n = \text{ord}(b) + 1 \geq 3$ y $m = \text{ord}(a) \geq 2$. La foliación que define el campo X dado en (1.1) se escribe

$$\omega = -b(x)dx + (y + a(x))dy.$$

Un cambio de coordenadas en x permite tomar x' tal que $-b(x)dx = \frac{n}{2}(x')^{n-1}dx'$. Al reexpresar x como x' se obtiene así

$$\omega = \frac{1}{2}d(x^n + y^2) + \tilde{a}(x)dy.$$

Luego, al menos formalmente, toda foliación nilpotente se encuentra generada por una 1-forma del tipo

$$d(y^2 + x^n) + x^m u(x)dy, \quad (1.2)$$

donde $u(x) \in \mathbb{C}[[x]]$, $u(0) \neq 0$, $m \geq 2$ y $n \geq 3$.

Las singularidades nilpotentes han sido estudiadas por muchos autores. En el proceso de reducción de singularidades se consideran tres casos $2m > n$, $2m = n$ y $2m < n$.

D. Cerveau y R. Moussu [6] estudian las formas dadas en (1.2) cuando $n < 2m$, $u(0) \neq 0$ y $u(x) \in \mathbb{C}[[x]]$. En este caso, la foliación tiene una curva invariante analíticamente equivalente a $y^2 - x^n = 0$ (por esta razón estas foliaciones son llamadas **cuspidales**). En el estudio de estas foliaciones, es interesante escribir explícitamente aquellas que tienen $y^2 - x^n = 0$ como separatriz. D. Cerveau y R. Moussu [6] muestran que estas foliaciones pueden ser definidas por una 1-forma holomorfa

$$\omega = d(y^2 - x^n) + A(x, y)(nydx - 2xdy). \quad (1.3)$$

R. Meziani [16] estudia el caso $n = 2m$ bajo condiciones genéricas sobre $u(0)$. En caso de no satisfacerse estas condiciones, la foliación tiene una silla-nodo en su reducción de singularidades o es dicrítica. Se trata de una foliación que no es curva generalizada, y la reducción de singularidades requiere un mayor número de explosiones que las necesarias para reducir el conjunto de separatrices.

El caso $2m < n$ es estudiado por M. Berthier, R. Meziani y P. Sad [1] cuando la silla-nodo que aparece tras la reducción de singularidades admite dos separatrices analíticas. Si dicha silla-nodo solo admite una separatriz analítica (y una separatriz formal), el caso es estudiado por E. Stróżyńska [21], quien utiliza de manera fuerte el trabajo de Martinet y Ramis [14].

F. Loray [13] estudia las formas del tipo (1.3) desde un punto de vista más general y obtiene el siguiente resultado.

Proposición 1.2. *La foliación \mathcal{F}_ω dada por*

$$\omega = d(y^p - x^q) + \Delta(x, y)(pxdy - qydx)$$

admite la misma reducción que $d(y^p - x^q)$ cuando se satisface

$$\text{ord}_{(p,q)} \Delta(x, y) > \frac{pq - p - q}{\text{mcd}(p, q)}.$$

□

Según F. Loray, que una foliación como la dada en la proposición 1.2 tenga la misma reducción que su separatriz $\mathcal{C}_f : y^p - x^q = 0$ debiera ser equivalente a que se cumpla $\text{ord}_{(p,q)}\Delta(x, y) > pq - p - q$; y así fue como enunció originalmente la proposición. Sin embargo, Fernández, Mozo y Neciosup [10] proporcionan un contraejemplo cuando p y q no son coprimos; ello muestra que la condición de Loray es suficiente mas no necesaria.

En este trabajo como consecuencia del teorema 1.1 obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.3. *Si la foliación $\omega = d(y^p - x^q) + \Delta(x, y)(pxdy - qydx)$ es de tipo curva generalizada con $\text{mcd}(p, q) = 1$, entonces se cumple*

$$\text{ord}_{(p,q)}\Delta(x, y) > pq - p - q.$$

El teorema 1.3 muestra que el resultado de Loray es cierto para el caso p y q coprimos cuando la foliación es curva generalizada.

2. Curvas analíticas planas

Denotemos por $\mathbb{C}[[x, y]]$ el anillo de series de potencias formales en dos variables con coeficientes en \mathbb{C} y por $\mathbb{C}\{x, y\}$ el subanillo de $\mathbb{C}[[x, y]]$ formado por series de potencias que convergen en un entorno de $0 \in \mathbb{C}^2$. Una serie convergente define una función holomorfa en un entorno de $0 \in \mathbb{C}^2$ y, recíprocamente, toda función holomorfa admite localmente una representación única como serie de potencias en $0 \in \mathbb{C}^2$. Denotaremos por \mathcal{M}_2 el ideal maximal de $\mathbb{C}\{x, y\}$ generado por x e y .

Sea $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ una serie convergente. Toda serie de potencias convergente f se escribe como suma de polinomios homogéneos, llamados **componentes homogéneas** de f , esto es, tenemos $f(x, y) = \sum_k f_k(x, y)$, donde $f_k(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ es homogéneo de grado k .

Se denomina **forma inicial** de f a la componente homogénea de menor grado. El **orden** de f , denotado por $\text{ord}(f)$, se define como el

grado de su forma inicial. Por convención, cuando $f(x, y)$ es idénticamente nula, ponemos $\text{ord}(f) = \infty$.

Sea $U \subset \mathbb{C}^2$ un abierto. Decimos que $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es **analítica compleja u holomorfa** en $a \in U$ si coincide en un entorno de a con una serie de potencias convergente. Diremos que f es analítica en U si lo es en todo punto de U .

Dada una función analítica $f(x, y)$ definida en un entorno de $0 \in \mathbb{C}^2$, definimos el conjunto de ceros de f por $\{f(x, y) = 0\}$, el cual será denotado por \mathcal{C}_f . Este conjunto es la **curva analítica compleja** definida por f . El germen de \mathcal{C}_f en $0 \in \mathbb{C}^2$ será denotada por $(\mathcal{C}_f, 0)$, y será referida como **germen de curva analítica compleja** definida por f en el origen.

Obsérvese que $\mathbb{C}\{x, y\}$ es isomorfo al anillo de gérmenes de funciones holomorfas en un punto $a \in \mathbb{C}^2$.

Ejemplo 2.1. La curva $\mathcal{C}_f : (y^2 - x^3)^2 - x^5y = 0$ define un germen de curva analítica.

Notemos que un producto $u \cdot f$ determina el mismo germen de curva analítica que f cuando u no se anula en un entorno del origen (y por consiguiente representa una unidad de $\mathbb{C}\{x, y\}$). Por otro lado, sabemos que $\mathbb{C}\{x, y\}$ es un dominio de factorización única, y si tenemos

$$f = f_1^{r_1} f_2^{r_2} \cdots f_l^{r_l},$$

donde los f_i son irreducibles y $r_i \in \mathbb{N}$, entonces el germen $\mathcal{C}_f : f = 0$ coincide con el germen $f_1 \cdot f_2 \cdots f_l = 0$; de donde obtenemos la descomposición

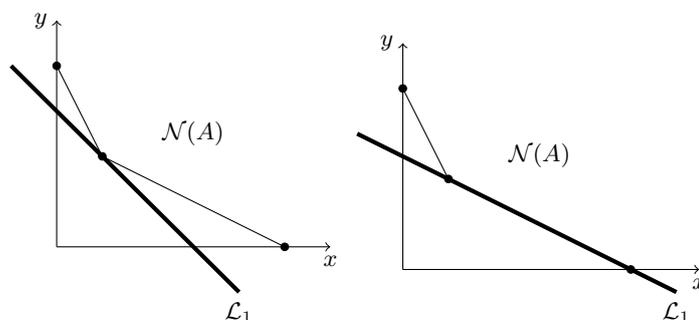
$$\mathcal{C}_f = \mathcal{C}_{f_1} \cup \mathcal{C}_{f_2} \cup \cdots \cup \mathcal{C}_{f_l}.$$

Llamaremos **rama analítica** a todo germen de curva analítica $\mathcal{C}_f : f = 0$, donde f es irreducible como elemento de $\mathbb{C}\{x, y\}$. Así, todo germen de curva analítica es unión de ramas analíticas. Dado que ya hemos definido el orden de una serie analítica de potencias, podemos definir la **multiplicidad del germen de una curva analítica \mathcal{C}_f** como el orden

de f . Diremos que el germen de curva es **regular** si su multiplicidad es igual a uno. Si la multiplicidad es mayor que uno, el germen de curva es **singular**.

Sea $A \subseteq \mathbb{N}^2$. Denotamos por $\mathcal{D}(A)$ a la envolvente convexa de $A + \mathbb{R}_{>0}^2$, donde $+$ denota la suma de Minkowski. Además denotaremos por $\mathcal{N}(A)$ el borde de $\mathcal{D}(A)$.

Si L es un lado del polígono $\mathcal{N}(A)$, denotamos por \mathcal{L} a la recta que contiene dicho lado. Decimos que una recta \mathcal{L}_1 es **recta de apoyo** de $\mathcal{N}(A)$ si cumple $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{N}(A) \neq \emptyset$ y $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{L}_1^+$ (ver Anexo (8.1)).



Obsérvese que la intersección de una recta de apoyo de $\mathcal{N}(A)$ con dicho polígono contiene a un único vértice de $\mathcal{N}(A)$ o bien a todo un lado compacto del mismo.

La recta \mathcal{L} tiene **inclinación** μ si $-\frac{1}{\mu}$ es su pendiente.

Observación 2.2. Si el polígono $\mathcal{N}(A)$ corta los ejes coordenados, los ejes son rectas de apoyo de $\mathcal{N}(A)$.

