Clasificación de foliaciones elípticas inducidas por campos cuadráticos reales con centro

Liliana Puchuri[1,2]

Setiembre, 2015

Resumen

En el estudio del problema infinitesimal de Hilbert se encuentra inmersa la tarea de analizar la existencia y de acotar el número de ciclos límite de una perturbación lineal de campos hamiltonianos. Como existe una clasificación de campos cuadráticos reales con centro en $\mathbb{R}^2$, podemos asociar campos complejos en $\mathbb{C}^2$ que inducen una foliación en $\mathbb{P}^2$. El objetivo de este trabajo es clasificar aquellas foliaciones en $\mathbb{P}^2$ inducidas por estos campos cuadráticos que sean fibraciones elípticas, es decir, aquellas cuyas curvas de nivel sean de género uno.

MSC(2010): 34C07.

Palabras clave: *Ciclos límite, decimosexto problema de Hilbert, foliaciones elípticas.*

[1] *Instituto de Matemáticas y Ciencias Afines (IMCA), Perú.*
[2] *Pontificia Universidad Católica del Perú.*

1. Introducción

La teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales nació con los trabajos de Poincaré y Liapunov a finales del siglo XIX y en los inicios del siglo XX. En el problema infinitesimal de Hilbert se observa que vía pequeñas perturbaciones de un campo se puede obtener ciclos límites en el campo perturbado. Este problema está relacionado con la existencia de ciclos límite; por ello, es importante saber cuándo un campo posee un centro, circunstancia referida como *el problema del centro*. Este problema fué resuelto por Poincaré para campos polinomiales. Posteriormente Liapunov lo generalizó para campos vectoriales analíticos. Por el teorema de clasificación de campos vectoriales polinomiales reales con centro, todo campo polinomial con una singularidad no degenerada con centro posee una integral primera de uno de cuatro tipos: *reversible, Lotka-Volterra, de codimensión cuatro* o *hamiltoniano*. Debido a que todo campo polinomial real induce un campo polinomial complejo, podemos inducir una foliación compleja en el espacio proyectivo complejo de dimensión dos. Se prueba que tales foliaciones inducidas poseen una integral primera racional cuyas curvas de nivel son curvas algebraicas complejas.

En el presente trabajo reproducimos los resultados obtenidos por Gautier [6] para el caso Lotka-Volterra mediante la teoría de foliaciones holomorfas. Además, debido a una imprecisión en la prueba original de Gautier, presentamos nuevos ejemplos de foliaciones elípticas para este caso. Por otro lado, probamos que en los casos hamiltoniano y de codimensión cuatro, las curvas de nivel siempre son de género uno. En el caso reversible, vía mapeos birracionales, las curvas de nivel están dadas por curvas hiperelípticas. En este caso, es fácil calcular el género de las curvas, puesto que el género es invariante por mapeos birracionales.

2. Preliminares

Toda ecuación diferencial cuadrática para la cual el origen es una singularidad no degenerada de tipo centro puede ser llevada mediante un cambio de coordenadas a la forma

$$\begin{aligned} x' &= \quad y + a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2 \\ y' &= -x + b_{2,0}x^2 + b_{1,1}xy + b_{0,2}y^2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Lema 2.1. *La ecuación diferencial cuadrática* (2.1) *puede ser escrita en coordenadas complejas como*

$$z' = -iz + Az^2 + Bz\bar{z} + C\bar{z}^2, \tag{2.2}$$

para $A, B, C \in \mathbb{C}$.

Demostración. Ver [8]. □

2.1. Ecuaciones diferenciales cuadráticas con centro

El problema del centro para campos cuadráticos reales fue considerado por primera vez por Kapteyn [7]. En [7], se exhibe un conjunto de condiciones algebraicas sobre los coeficientes de (2.1) para que exista un centro en el origen.

Teorema 2.2 (Kapteyn [7])**.** *El sistema* (2.1) *tiene un centro en el origen si y solamente si una de las siguientes condiciones*

1. $a_{2,0} + a_{0,2} = 0$,

2. $a_{1,1} = b_{2,0} = 0$,

3. $0 = a_{1,1} - 2b_{2,0} = -b_{1,1} + 4a_{2,0} + 5a_{0,2} = b_{2,0}^2 + a_{2,0}a_{0,2} + 2a_{0,2}^2$,

4. $-b_{1,1} - 2a_{2,0} = a_{1,1} - 2b_{2,0} = 0$

es satisfecha. □

Por el lema 2.1, la ecuación (2.1) puede ser llevada a la forma

$$z' = -iz + Az^2 + Bz\bar{z} + C\bar{z}^2, \tag{2.3}$$

y así tenemos diversos casos que considerar.

Cuando $B = A = 0$ y $C \neq 0$, por medio de rotaciones y dilataciones podemos considerar $C = 1$. De esta manera (2.3) se convierte en

$$z' = -iz + \bar{z}^2. \tag{2.4}$$

Cuando $B = 0$ y $A \neq 0$, nuevamente por medio de una rotación podemos limitarnos a tratar $A = 1$. Luego (2.3) toma la forma

$$z' = -iz + z^2 + C\bar{z}^2. \tag{2.5}$$

Cuando $B \neq 0$, por medio de una homotecia y una rotación podemos considerar $B = 2$, y (2.3) toma la forma

$$z' = -iz + Az^2 + 2z\bar{z} + C\bar{z}^2. \tag{2.6}$$

Si aplicamos el teorema 2.2 a lo observado anteriormente obtenemos la siguiente información.