Dado un germen de curva analítica $\mathcal{C}_f : f = 0$ donde $f(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j \in \mathbb{C}\{x, y\}$, el **soporte** de \mathcal{C}_f , denotado por $\text{Sop}(f)$, se define por

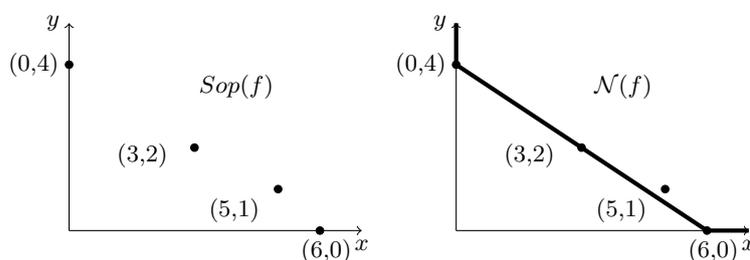
$$\text{Sop}(f) = \{(i, j) : a_{ij} \neq 0\}.$$

El **polígono de Newton** de \mathcal{C}_f , denotado por $\mathcal{N}(f) = \mathcal{N}(Sop(f))$, es el borde de $\mathcal{D}(Sop(f))$. Observemos que se tiene $\mathcal{N}(f) = \mathcal{N}(uf)$ para todo $u \in \mathbb{C}\{x, y\}$, siempre que $u(0, 0) \neq 0$.

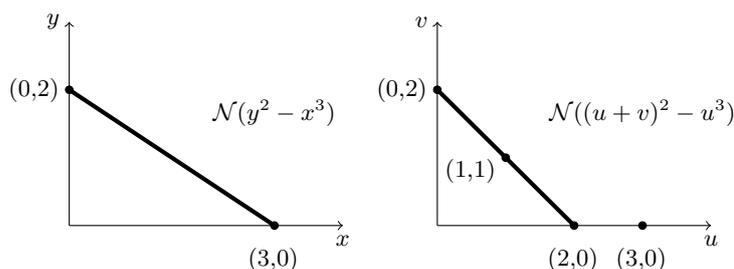
Ejemplo 2.3. El soporte de $\mathcal{C}_f : (y^2 - x^3)^2 - x^5y = 0$ es

$$Sop(f) = \{(0, 4), (3, 2), (6, 0), (5, 1)\},$$

y lo dibujamos en la siguiente figura, así como su polígono de Newton.



Ejemplo 2.4. Para el germe de curva $\mathcal{C}_f : y^2 - x^3 = 0$ tenemos que su soporte es dado por $Sop(f(x, y)) = \{(3, 0), (0, 2)\}$. Si hacemos el cambio de coordenadas $x = u$ e $y = u + v$ el soporte del germe de curva en las nuevas coordenadas es $Sop(f(u, v)) = \{(3, 0), (0, 2), (1, 1), (2, 0)\}$. Concluimos que los polígonos $\mathcal{N}(y^2 - x^3)$ y $\mathcal{N}((u + v)^2 - u^3)$ no son iguales como muestra la siguiente figura. En consecuencia el polígono de Newton de una curva depende de las coordenadas.



Denotamos $\mathbb{C}\{x\}^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}\{x^{1/n}\}$ el **anillo de series de potencias fraccionarias** con coeficientes en \mathbb{C} . Si $\gamma \in \mathbb{C}\{x\}^*$ existe $n \in \mathbb{N}$ de modo que $\gamma = \sum_i a_i x^{i/n}$. Llamamos **orden** de γ a $\text{ord}(\gamma) = \min\{i/n : a_i \neq 0\}$.

Teorema 2.5 (Teorema de Newton, [12, Theorem 3.8]). *Sea $f(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$ tal que $f(0, 0) = 0$ y $f(0, y) \neq 0$. Entonces existe $\gamma(x) \in \mathbb{C}\{x\}^*$ con $\gamma(0) = 0$ tal que $f(x, \gamma(x)) = 0$.* \square

Diremos que $y(x) \in \mathbb{C}\{x\}^*$ es una **raíz de Newton-Puiseux** del germen de curva $\mathcal{C}_f : f(x, y) = 0$ si $f(x, y(x)) = 0$.

Recordemos que f es **polinomio de Weierstrass** en y si es de la forma

$$f(x, y) = y^m + a_1(x)y^{m-1} + a_2(x)y^{m-2} + \dots + a_m(x),$$

donde $n \geq 1$ y $\text{ord}(a_i(x)) \geq i$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Al aplicar el teorema de preparación de Weierstrass (cf. [12]) a $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ obtenemos $f = u \cdot f^*$, con $f^* \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ un polinomio de Weierstrass. Para el estudio que realizamos aquí es indiferente considerar la serie f o su polinomio de Weierstrass.

Lema 2.6 ([8, Lemme 8.4.2]). *Sea $f \in \mathbb{C}\{x\}[y]$ un polinomio de Weierstrass de orden n con raíces $\gamma_1(x), \dots, \gamma_n(x)$ en $\mathbb{C}^*\{x\}$. Entonces su polígono de Newton $\mathcal{N}(f)$ tiene tantos lados compactos como los distintos órdenes aparecen entre los $\gamma_k(x)$. A cada lado de inclinación μ y extremos (i_1, j_1) e (i_2, j_2) , con $j_1 > j_2$, le corresponde una recta de ecuación $i + \mu j = c_k$, cuya altura es igual al número de raíces con ese orden; estas raíces quedan por lo tanto parametrizadas por*

$$y(x) = a_i x^\mu + \eta_i(x),$$

con $\text{ord}(\eta_i(x)) > \mu$ y $a_i \neq 0$. \square

Teorema 2.7 (Teorema de Puiseux, [8, Théoreme 8.6.1]). *Sea \mathcal{C}_f un germen de curva irreducible con multiplicidad n . Si $y(x) = \sum_{i \geq n} a_i x^{i/n}$*

es una raíz de Newton-Puiseux de la rama \mathcal{C}_f y ε es una raíz primitiva n -ésima de la unidad, entonces

$$y_j(x) = y(\varepsilon^j x) = \sum_{i \geq n} a_i \varepsilon^{ij} x^{i/n},$$

con $j \in \{1, \dots, n\}$, son todas las raíces de Newton-Puiseux de \mathcal{C}_f . \square

El teorema de Newton afirma que existe una raíz de Newton-Puiseux, y el teorema de Puiseux nos dice cómo obtenerlas en el caso de una curva irreducible. Si $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ es irreducible, por el teorema de preparación de Weierstrass y el teorema 2.7 podemos escribir

$$f(x, y) = u(x, y) \prod_{j=1}^n \left(y - (y(\varepsilon^j x^{1/n})) \right),$$

donde $u \in \mathbb{C}\{x, y\}$ satisface $u(0, 0) \neq 0$. Si hacemos $x = t^n$, donde t es una nueva variable, las raíces de Newton-Puiseux de \mathcal{C}_f se dejan escribir como series de potencias enteras en t de la forma

$$\begin{cases} x(t) &= t^n \\ y(t) &= \sum_{i \geq n} a_i t^i, \end{cases}$$

llamadas **parametrizaciones de Puiseux** del germen de curva \mathcal{C}_f .

Ejemplo 2.8. El germen de curva $\mathcal{C}_f : (y^2 - x^3)^2 - x^5 y = 0$ es irreducible y sus raíces de Newton-Puiseux son

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{7}{4}} - \frac{1}{64}x^{\frac{9}{4}} + \dots, \\ y_2(x) &= x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{7}{4}} + \frac{1}{64}x^{\frac{9}{4}} + \dots, \\ y_3(x) &= -x^{\frac{3}{2}} - \frac{i}{2}x^{\frac{7}{4}} - \frac{i}{69}x^{\frac{9}{4}} + \dots, \\ y_4(x) &= -x^{\frac{3}{2}} + \frac{i}{2}x^{\frac{7}{4}} + \frac{i}{64}x^{\frac{9}{4}} + \dots. \end{aligned}$$

Por tanto una parametrización de \mathcal{C}_f es dada por

$$\begin{cases} x(t) &= t^4 \\ y(t) &= t^6 + \frac{1}{2}t^7 - \frac{1}{64}t^9 + \dots. \end{cases}$$

Como consecuencia del lema 2.6 y del teorema 2.7 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.9. *Si \mathcal{C}_f es un germe de curva irreducible en $\mathbb{C}\{x, y\}$, entonces su polígono de Newton $\mathcal{N}(f)$ tiene un único lado compacto.*

Demostración. Como por hipótesis \mathcal{C}_f es irreducible, todas las raíces tienen el mismo orden. Así, el polígono tiene un solo lado compacto. \square

El recíproco del corolario 2.9 no es verdad, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.10. Si consideramos el germe de curva $\mathcal{C}_f : (y^2 - x^3)^2 = 0$, notamos que su polígono $\mathcal{N}(f)$ tiene un solo lado compacto sin ser la curva irreducible.

Sea \mathcal{C}_f un germe de curva irreducible y supongamos que la inclinación del lado compacto de $\mathcal{N}(f)$ es ν y que $i + \nu j = c$ sea la recta que lo contiene. Por convexidad de $\mathcal{N}(f)$ podemos expresar

$$f(x, y) = \sum_{i+\nu j=c} a_{ij} x^i y^j + \sum_{i+\nu j>c} a_{ij} x^i y^j. \quad (2.1)$$

Sean \mathcal{C}_f un germe de curva irreducible y \mathcal{C}_g un germe de curva cualquiera. Definimos la **multiplicidad de intersección** de \mathcal{C}_f y \mathcal{C}_g en el origen como

$$(\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g)_0 = \text{ord}_t(g(\gamma(t))),$$

donde $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ es una parametrización de la rama \mathcal{C}_f .

Proposición 2.11 ([12, Proposition 4.12]). *Sean \mathcal{C}_f y \mathcal{C}_g dos gérmenes de curvas cualesquiera. Entonces se tiene*

$$(\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g)_0 = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(f, g)},$$

donde (f, g) denota el ideal de $\mathbb{C}\{x, y\}$ generado por f y g . \square

Decimos que la recta $ax + by = 0$ es **recta tangente** a la curva $\mathcal{C}_f : f = 0$ si dicha recta es un factor lineal de su forma inicial.

Dos gérmenes de curvas \mathcal{C}_f y \mathcal{C}_g son **transversales** si sus rectas tangentes son distintas.

Teorema 2.12 ([12, Theorem 4.14]). *Sean $\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g$ y \mathcal{C}_h gérmenes de curvas. Entonces la multiplicidad de intersección verifica las siguientes propiedades:*

1. $(\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g)_0 < \infty$ si y solo si f y g son primos en $\mathbb{C}\{x, y\}$,
2. $(\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g)_0 = (\mathcal{C}_g, \mathcal{C}_f)_0$,
3. $(\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g \mathcal{C}_h)_0 = (\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g)_0 + (\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_h)_0$,
4. $(\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g)_0 = \text{ord}(f)\text{ord}(g)$ si y solo si f y g son transversales,
5. $(\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g - \mathcal{C}_h \mathcal{C}_f)_0 = (\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g)_0$. □

3. Foliaciones

Para presentar la noción de foliación singular, introduciremos algunos conceptos básicos.

Una **forma de grado 1** (o una **1-forma**) definida sobre una variedad compleja M de dimensión n es una aplicación que asocia a cada punto $p \in M$ una aplicación lineal $\omega_p : T_p M \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $\omega_p(v) = \omega(p, v)$ para cada $p \in M$ y $v \in T_p M$.

Una 1-forma diferencial ω es **integrable** cuando el producto exterior satisface $\omega \wedge d\omega = 0$.

Sea M una variedad compleja de dimensión $n \geq 2$. Una **foliación holomorfa singular de codimensión uno** en M es un objeto \mathcal{F} dado por colecciones $\{\omega_i\}_{i \in I}$, $\{U_i\}_{i \in I}$ y $\{g_{ij}\}_{U_i \cup U_j \neq \emptyset}$ que cumplen

- i) $\{U_i\}_{i \in I}$ es una cobertura abierta de M , esto es $M = \bigcup_{i \in I} U_i$;
- ii) $\{\omega_i\}$ es una 1-forma diferencial holomorfa integrable no idénticamente nula en U_i ;

- iii) g_{ij} es una función holomorfa no nula en $U_i \cap U_j$;
- iv) si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ entonces $\omega_i = g_{ij}\omega_j$ en $U_i \cap U_j$.

Para cada forma ω_i consideramos el conjunto singular dado por

$$S_i = \text{Sing}(\omega_i) = \{p \in U_i : \omega_i(p) = 0\}.$$

Es claro que S_i es un subconjunto analítico de U_i . De (iii) y (iv) depende la igualdad $S_i \cap U_i \cap U_j = S_j \cap U_i \cap U_j$. Así, la unión $\bigcup_{i \in I} S_i$ define un subconjunto analítico S de M el cual será denotado por $\text{Sing}(\mathcal{F})$ y llamado el **conjunto singular** de \mathcal{F} .

Dada la 1-forma diferencial $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ con $A, B \in \mathbb{C}\{x, y\}$, las series A y B son llamadas **coeficientes de ω** . Denotamos por \mathcal{F}_ω el **germen de foliación singular** definida por ω y asumiremos en todo momento que los coeficientes de ω no admiten factores comunes.

Sea \mathcal{F}_ω el germen de foliación dado por $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$. Diremos que el origen es **singularidad aislada** de \mathcal{F}_ω si $A(0, 0) = B(0, 0) = 0$ y $\text{Sing}(\mathcal{F}_\omega) = \{(0, 0)\}$. La **multiplicidad del germen de foliación \mathcal{F}_ω** será denotada por $\text{mult}(\mathcal{F}_\omega)$ y definida como $\text{mult}(\mathcal{F}_\omega) = \min\{\text{ord}(A), \text{ord}(B)\}$.

Llamamos **solución** del germen de la foliación \mathcal{F}_ω dada por la 1-forma $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ en el origen a una parametrización $(x(t), y(t)) \in \mathbb{C}\{t\}^2$ tal que $x(0) = y(0) = 0$ y

$$A(x(t), y(t))x'(t) + B(x(t), y(t))y'(t) = 0.$$

Sea \mathcal{F}_ω el germen de foliación dado por una 1-forma holomorfa en el origen de \mathbb{C}^2 . Decimos que la curva \mathcal{C}_f es **invariante** por \mathcal{F}_ω si

$$\omega \wedge df = f \cdot \eta,$$

donde η es una 2-forma (i.e., $\eta = gdx \wedge dy$, con $g \in \mathbb{C}\{x, y\}$). Si \mathcal{C}_f es irreducible, será **separatriz** de \mathcal{F}_ω .

Consideraremos $(\mathcal{C}_{f_j})_{j=1}^r$ el conjunto de todas las separatrices de la foliación no dicrítica $\mathcal{F}_\omega : \omega = 0$. A cada separatriz \mathcal{C}_{f_j} le corresponde

$f_j = 0$ irreducible con $f_j \in \mathbb{C}\{x, y\}$. Denotemos por $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ a la unión $\bigcup \mathcal{C}_{f_j}$ de todas las separatrices de la foliación \mathcal{F} , que de ahora en adelante llamaremos **conjunto de separatrices** de \mathcal{F} .

La ecuación $f_1 \cdots f_r = 0$ será llamada **ecuación reducida** de $\mathcal{C}(\mathcal{F})$.

Ejemplo 3.1. La foliación $\omega = (-3x^2 - 3axy^2)dx + (6y^5 + 6ax^2y)dy$ con $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tiene a $\mathcal{C}_f : y^6 - x^3 = 0$ como curva invariante, pues $\omega \wedge df = -18axy(y^6 - x^3)$.

Ejemplo 3.2. La foliación $\omega = d(y^p - x^q) + \Delta(x, y)(pxdy - qydx)$ tiene como curva invariante a $\mathcal{C}_f : y^p - x^q = 0$ puesto que se satisface $\omega \wedge df = -pq\Delta(x, y)(y^p - x^q)$.

Observación 3.3. Toda parametrización de una curva invariante \mathcal{C}_f de la foliación $\mathcal{F}_\omega : \omega = 0$ es solución de $\omega = 0$.

Teorema 3.4 ([3]). *Toda foliación singular en $(\mathbb{C}^2, 0)$ admite al menos una curva invariante.* \square

4. Explosión en un punto

Una explosión centrada en $0 \in \mathbb{C}^2$ consiste en reemplazar el origen por un espacio proyectivo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ que deje a los otros puntos invariantes en un sentido biholomorfo.

La representación local de $\pi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ en coordenadas (x, t) es

$$\pi(x, t) = (x, xt);$$

aquí reemplazamos $x = x$ e $y = xt$.

Observemos que en estas coordenadas tenemos las propiedades siguientes:

- $\pi^{-1}(0, 0) = \{(0, t) : t \in \mathbb{C}\}$,
- $\pi(\mathbb{C}^2) = (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}) \cup \{(0, 0)\}$,

- $\pi : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ es un biholomorfismo con inversa $\pi^{-1}(x, y) = \left(x, \frac{y}{x}\right)$.

Notamos que el punto $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ es reemplazado por la recta $\{x = 0\}$. No obstante, no podemos cubrir la recta $\{(0, y) : y \in \mathbb{C}\}$. Para cubrir tal recta consideramos la representación local de π en las coordenadas (s, y) dadas por $\pi(s, y) = (sy, y)$; en este caso $x = sy$ e $y = y$. En las coordenadas (s, y) se tiene propiedades similares a las dadas por las coordenadas (x, t) .

Cuando se trabaja en las coordenadas (s, y) no cubrimos la recta $\{y = 0\}$. Para cubrir todo \mathbb{C}^2 necesitamos pegar el plano xt con el plano sy , identificamos así la recta $\{x = 0\}$ con la recta $\{y = 0\}$.

Definamos $\tilde{\mathbb{C}}^2 = \tilde{U}_0 \cup \tilde{U}_1$, donde

$$\tilde{U}_0 := \{(x, y, [p]) \in \mathbb{C}^2 \times U_0 : y = \phi_0^{-1}([p])x\} \subseteq \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1,$$

$$\tilde{U}_1 := \{(x, y, [p]) \in \mathbb{C}^2 \times U_1 : x = \phi_1^{-1}([p])y\} \subseteq \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1,$$

y (U_i, ϕ_i) , $i = 0, 1$, son parametrizaciones de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$.