Proposición 2.3. *Con la notación de arriba, el origen es un centro de la ecuación* (2.3) *justamente cuando por medio de una rotación o homotecia una de las siguientes condiciones es satisfecha:*

1. $A = B = 0,\ C = 1$*;*

2. $B = 0,\ A = 1$*;*

3. $B = 2,\ A = -1,\ C \notin \mathbb{R}$*;*

4. $B = 2,\ A, C \in \mathbb{R}$*;*

5. $B = 2,\ A = 4,\ |C| = 2,\ C \notin \mathbb{R}$. □

Teorema 2.4 (Kapteyn [7])**.** *Existen cinco tipos de sistemas cuadráticos con centro:*

H_1**:** $z' = -iz + \bar{z}^2$ *(hamiltoniano 1);*

Q_3^L**:** $z' = -iz + z^2 + C\bar{z}^2$, $C \in \mathbb{C}$ *(Lotka Volterra generalizado);*

H**:** $z' = -iz + -z^2 + 2z\bar{z} + C\bar{z}^2$, $C \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *(hamiltoniano);*

Q_3^R**:** $z' = -iAz + 4z^2 + 2z\bar{z} + C\bar{z}^2,\ A, C \in \mathbb{R}$ *(reversible);*

Q_4**:** $z' = -iz + 4z^2 + 2z\bar{z} + C\bar{z}^2,\ |C| = 2, C \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *(codimensión 4).* □

El lector interesado puede consultar [8] para la prueba del siguiente teorema.

Teorema 2.5. *Si la ecuación* (2.3) *posee un centro, entonces ésta posee una integral de la forma*

1. $P_3 \in \mathbb{R}[x, y]$ *(caso* H *y* H_1*);*

2. $x^p y^q (ax + by + c)^r$*,* $p, q \in \mathbb{Z}$*,* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *(caso* Q_3^L*);*

3. $x^p (y^2 + P_2(x))^q$*,* $q \in \mathbb{N}$*,* $p, q \in \mathbb{Z}$*,* $P_2 \in \mathbb{R}[x, y]$ *(caso* Q_3^R*);*

4. $\dfrac{P_3(x, y)^2}{P_2^3(x, y)}$*,* $P_3 \in \mathbb{R}[x, y]$ *y* $P_2 \in \mathbb{R}[x, y]$ *(caso* Q_4*).*

La notación $P_i \in \mathbb{R}[x, y]$ *indica que* P_i *es un polinomio de grado* i*.* □

Diremos que una integral primera es **de tipo 2** (respectivamente **de tipo 3**) si tiene la forma dada en el ítem *2* (respectivamente ítem *3*) del teorema 2.5.

2.2. Fórmula de Cerveau-Lins Neto

En esta sección presentaremos una fórmula para calcular el género de una curva irreducible invariante por una foliación mediante herramientas de la teoría de foliaciones. Esto se efectúa por medio de un cierto índice a lo largo de una curva.

Definición 2.6. Sean $U \subset \mathbb{C}^2$, $V \subset \mathbb{C}$ abiertos con $0 \in V$, X un campo vectorial en U y $f : U \to V$ una función holomorfa. Diremos que $C = f^{-1}(0)$ es **invariante por** X cuando satisface

$$df_q(X(q)) = 0, \quad \text{para todo } q \in C.$$

Teorema 2.7 (Parametrización de Puiseux). *Sea $S = \{(x, y) \in U \subset \mathbb{C}^2 : f(x, y) = 0\}$ una curva irreducible que pasa por $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ distinta a los ejes coordenados. Entonces existe un germen holomorfo $\theta : V \subset \mathbb{C} \to U$, con V vecindad de 0, definido como*

$$\theta(z) = (z^m, z^n u(z)),$$

tal que

- *u es holomorfa con $u(0) \neq 0$;*
- *se tiene $f(\theta(z)) = 0$, para todo $z \in V$;*
- *$m_p(f) = \text{mín}(m, n)$ es la multiplicidad de f en $(0, 0)$; y*
- *existe un disco $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ tal que $\theta : \mathbb{D} \to \theta(\mathbb{D}) \subset S$ es un homeomorfismo y $\theta|_{\mathbb{D}\setminus\{0\}}$ es holomorfa.*

Demostración. Para la prueba ver [5, p. 30]. □

Ejemplo 2.8. Sea $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $X(x, y) = (qx, py)$, donde $p, q \in \mathbb{N}$ y $\text{mcd}(p, q) = 1$. Consideremos la curva

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x^p = y^q\}.$$

Claramente, para $f(x, y) = x^p - y^q$ se tiene $C = f^{-1}(0)$ y C resulta invariante por X. Además, $\alpha : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^2, (0, 0))$ definida como $\alpha(t) = (t^q, t^p)$ es una parametrización de Puiseux de C.

La siguiente proposición, que puede ser encontrada en [2], nos ayuda a definir un índice que se presta para calcular el género de una curva algebraica irreducible.

Proposición 2.9. *Sea X un campo definido en un abierto $U \subset \mathbb{C}^2$, S una subvariedad invariante de dimensión 1 y $p \in S$ una singularidad aislada de X. Consideremos además una parametrización de Puiseux $\alpha : V \to U$ en un dominio $V \subset \mathbb{C}$ que contiene p. Entonces existe un único campo vectorial holomorfo X_1 en D que cumple*

$$d\alpha \cdot X_1 = X \circ \alpha.$$

En la proposición anterior, dado $X_1(t) = \sum_{i \geq m} a_i t^i$, con $a_m \neq 0$, el valor $i_p(X, S) = m$ es llamado **índice a lo largo de la curva S de X** en p.

Ejemplo 2.10. En el ejemplo 2.8 tenemos

$$X(\alpha(t)) = t(qt^{q-1}, pt^{p-1}) = t\alpha'(t) = \alpha'(t)X_1(t).$$

Al adoptar la notación de la proposición 2.9 se cumple $X_1(t) = t$ y así se tiene $i_p(X, C) = 1$.