Al considerar las funciones

- $\tilde{\varphi}_0 : \tilde{U}_0 \rightarrow \mathbb{C}^2$ donde $\tilde{\varphi}_0(x, y, [p]) = (x, \phi_0^{-1}([p]))$,
- $\tilde{\varphi}_1 : \tilde{U}_1 \rightarrow \mathbb{C}^2$ donde $\tilde{\varphi}_1(x, y, [p]) = (\phi_1^{-1}([p]), y)$,
- $\tilde{\varphi}_0^{-1} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \tilde{U}_0$ donde $\tilde{\varphi}_0^{-1}(x, t) = (x, tx, \phi_0(t))$,
- $\tilde{\varphi}_1^{-1} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \tilde{U}_1$ donde $\tilde{\varphi}_1^{-1}(s, y) = (sy, y, \phi_1(s))$,

observamos que se tiene $\tilde{U}_0 \cap \tilde{U}_1 = \mathbb{C}^2 \times (U_0 \cap U_1)$, $\tilde{\varphi}_0(\tilde{U}_0 \cap \tilde{U}_1) = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ y $\tilde{\varphi}_1(\tilde{U}_0 \cap \tilde{U}_1) = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, además de

$$(\tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_0^{-1})(x, t) = \tilde{\varphi}_1(x, tx, \phi_0(t)) = (\phi_1^{-1}(\phi_0(t)), tx) = \left(\frac{1}{x}, tx\right),$$

$$(\tilde{\varphi}_0 \circ \tilde{\varphi}_1^{-1})(s, y) = \tilde{\varphi}_0(sy, y, \phi_1(s)) = (sy, \phi_0^{-1}(\phi_1(s))) = \left(sy, \frac{1}{s}\right).$$

De esta manera $\tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_0^{-1} : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ y $\tilde{\varphi}_0 \circ \tilde{\varphi}_1^{-1} : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ son holomorfas. Por tanto $\{(\tilde{U}_0, \tilde{\varphi}_0), (\tilde{U}_1, \tilde{\varphi}_1)\}$ es un atlas sobre $\tilde{\mathbb{C}}^2$ y $\tilde{\mathbb{C}}^2$ resulta una variedad compleja de dimensión 2, llamada **explosión en el origen**. El conjunto $\pi^{-1}(0, 0) = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ es llamado **divisor excepcional**.

5. Comportamiento por explosiones

Consideremos un germen de foliación \mathcal{F} generado por una 1-forma $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ con $\text{mult}(\mathcal{F}) = \nu$, así podemos expresar $\omega = (A_\nu + A_{\nu+1} + \dots)dx + (B_\nu + B_{\nu+1} + \dots)dy$. Sea $\pi : M \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ la explosión en el origen. La forma diferencial $\pi^*\omega$ define una foliación $\pi^*\mathcal{F}$ sobre M . En la carta U de coordenadas (x, t) la 1-forma $\pi^*\omega = A(x, xt)dx + B(x, xt)d(xt)$ se escribe como

$$x^\nu[(A_\nu(1, t) + tB_\nu(1, t) + xC(x, t))dx + x(B_\nu(1, t) + xD(x, t))dt],$$

con orden de C y D mayor o igual que $\nu + 1$.

Tenemos dos situaciones posibles.

Si $x A_\nu(x, y) + y B_\nu(x, y) \neq 0$, tiene sentido hablar de $\hat{\omega} = \frac{\pi^*\omega}{x^\nu}$, objeto que llamaremos **transformado estricto de ω** , y que define una foliación en U . Sobre el divisor $D = \pi^{-1}(0)$, los puntos singulares de la foliación, es decir $\text{Sing}(\pi^*\mathcal{F}) \cap D \cap U$, vienen dados por el lugar geométrico $A_\nu(1, t) + tB_\nu(1, t) = 0$. En tal caso $D \setminus \pi^*\mathcal{F}$ es una hoja de la foliación $\pi^*\mathcal{F}$. La foliación es de las llamadas **no dicríticas**.

Si $x A_\nu(x, y) + y B_\nu(x, y) = 0$ debemos tener $B_\nu(1, y) \neq 0$ y el **transformado estricto** de la foliación está definido por $\hat{\omega} = \frac{\pi^*\omega}{x^{\nu+1}}$. Fuera de $B_\nu(1, y) = 0$, el divisor es transversal a la foliación: por cada uno de sus puntos p pasa una hoja F_p lisa, transversal a D . Su proyección es una separatriz lisa de la foliación \mathcal{F} . Por tanto, la foliación tiene infinitas separatrices. Tal foliación es **dicrítica**. Para más información sobre el comportamiento de la foliación por explosiones sugerimos revisar [17].

Sea \mathcal{F}_ω un germen de foliación en $(\mathbb{C}^2, 0)$ definida por la 1-forma $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$. Decimos que el origen es una **singularidad**

simple de \mathcal{F}_ω si la matriz

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial B(0,0)}{\partial x} & -\frac{\partial B(0,0)}{\partial y} \\ \frac{\partial A(0,0)}{\partial x} & \frac{\partial A(0,0)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

tiene dos autovalores $\lambda \neq \mu$, $\mu \neq 0$ tales que $\frac{\lambda}{\mu} \notin \mathbb{Q}^+$.

Observación 5.1. La definición de singularidad simple no depende de coordenadas.

Si el origen es una singularidad simple de \mathcal{F}_ω , existen coordenadas locales (x, y) que permiten escribir

$$\omega = (\lambda x dy - \mu y dx) + \omega_1,$$

donde los coeficientes de ω_1 son de orden ≥ 2 . Podría suceder

- $\lambda\mu \neq 0$ y $\frac{\lambda}{\mu} \notin \mathbb{Q}^+$ o
- $\lambda\mu = 0$ y $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, en este caso decimos que ω es de **tipo silla-nodo**.

A continuación enunciamos el teorema básico de reducción de singularidades para una foliación.

Teorema 5.2 ([20]). *Sea \mathcal{F}_ω un germen de foliación sobre $(\mathbb{C}^2, 0)$. Entonces existe un morfismo*

$$\pi : M \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$$

que es composición de un número finito de explosiones de puntos, tal que

1. el divisor excepcional $E = \pi^{-1}(0)$ es una hipersuperficie con cruzamientos normales,

2. la restricción de π a $M \setminus E$ es un isomorfismo sobre $\mathcal{U} \setminus \{0\}$, donde \mathcal{U} es un entorno del origen en el cual está definida \mathcal{F}_ω ,
3. en todo punto no singular del transformado estricto \mathcal{F}'_ω de \mathcal{F}_ω por π toda componente del primer divisor excepcional es o bien invariante por la foliación, o en su defecto transversa a la foliación; en este último caso, decimos que la componente del divisor es una **componente dicrítica** de E por \mathcal{F}_ω ,
4. todo punto singular $p \in M$ de \mathcal{F}'_ω es simple y no está contenido en componentes dicríticas. \square

A la aplicación π la llamamos **reducción de singularidades** de \mathcal{F}_ω .

6. Curvas generalizadas

C. Camacho, A. Lins Neto y P. Sad ([4, Chapter II]) muestran que existe un tipo de foliaciones, que llamaremos curvas generalizadas, para las cuales la reducción de singularidades coincide con la desingularización de su conjunto de separatrices.

Se dice que una foliación \mathcal{F}_ω es de tipo **curva generalizada no dicrítica** si en su reducción de singularidades no aparecen componentes dicríticas ni singularidades silla-nodo.

Proposición 6.1 ([4, páginas 158-161]). *Una foliación no dicrítica admite un número finito de curvas invariantes.* \square

Teorema 6.2 ([4, Theorem 2]). *Sea \mathcal{F}_ω una foliación curva generalizada no dicrítica y sea \mathcal{C}_f su conjunto de separatrices. Entonces \mathcal{F}_ω y \mathcal{C}_f tienen la misma reducción de singularidades.* \square

Si una foliación es curva generalizada, existe una relación directa entre la multiplicidad de la foliación y su conjunto de separatrices.

Teorema 6.3 ([4, Theorem 3]). *Sea \mathcal{F}_ω una foliación curva generalizada no dicrítica y sea \mathcal{C}_f su conjunto de separatrices. Entonces se cumple*

$$\text{mult}(\omega) = \text{mult}(f) - 1.$$

□

En general, si \mathcal{F}_ω es foliación no dicrítica se tiene

$$\text{mult}(\omega) \geq \text{mult}(f) - 1, \quad (6.1)$$

como se puede observar en [4].

Como consecuencia del teorema 6.3, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 6.4. *Sea \mathcal{F}_ω una foliación curva generalizada no dicrítica y sea \mathcal{C}_f su conjunto de separatrices. Entonces se tiene $\text{mult}(\omega) = \text{mult}(df)$.* □

Ejemplo 6.5. La foliación $\omega = (-3x^2 - 3axy^2)dx + (6y^5 + 6ax^2y)dy$ con $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tiene como curva invariante a $\mathcal{C}_f : y^6 - x^3 = 0$ como se pudo apreciar en el ejemplo 3.1. La multiplicidad de la curva es $\text{mult}(\mathcal{C}_f) = 3$. Si la curva \mathcal{C}_f no es la única separatriz de la foliación, se observaría que el conjunto de separatrices $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ tiene multiplicidad mayor a 3. Al aplicar (6.1) se satisfaría $\text{mult}(\omega) \geq \text{mult}(\mathcal{C}(\mathcal{F})) - 1 > 2$, pero observamos que acá se cumple $\text{mult}(\omega) = 2$, lo cual es una contradicción. En consecuencia el conjunto de separatrices es $\mathcal{C}(\mathcal{F}) = y^6 - x^3$.

Ejemplo 6.6. La foliación $\omega = (y^p - x^q) + \Delta(x, y)(pxdy - qydx)$ tiene como curva invariante a $\mathcal{C}_f : y^p - x^q = 0$ (ver ejemplo 3.2). Si consideramos $p < q$, la multiplicidad de la curva es $\text{mult}(\mathcal{C}_f) = p$. Si Suponemos que la curva \mathcal{C}_f no es la única separatriz de la foliación, se tendría $\text{mult}(\mathcal{C}(\mathcal{F})) > p$.

Por otro lado se cumple $\text{mult}(\omega) = \min\{p - 1, \alpha + 1\}$, con $\alpha = \text{mult}(\Delta)$. Al aplicar (6.1) se abren dos posibilidades. Primero podría ocurrir $p - 1 = \text{mult}(\omega) > \text{mult}(\mathcal{C}(\mathcal{F})) - 1 = p - 1$, lo cual es una contradicción. Segundo, al tenerse $\alpha + 1 = \text{mult}(\omega) > \text{mult}(\mathcal{C}(\mathcal{F})) - 1 = p - 1$ y $\alpha + 1 \leq p - 1$, llegamos a otra contradicción.

El conjunto de separatrices es por tanto $\mathcal{C}(\mathcal{F}) = y^p - x^q$.

El **número de Milnor de una foliación** $\mathcal{F}_\omega : \omega = 0$, dada por la 1-forma $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ con singularidad aislada en el origen, se denota por $\mu(\mathcal{F}_\omega)$ y se define como la multiplicidad de intersección en el origen de los coeficientes de la 1-forma, es decir mediante

$$\mu(\mathcal{F}_\omega) = (A, B)_0. \quad (6.2)$$

El siguiente teorema resulta útil cuando deseamos constatar si una foliación es curva generalizada o no.

Teorema 6.7 ([4, Theorem 4]). *Sea \mathcal{F}_ω una foliación no dicrítica y \mathcal{C}_f la ecuación reducida de sus separatrices. Entonces \mathcal{F}_ω es curva generalizada si y solo si $\mu(\omega) = \mu(df)$.* \square

Como consecuencia inmediata del teorema 6.7 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 6.8. *Una foliación $\mathcal{F}_\omega : \omega = df$ cuyo conjunto de separatrices es $\mathcal{C} : f = 0$ es de tipo curva generalizada.* \square

Ejemplo 6.9. La foliación dada por $\omega = (-3x^2 - 3axy^2)dx + (6y^5 + 6ax^2y)dy$ fue estudiada por Fernández, Mozo y Neciosup [10]. Este representa un contraejemplo a una afirmación de Loray, como veremos en el ejemplo 7.8. Por ahora, mostraremos que la foliación con $a \neq 0$ es curva generalizada. En uso de las propiedades dadas en el teorema 2.12 tenemos

$$\begin{aligned} \mu(\omega) &= (-3x^2 - 3axy^2, 6y^5 + 6ax^2y)_0 \\ &= (-3x(x + ay^2), 6y(y^4 + ax^2))_0 \\ &= (-3x, 6y)_0 + (x + ay^2, 6y)_0 + (-3x, y^4 + ax^2)_0 \\ &\quad + (x + ay^2, y^4 + ax^2)_0 \\ &= 10. \end{aligned}$$

De otro lado, en el ejemplo 6.5 mostramos que $\mathcal{C} : y^6 - x^3 = 0$ es el conjunto de separatrices de ω . Observemos que $\mu(df) = (-3x^2, 6x^5)_0 = 10$ y el teorema 6.7 implican que ω es de tipo curva generalizada.

Dada la foliación $\mathcal{F}_\omega : \omega = 0$ y $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ parametrización de alguna curva \mathcal{C}_g , escribimos $\gamma^*\omega = \omega(x(t), y(t))$ donde

$$\omega(x(t), y(t)) = A(x(t), y(t))x'(t)dt + B(x(t), y(t))y'(t)dt.$$

Lema 6.10 ([19]). Sean ω_1, ω_2 dos 1-formas de tipo curva generalizada no dicríticas con el mismo conjunto de separatrices. Dada una curva γ , se verifica

$$\text{ord}_t \gamma^* \omega_1 = \text{ord}_t \gamma^* \omega_2.$$

Demostración. Si la curva γ es una separatriz de ω_1 y ω_2 , entonces se tiene $\omega_1(x(t), y(t)) = 0 = \omega_2(x(t), y(t))$, y concluimos el lema.

Supongamos por tanto que $\gamma(t)$ no es parametrización de ninguna separatriz de ω_1 y ω_2 . En este caso la prueba la haremos por inducción sobre el número mínimo de explosiones necesarias para desingularizar la foliación.

Si el número de explosiones es $n = 0$ tenemos que las foliaciones ω_1, ω_2 son reducidas. Para mostrar el lema cuando las foliaciones ω_1, ω_2 son reducidas, nos apoyaremos en la siguiente igualdad $\text{ord}(\gamma^*\omega_1) = \text{ord}(\gamma^*df)$ que pasamos a mostrar. En efecto, si la foliación ω_1 de tipo curva generalizada es reducida, se puede expresar en coordenadas (x, y) en la forma (ver [15])

$$\omega_1 = \mu y(1 + \dots)dx + \lambda x(1 + \dots)dy, \quad \text{con } \mu\lambda \neq 0 \text{ y } \frac{\lambda}{\mu} \notin \mathbb{Q}^-.$$

Además la ecuación reducida de las separatrices $\mathcal{C} : f = 0$ de ω_1 y ω_2 es dada por la forma $f(x, y) = xyu(x, y)$ con $u(0, 0) \neq 0$.

Consideremos una parametrización de la curva γ dada por $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (at^p + t^p n_1(t), bt^q + t^q n_2(t))$, con $n_i(t) \in \mathbb{C}\{t\}$ para $i = 1, 2$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} \gamma^* \omega_1 &= \mu(bt^q + t^q n_2(t))(1 + \dots)d(at^p + t^p n_1(t)) \\ &\quad + \lambda(at^p + t^p n_1(t))(1 + \dots)d(bt^q + t^q n_2(t)) \\ &= [\mu(bt^q + t^q n_2(t))(apt^{p-1} + pt^{p-1}n_1(t) + t^p n_1'(t)) \\ &\quad + \lambda(at^p + t^p n_1(t))(qbt^{q-1} + qt^{q-1}n_2(t) + t^q n_2'(t)) + \dots]dt \\ &= [ab(\lambda q + \mu p)t^{p+q-1} + t^{p+q}\alpha(t)]dt, \end{aligned}$$

con $\alpha(t) \in \mathbb{C}\{t\}$. Como $\frac{\lambda}{\mu} \notin \mathbb{Q}^-$, cumple $\mu p + \lambda q \neq 0$ y por tanto $\text{mult}(\gamma_1^* \omega) = p + q - 1$. De otro lado con

$$df = (yu(x, y) + xyu'(x, y))dx + (xu(x, y) + xyu'(x, y))dy,$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \gamma^* df &= [(bt^q + t^q n_2(t))u(x(t), y(t)) + \\ &\quad + (at^p + t^p n_1(t))(bt^q + t^q n_2(t))u'(x(t), y(t))]d(at^p + t^p n_1(t)) \\ &\quad + [(at^p + t^p n_1(t))u(x(t), y(t)) + \\ &\quad + (at^p + t^p n_1(t))(bt^q + t^q n_2(t))u'(x(t), y(t))]d(bt^q + t^q n_2(t)) \\ &= [(bt^q u(0, 0) + t^q n_2(t)u(0, 0))(apt^{p-1} + pt^{p-1}n_1(t) + t^p n_1'(t)) \\ &\quad + (at^p u(0, 0) + t^p n_1(t)u(0, 0))(qbt^{q-1} + qt^{q-1}n_2(t) + t^q n_2'(t)) \\ &\quad + \dots]dt \\ &= [abu(0, 0)(p + q)t^{p+q-1} + t^{p+q}\beta(t)]dt, \end{aligned}$$

con $\beta(t) \in \mathbb{C}\{t\}$. Así $\text{mult}(\gamma^* df) = p + q - 1$, es decir, $\text{ord}_t(\gamma^* \omega_1) = \text{ord}_t(\gamma^* df)$. Ahora, para ω_2 foliación de tipo curva generalizada reducida, por el mismo motivo se obtiene $\text{ord}_t(\gamma^* \omega_2) = \text{ord}_t(\gamma^* df)$. De ello concluimos la igualdad $\text{ord}_t(\gamma^* \omega_1) = \text{ord}_t(\gamma^* \omega_2)$.

A continuación abordaremos el lema cuando las foliaciones ω_1, ω_2 no son reducidas. Supongamos que se reducen después de una explosión, esto es $n = 1$. Escogemos las coordenadas de tal manera que $x = 0$ no esté en el cono tangente de γ . Parametricemos γ por

$$\begin{cases} x(t) &= t^n \\ y(t) &= \sum_{i \geq n} a_i t^i. \end{cases}$$

Hacemos una explosión en el origen en la carta $E : (x, t) \mapsto (x, xt)$. Para las foliaciones curvas generalizadas no dicríticas $\omega_1 = A_1(x, y)dx + B_1(x, y)dy$ y $\omega_2 = A_2(x, y)dx + B_2(x, y)dy$ con multiplicidades m_1 y m_2 respectivamente, tenemos

$$\begin{aligned} E^* \omega_1 &= A_1(x, xt)dx + B_1(x, xt)d(xt) \\ &= (A_1(x, xt) + tB_1(x, xt))dx + xB_1(x, xt)dt \\ &= x^{m_1} \hat{\omega}_1, \end{aligned}$$

donde $\widehat{\omega}_1$ es el transformado estricto de ω_1 . De manera similar tenemos $E^*\omega_2 = x^{m_2}\widehat{\omega}_2$. Del corolario 6.4, se cumple $\text{mult}(\omega_1) = \text{mult}(df) = \text{mult}(\omega_2)$. Denotaremos por $\widehat{\gamma}(t)$ la parametrización del transformado estricto $\widehat{\gamma}$ de la curva γ . Para $i = 1, 2$, tenemos

$$\begin{aligned}\gamma^*\omega_i &= (E \circ \widehat{\gamma})^*\omega_i = \widehat{\gamma}^*(E^*\omega_i) \\ &= \widehat{\gamma}^*(x^{m_i}\widehat{\omega}_i) = x(t)^{m_i}\widehat{\gamma}^*\widehat{\omega}_i,\end{aligned}$$

de donde se logra

$$\begin{aligned}\text{ord}_t\omega_i(\gamma(t)) &= \text{ord}_t(x(t)^{m_i}\widehat{\omega}_i(\widehat{\gamma}(t))) \\ &= \text{mult}(x(t))\text{mult}(\omega_i) + \text{ord}_t\widehat{\omega}_i(\widehat{\gamma}(t)).\end{aligned}\tag{6.3}$$

Como $\widehat{\omega}_1$ y $\widehat{\omega}_2$ son reducidas, por la parte (1) tenemos que

$$\text{ord}_t\widehat{\omega}_1(\widehat{\gamma}(t)) = \text{ord}_t\widehat{\omega}_2(\widehat{\gamma}(t)).$$

Además se conoce la igualdad $\text{mult}(\omega_1) = \text{mult}(\omega_2)$. Por lo tanto, la ecuación (6.3) muestra $\text{ord}(\omega_1(\gamma(t))) = \text{ord}(\omega_2(\gamma(t)))$.