Proposición 2.11. *Sea $\mathcal{F}$ una foliación en $\mathbb{P}^2$ dada en coordenadas (x, y) de $\mathbb{C}^2$ por una forma polinomial $\omega = Pdy - Qdx$. Para una singularidad p de $\mathcal{F}|_{\mathbb{C}^2}$ y B una rama local invariante por $\mathcal{F}$ que pasa por p, sea π una explosión en p. Consideremos $B' = \pi^* B$, $E = \pi^{-1}(p)$ y $p' \in E \cap B'$. Entonces se tiene*

$$i_p(\mathcal{F}, B) = \begin{cases} i_{p'}(\pi^*\mathcal{F}, B') + m_p(B)(\nu_p(\mathcal{F}) - 1), & \text{si } \pi \text{ es no-dicrítico} \\ i_{p'}(\pi^*\mathcal{F}, B') + m_p(B)\nu_p(\mathcal{F}), & \text{si } \pi \text{ es dicrítico.} \end{cases}$$

□

Teorema 2.12 (Cerveau y Lins-Neto [4]). *Sea $\mathcal{F}$ una foliación sobre $\mathbb{P}^2$ de grado d y C una curva invariante por $\mathcal{F}$ de grado m. Entonces se cumple*

$$\mathcal{X}(C) + m(d-1) = \sum_{p \in C} \sum_{B \in C\{p\}} i_p(\mathcal{F}_1, B), \qquad (2.7)$$

donde $\mathcal{X}(C)$ es la característica de Euler del normalizado de C y $C\{p\}$ es el conjunto de ramas que pasan por p. □

2.3. Fibraciones en superficies complejas compactas

Sea X una superficie compacta y S una superficie de Riemann compacta. Diremos que $f : X \to S$ es una **fibración** si f es un mapeo holomorfo.

Ejemplo 2.13. Sea $\mathcal{F}$ la foliación en $\mathbb{P}^2$ inducida por dF, donde $F : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ está dada por

$$F([X : Y : Z]) = \frac{X^3}{Y^2 Z}.$$

En este caso $\mathcal{F}$ posee una única singularidad $p = (0, 0)$. El proceso de desingularización de $\mathcal{F}$ está dado (ver [8, ejemplo 4.13]) por tres explosiones $\pi = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3 : \widetilde{\mathbb{P}^2} \to \mathbb{P}^2$. Ya que se tiene

$$F_3(s, t) = F \circ \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3(s, t) = s,$$

el mapeo $f = F \circ \pi : \widetilde{\mathbb{P}}^2 \to \mathbb{P}^1$ es holomorfo.

Diremos que $f : X \to S$ es una **fibración racional** (respectivamente **elíptica**) si f es una fibración tal que todas sus fibras poseen género cero (respectivamente, fibras conexas de género uno) salvo por un número finito de ellas. Observemos que la función f del ejemplo 2.13 es una fibración racional.

Sea $\mathcal{F}$ una foliación en $\mathbb{P}^2$. Diremos que $\mathcal{F}$ es una **foliación elíptica** cuando posee una integral primera $F : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ de modo que si $\pi : \widetilde{\mathbb{P}^2} \to \mathbb{P}^2$ es la desingularización de $\mathcal{F}$, entonces $F \circ \pi : \widetilde{\mathbb{P}^2} \to \mathbb{P}^1$ es una fibración elíptica.

En adelante pondremos $\text{gén}(C)$ para aludir al género de la curva C.

2.4. Foliación reversible y de Lotka-Volterra

Un **cambio de variables** en $\mathbb{C}^n$ es un mapeo polinomial

$$f = (f_1, \ldots, f_n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$$

tal que cada polinomio f_i es de grado 1 y f es una biyección.

Diremos que una foliación $\mathcal{F}$ en $\mathbb{P}^2$ es **de tipo 2** (respectivamente **de tipo 3**) si existe un automorfismo $T : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ tal que $T^*\mathcal{F}$ posee una integral primera de tipo 2 (respectivamente de tipo 3).

Diremos que una foliación $\mathcal{F}$ en $\mathbb{P}^2$ es **reversible** (respectivamente **Lotka-Volterra**) si $\mathcal{F}$ posee integral primera de tipo 3 y no de tipo 2 (respectivamente si $\mathcal{F}$ tiene una integral primera de tipo 2 pero no de tipo 3).

3. Foliaciones de codimensión 4 y de tipo hamiltoniano

En el teorema 2.4 vimos que en el caso de codimensión 4 el sistema queda simplificado a

$$Q_4 : z' = -iz + 4z^2 + 2z\bar{z} + C\bar{z}^2, \qquad |C| = 2,$$

mientras que en el caso hamiltoniano tenemos

$$\begin{aligned} H_1 &: z' = -iz + \bar{z}^2, \quad \text{o} \\ H &: z' = -iz + -z^2 + 2z\bar{z} + C\bar{z}^2, \ C \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Proposición 3.1. *Los casos hamiltoniano (H y H_1) y el de codimensión cuatro (Q_4) poseen integrales primeras cuyas fibras genéricas son curvas elípticas.*

Demostración. En el caso H_1 el campo cuadrático $z' = -iz + \bar{z}^2$ posee integral primera $f(x, y) = \dfrac{1 - 3(x^2 + y^2) + 2y(3x^2 + y^2)}{6}$. Luego, la foliación $\mathcal{F}$ inducida por H_1 en $\mathbb{P}^2$ posee una integral primera de la forma

$$F(X, Y, Z) = \frac{Z^3 - 3(X^2 + Y^2)Z + 2Y(3X^2 + Y^2)}{6Z^3}.$$

Dado $c \in \mathbb{C}$, sea F_c la fibra de F. Entonces se tiene

$$\operatorname{Sing}(F_c) = \left\{ \frac{\partial F_c}{\partial X} = \frac{\partial F_c}{\partial Y} = \frac{\partial F_c}{\partial Z} = 0 \right\} = \emptyset,$$

cuando $c \neq 1/6, 1/12$, es decir, en tal caso F_c es una curva regular. En particular F_c es de género uno.

Análogamente, en el caso H y el de codimensión 4 se prueba directamente que las fibras genéricas son regulares. $\square$

4. Clasificación de foliaciones reversibles

Comenzamos observando que toda foliación reversible $\mathcal{F}$ posee una integral primera holomorfa de la forma

$$f(x,y) = x^p(y^2 + P(x))^q, \tag{4.1}$$

donde $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}^*$ y $P(x) = ax^2 + bx + c$ satisface $b^2 - 4ac \neq 0$. En efecto, si $b^2 - 4ac = 0$, entonces podemos escribir $P(x) = (x-\lambda)^2$ y con ello $y^2 + P(x) = y^2 + (x-\lambda)^2 = (y - i(x-\lambda))(y + i(x-\lambda))$. Esto implicaría $f(x,y) = x^p(y - i(x-\lambda))^q(y + i(x-\lambda))^q$ con lo que $\mathcal{F}$ sería de tipo 2; una contradicción.

En esta sección probaremos el siguiente teorema.