Tomemos como hipótesis inductiva que si ω_1, ω_2 se desingularizan con a lo mucho $n - 1$ explosiones, entonces se tiene $\text{ord}(\omega_1(\gamma(t))) = \text{ord}(\omega_2(\gamma(t)))$.

Si suponemos que ω_1, ω_2 se desingularizan tras n explosiones, mediante el mismo argumento usado en (2), tenemos que se cumple $\gamma^*\omega_i = x(t)^{m_i}\widehat{\gamma}^*\widehat{\omega}_i$. De ello de obtenemos

$$\text{ord}_t\omega_i(\gamma(t)) = \text{mult}(x(t))\text{mult}(\omega_i) + \text{ord}_t\widehat{\omega}_i(\widehat{\gamma}(t)).\tag{6.4}$$

Por hipótesis inductiva $\widehat{\omega}_1$ y $\widehat{\omega}_2$ son reducidas con a lo más $n - 1$ explosiones, así que se satisface

$$\text{ord}_t\widehat{\omega}_1(\widehat{\gamma}(t)) = \text{ord}_t\widehat{\omega}_2(\widehat{\gamma}(t)).$$

Además se tiene $\text{mult}(\omega_1) = \text{mult}(\omega_2)$, pues ω_1 y ω_2 son foliaciones curvas generalizadas con el mismo conjunto de separatrices. Por lo tanto, la ecuación (6.4) muestra $\text{ord}(\omega_1(\gamma(t))) = \text{ord}(\omega_2(\gamma(t)))$; esto concluye la prueba del lema. \square

7. Polígono de Newton de una foliación

Dada una 1-forma $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ con $A, B \in \mathbb{C}\{x, y\}$ definimos el **soporte** de ω como

$$\text{Sop}(\omega) = \text{Sop}(xA) \cup \text{Sop}(yB).$$

Sea $\mathcal{F}_\omega : \omega = 0$ un germen de foliación dada por la 1-forma ω . Llamamos **polígono de Newton** de ω , y lo denotaremos $\mathcal{N}(\mathcal{F}_\omega) = \mathcal{N}(\omega)$, al borde de $\mathcal{D}(\text{Sop}(\omega))$.

Si escribimos $\omega = \sum_{i,j} A_{i,j} x^{i-1} y^j dx + \sum_{i,j} B_{i,j} x^i y^{j-1} dy$ entonces

$$\text{Sop}(\omega) = \{(i, j) : (A_{i,j}, B_{i,j}) \neq (0, 0)\}.$$

Decimos que un punto $(i, j) \in \text{Sop}(\omega)$ es **contribución** de B si $(i, j) \in \text{Sop}(yB)$. De manera similar un punto $(i, j) \in \text{Sop}(\omega)$ es contribución de A si $(i, j) \in \text{Sop}(xA)$.

Observación 7.1. El polígono de Newton depende de coordenadas, por ello es necesario tener presente respecto en qué coordenadas estamos trabajando.

Observación 7.2. Si consideramos $\mathcal{C}_f : f = 0$ y $\mathcal{F} : df = 0$, notamos que se tiene $\text{Sop}(df) = \text{Sop}(f)$, de ello se obtiene $\mathcal{N}(df) = \mathcal{N}(f)$.

De manera similar al caso de curvas, el método de Newton para curvas fue generalizado a foliaciones, en este caso por J. Cano [5]. En dicho trabajo se observa que el polígono de Newton de la foliación juega un papel fundamental.

En curvas, si L es un lado compacto de $\mathcal{N}(f)$ con inclinación μ , entonces existe una raíz de $f = 0$ de la forma

$$y = cx^\mu + \dots,$$

donde $c \neq 0$ es raíz de cierto polinomio determinado por f . Además, el número de raíces de Newton-Puiseux de orden μ es igual a la altura del lado L (la altura de L es su proyección sobre el eje vertical).

Sin embargo, la propiedad propuesta en el párrafo anterior no es válida cuando buscamos soluciones de ecuaciones del tipo $\omega = 0$, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.3. ([7, página 32]) Si consideramos la foliación \mathcal{F} definida por

$$w = 4xydx + (y - 2x^2)dy,$$

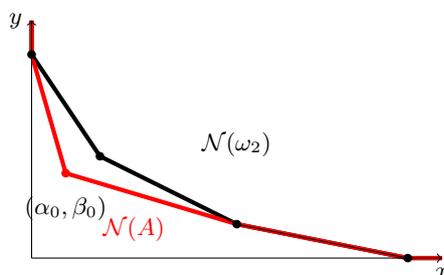
el polígono de Newton tiene un lado L de inclinación 2. Sin embargo \mathcal{F} tiene una única separatriz dada por $y = 0$.

Las foliaciones curvas generalizadas tienen un comportamiento muy parecido al de sus separatrices, pues tienen la misma resolución de singularidades. También sucede esto en lo referido al polígono de Newton, como veremos en el siguiente teorema. Mediante técnicas de Rouillé mostramos el siguiente teorema.

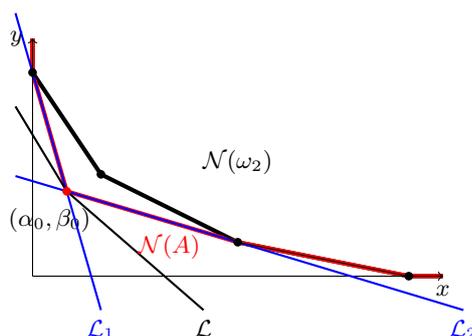
Teorema 7.4. Sean ω_1 y ω_2 dos foliaciones curvas generalizadas no dicríticas con el mismo conjunto de separatrices. Entonces se tiene

$$\mathcal{N}(\omega_1) = \mathcal{N}(\omega_2).$$

Demostración. Mostraremos que se cumple $Sop(\omega_1) \subseteq \mathcal{D}(Sop(\omega_2))$ por reducción al absurdo. Para ello supongamos que existe $(\alpha_0, \beta_0) \in Sop(\omega_1)$ tal que $(\alpha_0, \beta_0) \notin \mathcal{D}(Sop(\omega_2))$. De $Sop(\omega_2) \subseteq Sop(\omega_2) \cup \{(\alpha_0, \beta_0)\}$ pasamos a $\mathcal{D}(Sop(\omega_2)) \subset \mathcal{D}(Sop(\omega_2) \cup \{(\alpha_0, \beta_0)\})$. Sea $A = Sop(\omega_2) \cup \{(\alpha_0, \beta_0)\}$. Como $\mathcal{D}(A)$ es convexo y $(\alpha_0, \beta_0) \notin Sop(\omega_2)$ se tiene que (α_0, β_0) es un vértice de $\mathcal{N}(A)$, pues si (α_0, β_0) no lo fuera, obviamente se tendría $(\alpha_0, \beta_0) \in \mathcal{D}(Sop(\omega_2))$. Obsérvese que sin pérdida de generalidad se puede asumir que (α_0, β_0) es un vértice de $\mathcal{D}(Sop(\omega_1))$



Sean \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 las dos rectas que pasan por (α_0, β_0) y que contienen a los lados de $\mathcal{N}(A)$ adyacentes a dicho vértice. Denotemos por λ_j a la inclinación de \mathcal{L}_j , donde $\lambda_1 < \lambda_2$. Las rectas \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 son rectas de apoyo de $\mathcal{N}(A)$, de donde se logra $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{L}_j^+$, para $j \in \{1, 2\}$.



Por la proposición 8.1, cualquier recta \mathcal{L} que pasa por (α_0, β_0) con inclinación $\lambda \in]\lambda_1, \lambda_2[$ está contenida en $(\mathcal{L}_1^- \cap \mathcal{L}_2^+) \cup (\mathcal{L}_1^+ \cap \mathcal{L}_2^-)$. Como \mathcal{L} es recta de apoyo de $\mathcal{N}(A)$, se tiene $\mathcal{D}(\text{Sop}(\omega_2)) \subset \mathcal{D}(A)$ y $(\alpha_0, \beta_0) \notin \mathcal{D}(\text{Sop}(\omega_2))$, de donde concluimos que $\mathcal{D}(\text{Sop}(\omega_2))$ no interseca a ninguna recta contenida en $(\mathcal{L}_1^- \cap \mathcal{L}_2^+) \cup (\mathcal{L}_1^+ \cap \mathcal{L}_2^-)$.

La región $(\mathcal{L}_1^- \cap \mathcal{L}_2^+) \cup (\mathcal{L}_1^+ \cap \mathcal{L}_2^-)$ contiene infinitas rectas. Consideremos $\mathcal{L} : qx + py = q\alpha_0 + p\beta_0$ de inclinación $\lambda = p/q \in]\lambda_1, \lambda_2[$, con p y q primos entre sí, de manera que

- la recta \mathcal{L} contenga al punto (α_0, β_0) ,
- $qA_{\alpha_0\beta_0} + pB_{\alpha_0\beta_0} \neq 0$,
- $\mathcal{L} \cap \text{Sop}(\omega_1) = \{(\alpha_0, \beta_0)\}$.

De lo anterior se obtiene

$$\mathcal{D}(A) \subseteq \{(x, y) : qx + py > c\},$$

donde $c = q\alpha_0 + p\beta_0$, y por ende se satisface $\mathcal{D}(\text{Sop}(\omega_2)) \subseteq \{(x, y) : qx + py > c\}$.

Con $\gamma(t)$ la curva parametrizada por $(x(t), y(t)) = (t^q, t^p)$, se tiene

$$\begin{aligned} \gamma^*\omega_1 &= \omega_1(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= A_{\alpha\beta} t^{q(\alpha-1)} t^{p\beta} q t^{q-1} dt + B_{\alpha\beta} t^{q\alpha} t^{p(\beta-1)} p t^{p-1} dt \\ &= (qA_{\alpha\beta} + pB_{\alpha\beta}) t^{q\alpha+p\beta-1} dt. \end{aligned}$$

Como $\text{Sop}(\omega_1) \cap \mathcal{L} = \{(\alpha_0, \beta_0)\}$ y $qA_{\alpha_0\beta_0} + pB_{\alpha_0\beta_0} \neq 0$, tenemos

$$\text{mult}(\gamma^*\omega_1) \leq q\alpha_0 + p\beta_0 - 1 = c - 1. \quad (7.1)$$

Al tenerse $\mathcal{D}(\text{Sop}(\omega_2)) \subset \{(x, y) : qx + py > c\}$ para todo $(\alpha, \beta) \in \text{Sop}(\omega_2)$, se cumplirá $\alpha q + p\beta > c$, y con ello también

$$\alpha q + p\beta - 1 > c - 1. \quad (7.2)$$

De (7.1) y (7.2) se logra

$$\text{mult}(\gamma^*\omega_2) > c - 1 \geq \text{mult}(\gamma^*\omega_1),$$

lo que contradice el lema 6.10. De este modo obtenemos $\text{Sop}(\omega_1) \subset \mathcal{D}(\text{Sop}(\omega_2))$.

Por el mismo argumento se tiene $\text{Sop}(\omega_2) \subset \mathcal{D}(\text{Sop}(\omega_1))$, lo que conduce a $\mathcal{D}(\text{Sop}(\omega_1)) = \mathcal{D}(\text{Sop}(\omega_2))$, de donde finalmente concluimos $\mathcal{N}(\omega_1) = \mathcal{N}(\omega_2)$. \square

Como caso particular del teorema anterior, podemos establecer el siguiente corolario.

Corolario 7.5. Sea ω curva generalizada y sea $\mathcal{C} : f = 0$ una ecuación reducida de su conjunto de separatrices. Entonces se cumple

$$\mathcal{N}(\omega_1) = \mathcal{N}(df).$$

Demostración. Basta aplicar el teorema a ω y df . □

Observación 7.6. Del corolario 7.5 y de la observación 7.1 concluimos la igualdad $\mathcal{N}(\omega) = \mathcal{N}(df) = \mathcal{N}(f)$.

Observación 7.7. Si el germen de curva \mathcal{C}_f es irreducible, por el corolario 2.9, su polígono $\mathcal{N}(f)$ tiene un solo lado compacto. Si consideramos el caso donde la foliación ω tiene una sola separatriz irreducible \mathcal{C}_f , el polígono $\mathcal{N}(\omega)$ admitirá apenas un lado compacto.

Dados $p, q \in \mathbb{N}^*$, definimos

$$\text{grad}_{(p,q)}(x^i y^j) = \frac{ip + jq}{\text{mcd}(p, q)} \quad \text{y}$$

$$\text{ord}_{(p,q)} \left(\sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j \right) = \text{mín} \left\{ \text{grad}_{(p,q)}(x^i y^j) : a_{i,j} \neq 0 \right\}.$$

En 1999 Loray [13] enuncia una caracterización de aquellas foliaciones que tienen la misma resolución que su conjunto de separatrices. Dicho resultado ([13, Pág.163]) es enunciado con la corrección adecuada en la proposición 1.2.

En 2014, Fernández, Mozo y Neciosup [10] encuentran una imprecisión en la caracterización originalmente propuesta. Ellos muestran que la condición dada en la proposición 1.2 no es necesaria, como se desprende del siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.8. De los ejemplos 6.5 y 6.9 se sabe que la foliación $\omega = d(y^6 - x^3) + axy(6xdy - 3ydx)$, con $a \in \mathbb{C}^*$, tiene como separatriz la curva $\mathcal{C}_f : y^6 - x^3 = 0$ y es de tipo curva generalizada. Por el teorema 6.2 la foliación ω y su separatriz $\mathcal{C}_f : y^6 - x^3 = 0$ tienen la misma resolución. Pero la función $\Delta(x, y) = axy$ satisface $\text{ord}_{(6,3)}\Delta = 3$, valor que no verifica la relación $\text{ord}_{(6,3)}\Delta > \frac{pq-p-q}{\text{mcd}(p,q)} = 3$.

El ejemplo 7.8 muestra que la condición no es necesaria para el caso en que p y q no sean coprimos. Nos preguntamos entonces qué sucede con p y q coprimos. Y la respuesta para el caso en que la foliación es curva generalizada la brindamos en el siguiente teorema.

Teorema 7.9. Sean p y q coprimos. Si la foliación

$$\omega = d(y^p - x^q) + \Delta(x, y)(pxdy - qydx)$$

es de tipo curva generalizada, entonces se tiene

$$\text{ord}_{(p,q)}\Delta(x, y) > pq - p - q.$$

Demostración. Al considerar $\Delta(x, y) = \sum_{i,j} a_{i,j}x^i y^j \in \mathbb{C}\{x, y\}$, podemos escribir

$$\omega = \left(-qx^{q-1} - q \sum_{i,j} a_{i,j}x^i y^{j+1} \right) dx + \left(py^{p-1} + p \sum_{i,j} a_{i,j}x^{i+1} y^j \right) dy,$$

y se obtiene $\text{Sop}(\omega) = \{(q, 0), (i + 1, j + 1)\} \cup \{(0, p)(i + 1, j + 1)\}$, donde $(i, j) \in \text{Sop}(\Delta)$. Como ω es foliación de tipo curva generalizada, por la observación 7.6 tenemos $\mathcal{N}(\omega) = \mathcal{N}(f)$. Además la curva $\mathcal{C}_f : y^p - x^q = 0$ es irreducible y su polígono tiene un solo lado compacto, el cual está contenido en la recta $\mathcal{L} : px + qy = pq$. Por tanto, el lado compacto de $\mathcal{N}(\omega)$ está también contenido en la recta $\mathcal{L} : px + qy = pq$. Para $(i + 1, j + 1) \in \text{Sop}(\omega)$ se tiene entonces $(i + 1)p + (j + 1)q > pq$, de donde se logra $\text{ord}_{(p,q)}\Delta(x, y) = ip + jq > pq - p - q$. \square

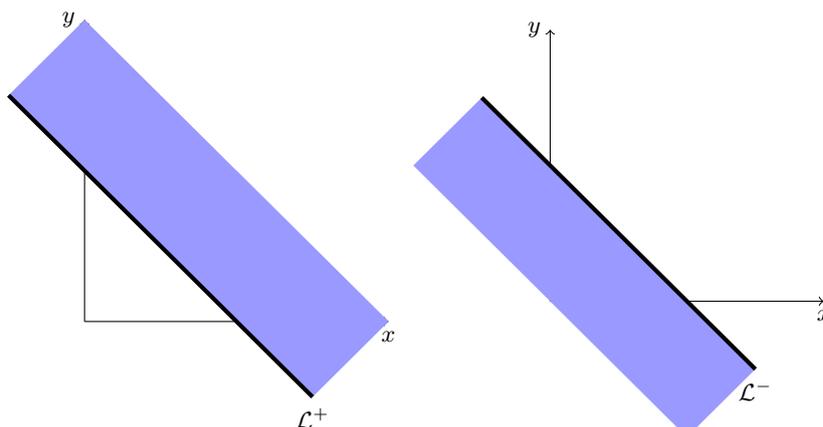
El resultado del teorema anterior nos indica que el ser foliación de tipo curva generalizada es una condición suficiente para que $\text{ord}_{(p,q)}\Delta(x, y)$ sea mayor que $pq - p - q$.

8. Apéndice: geometría plana

Consideremos la recta $\mathcal{L} : ax + by = c$, con $a, b \geq 0$. Pongamos

$$\mathcal{L}^+ = \{(x, y) : ax + by \geq c\} \text{ y } \mathcal{L}^- = \{(x, y) : ax + by \leq c\}, \quad (8.1)$$

de modo que \mathcal{L}^+ es el hiperplano superior de \mathcal{L} y \mathcal{L}^- es el hiperplano inferior.



Decimos que \mathcal{L} tiene **inclinación** λ si $-\frac{1}{\lambda}$ es la pendiente de \mathcal{L} . Fijado (a, b) , la recta $\mathcal{L}_\lambda : x + \lambda y = a + \lambda b$ es precisamente aquella que pasa por (a, b) con inclinación λ .