Teorema 4.1. *Una foliación reversible es elíptica si y solo si bajo un cambio de coordenadas afines posee una integral primera de la forma*

$$\begin{array}{ll}
f = x^{-3}(y^2 + ax^2 + bx + c), & f = x(y^2 + ax^2 + bx + c), \\
f = x^{-3/2}(y^2 + ax^2 + bx + c), & f = x^{-1/2}(y^2 + ax^2 + bx + c), \\
f = x^{-4}(y^2 + ax^2 + bx + c), & f = x^{2}(y^2 + ax^2 + bx + c), \\
f = x^{-4/3}(y^2 + bx + c), & f = x^{-2/3}(y^2 + ax^2 + bx), \\
f = x^{-4/3}(y^2 + ax^2 + bx), & f = x^{-2/3}(y^2 + bx + c), \\
f = x^{-5/3}(y^2 + ax^2 + bx), & f = x^{-1/3}(y^2 + bx + c), \\
f = x^{-5/4}(y^2 + ax^2 + bx), & f = x^{-3/4}(y^2 + bx + c), \\
f = x^{-7/4}(y^2 + ax^2 + bx), & f = x^{-1/4}(y^2 + bx + c), \\
f = x^{-5/2}(y^2 + ax^2 + bx), & f = x^{-1/2}(y^2 + bx + c), \\
f = x^{-1+\frac{2}{k}}(y^2 + x),\ k \in \mathbb{Z} - 2\mathbb{Z}, & f = x^{-1+\frac{3}{k}}(y^2 + x),\ k \in \mathbb{Z} - 3\mathbb{Z}.
\end{array}$$

4.1. Resultados preliminares

Para simplificar los cálculos en el caso de las foliaciones reversibles, estudiemos por separado los casos $p > 0$ y $p < 0$.

Si $p < 0$, la integral primera toma la forma

$$f(x,y) = \frac{(y^2 + ax^2 + bx + c)^q}{x^{p_1}}, \; p_1 = -p.$$

Sea $C_t = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : (y^2 + ax^2 + bx + c)^q = tx^{p_1}\}$. Además si $t_1 \in \mathbb{C}^*$ satisface $t_1^q = t$, consideramos la curva

$$C_{t_1} = \{(X,Y) \in \mathbb{C}^2 : Y^2 + aX^{2q} + bX^q + c = t_1 X^{p_1}\}.$$

Lema 4.2. *Sea $\varphi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definida por $\varphi(X,Y) = (x,y) = (X^q, Y)$. Entonces $\varphi|_{C_{t_1}}$ es una biyección entre C_{t_1} y C_t.*

Demostración. Probaremos primero que el mapeo $\varphi|_{C_t}$ es inyectivo. Sean $(X_1, Y_1), (Y_1, Y_2) \in C_t$ sujetos a $\varphi(X_1, Y_1) = \varphi(X_2, Y_2)$. Entonces se tiene $X_1^q = X_2^q$, $Y_1 = Y_2$ y $X_1^{p_1} = t_1^{-1}(Y_1^2 + aX_1^{2q} + bX_1^q + c) = t_1^{-1}(Y_2^2 + aX_2^{2q} + bX_2^q + c) = X_2^{p_1}$. Por otro lado, la condición $\operatorname{mcd}(p_1, q) = 1$ implica que existen enteros $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $mp_1 + nq = 1$. Al tenerse $X_1^{p_1} = X_2^{p_1}$ y $X_1^q = X_2^q$, se pasa a

$$X_1 = X_1^{mp+nq} = X_2^{mp+nq} = X_2,$$

con lo que $\varphi|_{C_t}$ resulta inyectiva.

Ahora veamos que $\varphi|_{C_{t_1}}$ es sobreyectiva. Sean $(x,y) \in C_t$ y $X \in \mathbb{C}$ tales que $X^q = x$. Entonces se tiene $(X,y) \in C_{t_1}$ y $\varphi(X,y) = (x,y)$, es decir, $C_t \subseteq \varphi(C_{t_1})$. Recíprocamente, para $(x,y) = \varphi(X,Y) = (X^q, Y)$, donde $(X,Y) \in C_{t_1}$, tenemos

$$(y^2 + ax^2 + bx + c)^q = (Y^2 + aX^{2q} + bX^q + c)^q = t_1^q (X^{p_1})^q = tx^{p_1},$$

y así también $(x,y) \in C_t$. □

Sea $U = \{[X : Y : Z] \in \mathbb{P}^2 : Z \neq 0\}$ y $\phi : U \to \mathbb{C}^2$; $[X : Y : Z] \to (\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}) = (x,y)$. Pongamos

$$F(X,Y,Z) = \frac{(Y^2 + aX^2 + bXZ + cZ^2)^q}{Z^{2q-p_1} X^{p_1}},$$

para el homogeneizado de f.

Proposición 4.3. *Sea* $\Phi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ *dada por* $[X : Y : Z] \mapsto [X^q : YZ^{p-1} : Z^p]$*. Con la notación del lema 4.2 se cumple lo siguiente.*

- *El mapeo racional* F *satisface* $f \circ \phi = \phi \circ F$*.*
- *Sean* C_t^* *y* $C_{t_1}^*$ *las curvas homogeneizadas de* C_t *y* C_{t_1}*, respectivamente. Entonces* $\Phi|_{C_t^*} : C_t^* \dashrightarrow C_{t_1}^*$ *es un mapeo birracional.*
- *El género* $gén(C_t^*)$*,* $gén(C_{t_1}^*)$ *de* C_t^**,* $C_{t_1}^*$*, respectivamente, coincide.*

Demostración. El ítem *1* es trivial. Por el lema 4.2 tenemos que $\varphi : C_t \to C_{t_1}$ es biyectiva. Así $\Phi|_{C_t^*} : C_t^* \dashrightarrow C_{t_1}^*$ es un mapeo birracional, es decir, se cumple la segunda propiedad. Como el género es invariante por mapeos birracionales, se sigue la tercera parte. □

Por otro lado, si tenemos $p > 0$, la integral primera de $\mathcal{F}$, dada en (4.1), toma la forma

$$f(x, y) = x^p(y^2 + ax^2 + bx + c)^q.$$

Análogo al caso $p < 0$, dado $t \in \mathbb{C}^*$, consideremos la curva de nivel

$$C_t = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x^p(y^2 + ax^2 + bx + c)^q = t\}.$$

También, para $t_1 \in \mathbb{C}^*$ con $t_1^q = t$, consideramos

$$C_{t_1} = \{(X, Y) \in \mathbb{C}^2 : X^p(Y^2 + aX^{2q} + bX^q + c) = t_1\}.$$

Así como en el lema 4.2, tenemos el siguiente resultado trivial.