Proposición 8.1. Para $\lambda \in]\lambda_1, \lambda_2[$ se tiene

$$\mathcal{L}_\lambda \subseteq (\mathcal{L}_{\lambda_1}^- \cap \mathcal{L}_{\lambda_2}^+) \cup (\mathcal{L}_{\lambda_1}^+ \cap \mathcal{L}_{\lambda_2}^-).$$

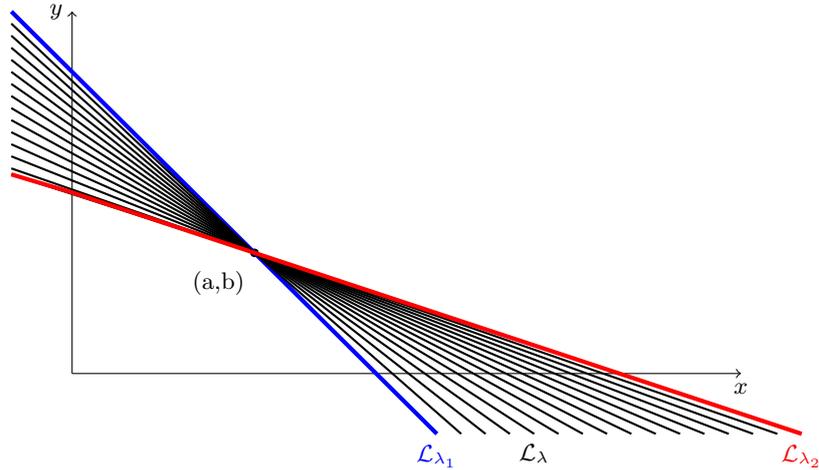
Demostración. Los puntos de corte de \mathcal{L}_λ con los ejes $\{x = 0\}$, $\{y = 0\}$ son

$$\mathcal{L}_\lambda \cap \{x = 0\} = \left\{ \left(0, \frac{a}{\lambda} + b \right) \right\} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_\lambda \cap \{y = 0\} = \left\{ (a + \lambda b, 0) \right\}.$$

Por otra parte, la condición $\lambda_1 < \lambda_2$ implica $a + \lambda_1 b < a + \lambda_2 b$ y $\frac{a}{\lambda_1} + b > \frac{a}{\lambda_2} + b$. Al satisfacerse $\lambda \in]\lambda_1, \lambda_2[$, observamos que se cumple

$$a + \lambda_1 b < a + \lambda b < a + \lambda_2 b \quad \text{y} \quad \frac{a}{\lambda_2} + b < \frac{a}{\lambda} + b < \frac{a}{\lambda_1} + b,$$

de donde concluimos $\mathcal{L}_\lambda \subseteq (\mathcal{L}_{\lambda_1}^- \cap \mathcal{L}_{\lambda_2}^+) \cup (\mathcal{L}_{\lambda_1}^+ \cap \mathcal{L}_{\lambda_2}^-)$, tal como se observa en la gráfica.



□

Notemos, si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, que hay infinitas \mathcal{L}_λ que satisfacen

$$\mathcal{L}_\lambda \subseteq (\mathcal{L}_{\lambda_1}^- \cap \mathcal{L}_{\lambda_2}^+) \cup (\mathcal{L}_{\lambda_1}^+ \cap \mathcal{L}_{\lambda_2}^-).$$

En $(\mathcal{L}_{\lambda_1}^- \cap \mathcal{L}_{\lambda_2}^+)$ hay un número finito de puntos $(c, d) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$ con $c \in [0, a]$ y $d \in [b, \frac{a}{\lambda_1}]$. De manera similar en $(\mathcal{L}_{\lambda_1}^+ \cap \mathcal{L}_{\lambda_2}^-)$ hay un número finito de puntos con coordenadas enteras cuya abscisa varía en $[a, a + \lambda_2 b]$ y cuya ordenada varía en $[0, b]$.

Agradecimientos

Durante la preparación del artículo hemos conversado con varios colegas: Rudy Rosas, Fernando Iglesias y Hernán Neciosup, quienes nos han ayudado a organizar este artículo. También agradecemos al arbitro del artículo por sus comentarios que mejoraron considerablemente la exposición.

Percy Fernández y Nancy Saravia

Los autores agradecen el financiamiento de la Pontificia Universidad Católica del Perú mediante el proyecto **DGI 2015-1-0045**.

El segundo autor agradece el financiamiento parcial del proyecto **PAID 2014-0009** y a la **Beca Marco Polo 2015**.

El segundo autor agradece de manera muy especial a Evelia García Barroso, quien contribuyó en la realización de este trabajo durante sus estancias en la Universidad de La Laguna (Tenerife-España), universidad que financió, en su totalidad, una de las estancias realizadas.

Referencias

- [1] M. BERTHIER, R. MEZIANI AND P. SAD. *On the classification of nilpotent singularities*. Bull. Sci. Math. 123 (1999), 351-370.
- [2] C. CAMACHO AND L. NETO. *Introdução a Teoría das Folheações*. 11 Colóquio Brasileiro de Matemática. 1977.
- [3] C. CAMACHO AND P. SAD. *Invariant Varieties Through Singularities of Holomorphic Vector Fields*. Ann. of Math., 115, (1982), 579-595.
- [4] C. CAMACHO, A. LINS NETO AND P. SAD. *Topological Invariants and Equidesingularisation for Holomorphic Vector Fields*. J. Differential Geometry, 20, (1984), pp. 143-174.
- [5] J. CANO. *An extension of the Newton-Puiseux polygon construction to give solution of pfaffian form*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble.(1993), 43, 1, 125-142.
- [6] D. CERVEAU AND R. MOUSSU. *Groupes d'automorphismes de $(\mathbb{C}, 0)$ et équations différentielles $yd + \dots = 0$* . Bull. Soc. Math. France 116 (1988) 459-488.
- [7] N. CORRAL. *Sur la topologie des courbes polaires de certains feuilletages singuliers*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble.(2003), 53, 3, 787-814.

- [8] A. CHECINER. *Coures Algébriques Planes*. Springer Berlin Heidelberg New York.(1978).
- [9] H. DULAC. *Points Singuliers des équations différentielles*. Mémorial Des Sciences Mathématiques. Fascicule 61 (1934), 1-70.
- [10] P. FERNÁNDEZ - J. MOZO - H. NECIOSUP. *On codimension one foliations with prescribed cuspidal separatrix*. J. Differential Equations 256 (2014), 1702-1717.
- [11] E. GARCÍA BARROSO. *Invariants des singularités de courbes planes et courbure des fibres de Milnor*. Thèse, École Normale Supérieure, LMENS-96-35, 1996.
- [12] A. HEFEZ. *Irreducible Plane Curve Singularities*. Real and Complex Singularities the sixth workshop at São Carlos. (2003), 1-120.
- [13] F. LORAY. *Réduction formelle des singularités cuspidales de champs de vecteurs analytiques*. J. Differential Equations 158 (1999), 152-173.
- [14] J. MARTINET - J. RAMIS *Problemes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre*. Publ. Math. I.H.É. 55 (1982), 63-164.
- [15] J. MATTEI-R. MOUSSU *Holonomie et intégrale première*. Ann. Scient. Ecole. Norm. Sup 13 (1980), 571-621.
- [16] R. MEZIANI *Classification analytique d'équations différentielles $yd + \dots = 0$ et espaces modules*. Bol. Soc. Brasil Mat. 27 (1996), 23-53.
- [17] J. MOZO. *Clasificación analítica de foliaciones holomorfas singulares*. Monografías del IMCA. Escuela CIMPA. (2010), 1-99.
- [18] P. ROUILLÉ. *Sur les polaires des certaines 1-formes*. C. R. Acad. Sci. Paris Série I, Math. 326(1998). no. 6, 677-680.

- [19] P. ROUILLÉ. *Théorème de Merle: cas des 1-formes de type courbes généralisées*. Bol. Soc. Mat. (1999). Vol. 30, (3), 293-314.
- [20] A. SEIDENBERG. *Reduction of Singularities of the Differentiable Equation $A dY = B dX$* . Amer. Journal of Math. 90, (1968), pp. 248-269.
- [21] E. STRÓZYNA. *The analytic and formal normal form for the nilpotent singularity. The case of generalized saddle-node* Bull. Sci. Math. 126 (2002), 555-579.
- [22] F. TAKENS. *Singularities of vector fields*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 43 (1974) 47-100.
- [23] O. ZARISKI. *Le problème des modules pour les branches planes*. Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, 1973. Redition Hermann, 1986.

Abstract

Generalized curve foliations are a type of foliations that have a similar reduction as the one given by curves. Camacho, Lins Neto, and Sad showed that generalized curve no-dicritical foliations have the same reduction of singularities than their separatrices. In this paper we give a novel proof of Dulac's theorem ([9]) using techniques of Rouillé ([19]). This theorem shows that for generalized curve no-dicritical foliations their Newton polygons and their separatrices are equal. Using Dulac's theorem we return to a result (wrongly) stated by Loray, which is not quite right, as noticed by Fernández, Mozo and, Neciosup.

Palabras Clave/Keywords: Foliations, Newton polygon of a foliation, generalized curve foliations.

Percy Fernández Sánchez
Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias

Polígono de Newton de una foliación de tipo curva generalizada

Pontificia Universidad Católica del Perú
Av. Universitaria 1801, San Miguel, Lima 32
pefernan@pucp.edu.pe

Nancy Saravia Molina
Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú
Av. Universitaria 1801, San Miguel, Lima 32
nsaraviam@pucp.edu.pe