Lema 4.4. *Sea* $\varphi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$*, dado por* $\varphi(X, Y) = (X^q, Y)$*. Entonces*

$$\varphi|_{C_{t_1}} : C_{t_1} \to C_t$$

es un biholomorfismo. En particular se tiene $gén(C_t) = gén(C_{t_1})$*.* □

Gracias al lema 4.4, podemos considerar sin pérdida de generalidad $f(x, y) = x^p(y^2 + ax^{2q} + bx^q + c)$ y $C_t = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x^p(y^2 + ax^{2q} + bx^q + c) = t\}$. Además, cada vez que hagamos mención al género de C_t nos referiremos al género de la curva homogeneizada.

Estudiaremos por separado los siguientes casos:

Caso I: $a \neq 0$ *y* $c \neq 0$ (sección 4.2),

Caso II: $a \neq 0$ *y* $c = 0$ (sección 4.3),

Caso III: $a = 0$ *y* $c \neq 0$ (sección 4.4),

Caso IV: $a = 0$ *y* $c = 0$ (sección 4.5).

4.2. Caso I: $a \neq 0$ *y* $c \neq 0$

Como comentamos en la sección 4.1, trabajamos con $f(x, y) = x^p(y^2 + x^{2q} + bx^q + c)$. Además, dado que se tiene $a \neq 0$, por medio del cambio $(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{a}}, y\right)$, podemos suponer directamente

$$f(x, y) = x^p(y^2 + x^{2q} + bx^q + c).$$

Ahora consideraremos las posibilidades $p < 0$, $p > 0$ par y $p > 0$ impar.

4.2.1. Subcaso $p < 0$

Como vimos en la sección 4.1, es suficiente calcular el género de $C_t = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 + x^{2q} + bx^q + c = tx^{-p}\}$. Observemos que C_t es una curva hiperelíptica, esto es, cumple

$$C_t = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)\}.$$

En este caso, es sabido que el género de la superficie puede ser calculado explícitamente.

Teorema 4.5. *La superficie de Riemann S, asociada a una curva de ecuación*

$$y^2 = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n),$$

donde $a_i \in \mathbb{C}$ son distintos, tiene género $\left[\!\left[\frac{n-1}{2}\right]\!\right]$.

Demostración. Para la prueba ver [9], página 110. $\square$

En consecuencia, para calcular el género de C_t debemos hallar las multiplicidades de las raíces de $Q(x) = x^{2q} + bx^q - tx^{-p} + c$. Para ello ofrecemos el siguiente lema.

Lema 4.6. *Para t génerico, las raíces de $Q(x)$ son diferentes y no nulas.*

Demostración. Sea $c_1 \in \mathbb{C}$ una raíz de $Q(x)$. Entonces tenemos $Q(x) = x^{2q} - bx^q + tx^{-p} - c = (x - c_1)^m Q_1(x)$, con $Q_1(c_1) \neq 0$, para cierto $m \geq 0$. Como se tiene $Q(0) = -c \neq 0$ logramos $c_1 \neq 0$. Por otro lado, se tiene

$$Q(\bar{x} + c_1) = \bar{x}^m Q_1(\bar{x} + c_1) = \alpha\bar{x} + \dots, \tag{4.2}$$

donde $\alpha = -\binom{2q}{1} c_1^{2q-1} - b\binom{q}{1} c_1^q + \binom{-p}{1} t c_1^{-p}$. De la ecuación (4.2), dado que t es genérico, obtenemos $\alpha \neq 0$ y así concluimos que $\bar{x}^m Q_1(\bar{x} + c_1)$ es igual a $\alpha\bar{x}$ más términos de orden superior. Esto implica $m = 1$, es decir, que las raíces de $Q(x)$ son genéricamente diferentes y no nulas. $\square$

Lema 4.7. *Para t génerico, sea*

$$C_t = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = -x^{2q} - bx^q + tx^{-p} - c\}.$$

Entonces C_t tiene género 1 única y exclusivamente si (p, q) es igual a $(-3, 2), (-1, 2), (-4, 1)$ o $(-3, 1)$.

Demostración. Sea t genérico. Por el lema 4.6, las raíces de $Q(x) = -x^{2q} - bx^q + tx^{-p} - c$ son diferentes y no nulas, es decir, se tiene $Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_d)$, donde

$$d = \deg(Q) = \begin{cases} 2q, & \text{si } 2q \geq -p, \\ -p, & \text{si } -p > 2q. \end{cases} \tag{4.3}$$

En consecuencia, por el teorema 4.5, se tiene $\text{gén}(C_t) = 1$ si y solo si el grado de Q es 3 ó 4. De (4.3), se desprenden dos posibilidades.

Si $2q \geq -p$ entonces $\deg(Q) = 2q$. Luego, se tiene $\text{gén}(C_t) = 1$ si y solo si $2q = 3$ ó 4, $2q \geq -p$ y $\text{mcd}(p,q) = 1$. Así, en este caso, $(p,q) = (-1,2)$ o $(-3,2)$.

Si $-p > 2q$ tenemos $\text{gén}(C_t) = 1$ si y solo si $-p = 3$ ó 4, $-p > 2q$ y $\text{mcd}(p,q) = 1$. Por lo tanto, $(p,q) = (-3,1)$ o $(-4,1)$. □

Podemos resumir el cálculo anterior en el siguiente resultado.

Teorema 4.8. *Sea $\mathcal{F}$ una foliación en $\mathbb{P}^2$ con integral primera*

$$f(x,y) = \frac{(y^2+x^2+bx+c)^q}{x^{-p}}, \quad -p > 0 \ y \ c \neq 0.$$

Sea C_t una curva de nivel genérica de f. Entonces se tiene $\text{gén}(C_t) = 1$ si y solamente si la foliación $\mathcal{F}$ posee una integral de la forma

- $f = x^{-3}\big(y^2+x^2+bx+c\big)$,
- $f = x^{-4}\big(y^2+x^2+bx+c\big)$,
- $f = x^{-\frac{1}{2}}\big(y^2+x^2+bx+c\big)$,
- $f = x^{-\frac{3}{2}}\big(y^2+x^2+bx+c\big)$. □

4.2.2. Caso $p > 0$ y p par

Para p par, digamos $p = 2k$, con $k \in \mathbb{N}$ se tiene

$$x^p(y^2+x^{2q}+bx^q+c) - t = (x^k y)^2 + x^{p+2q} + bx^{p+q} + cx^p - t.$$

Para $\psi(x,y) = (x, x^k y)$ tenemos $\psi(C_t) = C_t'$, donde

$$C_t' = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 + x^{p+2q} + bx^{p+q} + cx^p = t\}.$$

En este caso $\psi : C_t \dashrightarrow C_t'$ es un mapeo birracional y se tiene $\text{gén}(C_t) = \text{gén}(C_t')$.

Lema 4.9. *Para t génerico, las raíces de $x^{p+2q} - bx^{p+q} - cx^p - t = 0$ son diferentes y no nulas (esto incluye el caso $c = 0$).*

Demostración. En la demostración del lema 4.6 vimos que $-x^{2q} - bx^q + tx^p - c$ posee raíces diferentes y no nulas para t genérico siempre que se cumpla $c \neq 0$. Pero como se tiene $Q(x) = x^{p+2q} - bx^{p+q} - cx^p - t$ ($t \in \mathbb{C}^*$, significa $t \neq 0$), el resultado se sigue sin necesidad de la hipótesis $c \neq 0$. $\square$

Lema 4.10. *Con la notación anterior la curva C_t' tiene género uno si y solo si se cumple $(p, q) = (2, 1)$.*

Demostración. Sea $Q(x) = x^{p+2q} + bx^{p+q} + cx^p - t$. Por el lema 4.6, el polinomio $Q(x)$ tiene raíces distintas y no nulas para t genérico. Luego, se tendrá $\text{gén}(C_t') = 1$ si y solamente si $2q+p = 3$ o $2q+p = 4$. Como p es par, ello solo es posible si $2q + p = 4$ y así obtenemos $q = 1$ y $p = 2$. $\square$

4.2.3. Caso $p > 0$ y p impar

En este caso se tiene $p = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, y con ello obtenemos

$$x^p\big(y^2 + x^{2q} + bx^q + c\big) - t = \left(\frac{\big(x^{(p+1)/2}y\big)^2}{x^{p+1}} + x^{2q} + bx^q + c\right)x^p - t = 0.$$

Con $\psi(x, y) = (x, x^{(p+1)/2}y)$ se tiene $\psi(C_t) = C_t'$, donde $C_t' = \{(x_1, y_1) \in \mathbb{C}^2 : y_1^2 + x_1^{2q+p+1} + bx_1^{p+q+1} + cx_1^{p+1} = tx_1\}$. Nuevamente $\psi : C_t^* \dashrightarrow C_t'$ es un mapa birracional y se cumple $\text{gén}(C_t) = \text{gén}(C_t')$.

Lema 4.11. *Para t genérico, la curva C_t' tiene género uno si y solamente si $(p, q) = (1, 1)$.*

Demostración. Por el lema 4.9 tenemos que para t genérico la ecuación $x_1^{2q+p} + bx_1^{q+p} + cx_1^p - t$ tiene raíces distintas y no nulas. Luego se tiene $\text{gén}(C_t') = 1$ si y solo si $2q + p = 2$ o $2q + p = 3$. Como p es impar y se cumple $p > 0$, $q > 0$, ello puede darse exclusivamente con $2q + p = 3$, cuya única solución positiva es $(p, q) = (1, 1)$. $\square$

Observación 4.12. En los lemas 4.9 y 4.11 no hemos usado el dato $c \neq 0$. Luego, los resultados aplican también con $c = 0$. Esto es, si

$$C : y^2 = -x^{p+2q} - bx^{p+q} + t,\ \ p, q > 0,$$

cuando p, q son relativamente primos, para $t \in \mathbb{C}^*$ genérico se tiene gén$(C) = 1$ si y solamente si $(p, q) = (1, 1)$ o $(1, 2)$.

Lema 4.13. *Sea $p > 0$. Para t génerico consideremos*

$$C_t = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = -x^{2q} - bx^q + tx^p - c\}.$$

Entonces C_t tiene género uno si y solamente si la foliación $\mathcal{F}$ posee una integral de la forma

- $f = x\big(y^2 + x^2 + bx + c\big)$ *o*
- $f = x^2\big(y^2 + x^2 + bx + c\big)$. □

4.3. Caso II: $a \neq 0$ y $c = 0$

Al tenerse $a \neq 0$ podemos suponer sin pérdida de generalidad que la integral primera es de la forma

$$x^p(y^2 + x^{2q} + bx^q), \quad p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}. \tag{4.4}$$

Nuevamente, estudiaremos los casos $p > 0$, $p < 0$ par y $p < 0$ impar por separado.

4.3.1. Caso $p > 0$

Por la observación 4.12, la curva C_t es elíptica si y solamente si se tiene $(p, q) = (1, 1)$ o $(2, 1)$.

4.3.2. Caso $p < 0$ y p par

Sea $-p = 2k$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Escribamos $C_t = \{(x, y) : y^2 + ax^{2q} + bx^q = tx^{-p}\}$. Para calcular gén$(C_t)$ necesitamos establecer antes tres lemas.

Lema 4.14. *Si p es par y está sujeto a $-p \leq q$, entonces se tiene gén$(C_t) = 1$ si y solo si $(p, q) = (-2, 3)$.*

Demostración. Sea $\psi(x,y) = (x, x^k y)$. Es fácil probar que para t genérico $\psi : C'_t \to C_t$ es un biholomorfismo, donde $C'_t = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 + x^{p+2q} + bx^{p+q} = t\}$; lo cual lleva a gén$(C'_t) =$ gén(C_t). En consecuencia las hipótesis del lema implican que $\deg(C') = p + 2q$ es par y que se satisface $q \leq p + 2q$. De esta manera se tiene gén$(C_t) = 1$ si y solo si se cumple $p + 2q = 4$, $q \leq p + 2q$, para p, q relativamente primos. Esto es posible solo con $(p,q) = (-2,3)$. □

Lema 4.15. *Para $-p \geq 2q$, con p par, se tiene gén$(C_t) = 1$ si y solamente si $(p,q) = (-4,1)$.*

Demostración. Sea $\psi(x,y) = \big(\frac{1}{x}, y\big)$ y

$$C'_t = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 + x^{-2q-p} + bx^{-q-p} = t\}.$$

Entonces $\psi|_{C_t} : C_t \dashrightarrow C'_t$ es un mapeo birracional; lo cual implica gén$(C_t) =$ gén(C'_t). De esta manera se tiene gén$(C_t) = 1$ si y solo si $-p - q = 3$ o $-p - q = 4$, con $p < 0$ par y $\mathrm{mcd}(p,q) = 1$. Por lo tanto se obtiene $(p,q) = (-4,1)$. □

Lema 4.16. *Si se cumple $q < -p < 2q$, con p par, entonces se tiene gén$(C_t) = 1$ si y solo si $(p,q) = (-4,3)$.*

Demostración. En este caso, consideremos los mapeos racionales

$$\psi(x,y) = (\frac{1}{x}, y) \quad \text{y} \quad \phi(x,y) = (x^q, y).$$

Para

$$C'_t = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 + x^q + b = tx^{-p-q}\},$$

se tiene que $\phi \circ \psi|_{C'_t} : C'_t \dashrightarrow C_t$ es un mapeo birracional. Al cumplirse gén$(C_t) =$ gén(C'_t) se tendrá gén$(C_t) = 1$ si y solo si $q = 3$ o $q = 4$, con $-q < p = 2k < 2q$ y $\mathrm{mcd}(p,q) = 1$. Así $(p,q) = (-4,3)$. □

Podemos poner toda esta información dentro de un único resultado.

Proposición 4.17. *Sea* $C_t = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = -x^{2q} - bx^q + tx^p - c\}$. *Entonces para* t *genérico la curva* C_t *tiene género uno si y solamente si la foliación* $\mathcal{F}$ *posee una integral de la forma*

(e) $f = x\big(y^2 + x^2 + bx + c\big)$,

(f) $f = x^2\big(y^2 + x^2 + bx + c\big)$,

(g) $f = x^{-2}\big(y^2 + x^2 + bx + c\big)^3$,

(h) $f = x^{-4}\big(y^2 + x^2 + bx + c\big)$,

(i) $f = x^{-4}\big(y^2 + x^2 + bx + c\big)^3$. □

4.3.3. Caso $p < 0$ y p impar

Pongamos $p = 2k - 1$, donde $k \leq 0$ es entero. Vía la transformación $\psi(x,y) = (x, x^{2k}y)$ la curva C_t resulta birracional a $\{(x,y) : y^2 = -x(x^{2q+p} + bx^{p+q} - t)\}$. Por un proceso rutinario obtenemos que los únicos pares posibles para obtener género uno son $(p,q) = (-1,2), (-3,1), (-5,2), (-5,3), (-5,4), (-7,4)$.

4.4. Caso III: $a = 0$ y $c \neq 0$

En este caso la integral primera es de la forma

$$f(x,y) = x^p(y^2 + bx + c)^q, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}.$$

Al poner $\psi(x,y) = (\frac{1}{x}, \frac{y}{x})$ el mapeo $\psi|_{C_t}$ resulta birracional sobre su imagen. Luego, podemos suponer que se tiene $C_t = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : \psi(x,y) = x^{-p-2}(y^2 + bx + cx^2)^q = t\}$. En este caso obtenemos la siguiente información.

Proposición 4.18. *La foliación* $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x^p(y^2+bx+c)^q)$ *es elíptica única y exclusivamente para* $(p,q) = (1,1)$, $(-3,1)$, $(-3,2)$, $(-1,2)$, $(2,1)$, $(-4,1)$, $(1,2)$, $(-4,3)$ *o* $(-3,4)$. □

4.5. Caso IV: $a = 0$ y $c = 0$

Al tenerse $b^2 - 4ac \neq 0$ se infiere $b \neq 0$. Luego, podemos considerar que la integral primera es de la forma

$$f(x, y) = x^p(y^2 + bx^q).$$

Además, para t genérico se tendrá $C_t = \{x^p\big(y^2 + bx^q\big) = t\}$.

Lema 4.19. *Si $p > 0$ entonces se tiene gén$(C_t) = 1$ si y solamente si*

$$(p, q) = \begin{cases} (1, 1), (1, 2) & \textit{cuando } p \textit{ es impar,} \\ (2, 1) & \textit{cuando } p \textit{ es par.} \end{cases}$$

Demostración. Si p es par, tenemos

$$x^p(y^2 + bx^q) - t = (x^{\frac{p}{2}}y)^2 + bx^{p+q} - t.$$

Por medio de la aplicación birracional $(x, y) \mapsto (x, x^{p/2}y)$, podemos suponer sin pérdida generalidad que trabajamos con

$$C_t = \{(x, y) : y^2 = -bx^{p+q} + t\}. \tag{4.5}$$

De esta manera el género será uno si y solo si se tiene $p+q = 3$ o $p+q = 4$, con p, q relativamente primos. Esto solo es posible con $(p, q) = (2, 1)$.

Si p es impar, resulta que C_t es birracional a

$$\{(x, y) : y^2 = -x\big(bx^{p+q} + t\big)\}. \tag{4.6}$$

En consecuencia se tendrá gén$(C_t) = 1$ si y solo si $p + q + 1 = 3$ o $p + q + 1 = 4$, con p, q relativamente primos En este caso, tenemos solución en $(p, q) = (1, 1), (1, 2)$. □

Lema 4.20. *Si $p < 0$ y $p + q \geq 0$, entonces gén$(C_t) = 1$ si y solamente si se tiene $-p \in \mathbb{N} - 2\mathbb{N}$ o $-p \in \mathbb{N} - 3\mathbb{N}$.*

Demostración. Si p es par, entonces C_t es birracional a $C_t = \{y^2 = -bx^{p+q} + t\}$. Luego, $\text{gén}(C_t) = 1$ si y solo si $p + q = 3$ ó 4, con p par y $\text{mcd}(p, q) = 1$. Es decir, $q \in \mathbb{N}$ y $-p \in \mathbb{N} - 3\mathbb{N}$ o $-p \in \mathbb{N} - 4\mathbb{N}$.

Por otro lado, si p es impar, C_t es birracional a $C_t = \{y^2 = -x\big(bx^{p+q} + t\big)\}$. Así, se tiene $\text{gén}(C_t) = 1$ si y solo si $p + q = 3$ ó 4, con p par y $\text{mcd}(p, q) = 1$. Luego, $q \in \mathbb{N}$ y $-p \in \mathbb{N} - 2\mathbb{N}$ o $-p \in \mathbb{N} - 3\mathbb{N}$. $\square$

Lema 4.21. *Si $p < 0$ y $p + q \leq 0$, entonces se tiene $\text{gén}(C_t) = 1$ si y solamente si $-p \in \mathbb{N} - 3\mathbb{N}, -p \in \mathbb{N} - 4\mathbb{N}$ con p par, $-p \in \mathbb{N} - 2\mathbb{N}$ o $-p \in \mathbb{N} - 3\mathbb{N}$ con p impar y $q \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Si p es par, tenemos

$$x^p(y^2 + bx^q) - t = (x^{\frac{p}{2}}y)^2 + bx^{p+q} - t.$$

Luego, por medio de los mapeos birracionales $(x, y) \mapsto (x, x^{\frac{p}{2}})$ y $(x, y) \mapsto (\frac{1}{x}, y)$, la curva C_t es birracional a

$$y^2 = -bx^{-p-q} + t.$$

Por lo tanto, se satisface $\text{gén}(C_t) = 1$ si y solo si $-p - q = 3$ ó 4 con p par y $\text{mcd}(p, q) = 1$, lo cual es posible si y solo si $-p \in \mathbb{N} - 3\mathbb{N}$ o $-p \in \mathbb{N} - 4\mathbb{N}$.

Por otro lado, si p es impar, la curva C_t es birracional a $C_t = \{y^2 = -x\big(bx^{p+q} + t\big)\}$. Debido a ello se tiene $\text{gén}(C_t) = 1$ si y solo si $p + q = 3$ o 4, con p par y $\text{mcd}(p, q) = 1$. Por lo tanto, $q \in \mathbb{N}$ y $-p \in \mathbb{N} - 2\mathbb{N}$ o $-p \in \mathbb{N} - 3\mathbb{N}$. $\square$

Puesto todo junto tenemos el siguiente resumen.

Proposición 4.22. *La foliación $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x^p(y^2 + bx^q))$ es elíptica si y solamente si $(p, q) = (1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ o $-p \in \mathbb{N} - 3\mathbb{N}$ o $-p \in \mathbb{N} - 4\mathbb{N}$ con p par o $-p \in \mathbb{N} - 2\mathbb{N}$ o $-p \in \mathbb{N} - 3\mathbb{N}$ con p impar y $q \in \mathbb{N}$.* $\square$

5. Clasificación de foliaciones Lotka-Volterra

En esta sección estudiaremos las foliaciones que poseen integrales primeras holomorfas de la forma

$$f(x,y) = x^p y^q (ax+by+c)^r, \tag{5.1}$$

donde $p, q \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}$ y $a, b, c \in \mathbb{R}$. El teorema principal de esta sección es el siguiente.

Teorema 5.1. *Una foliación Lotka-Volterra bajo un cambio de coordenadas afines es elíptica si y solamente si posee una integral primera de la forma*

$f = x^3y^{1+3n}(1+y)^{1+3m}$, $f = x^3y^{2+3n}(1+y)^{2+3m}$,
$f = x^4y^{1+4n}(1+y)^{1+4m}$, $f = x^4y^{3+4n}(1+y)^{3+4m}$,
$f = x^6y^{1+6n}(1+y)^{1+5m,}$ $f = x^6y^{4+6n}(1+y)^{4+6m}$,
$f = x^4y^{2(1+2u)}(1+y)^r, r \in \mathbb{Z} - 2\mathbb{Z}$, $f = x^6y^{3(1+2u)}(1+y)^r, r \in \mathbb{Z} - 3\mathbb{Z}$,
$f = xy(1-x-y)$, $f = xy(1-x-y)^2$,
$f = x^2y(1-x-y)^3$, $f = x^2y(1-x-y)^4$,
$f = x^3y(1-x-y)^4$, $f = x^3y(1-x-y)^6$,
$f = x^4y(1-x-y)^6$, $f = x^2y^3(1-x-y)$,
$f = x^2y^4(1-x-y)$, $f = x^3y^4(1-x-y)$,
$f = x^3y^6(1-x-y)$, $f = x^4y^6(1-x-y)$,
$f = xy^2(1-x-y)^2$, $f = x^4y^2(1-x-y)^3$,
$f = xy^3(1-x-y)^4$, $f = x^6y^3(1-x-y)^4$,
$f = x^3y^2(1-x-y)^2$, $f = xy^3(1-x-y)^2$,
$f = x^4y^3(1-x-y)^2$, $f = xy^4(1-x-y)^3$,
$f = x^6y^4(1-x-y)^3$, $f = x^{-3}y^2(1-x-y)^2$,
$f = xy^2(1-x-y)^3$, $f = x^{-2}y(1-x-y)^3$,
$f = x^{-2}y^3(1-x-y)$, $f = x^{-1}y^2(1-x-y)^2$.

Es fácil comprobar que para $a = b = 0$ la fibra genérica de f posee género 0. Debido a ello, basta estudiar por separado algunos casos.

Caso I: $c \neq 0,\ a \neq 0$ *y* $b \neq 0$ (sección 5.1),

Caso II: $c \neq 0,\ a = 0$ *y* $b \neq 0$ (sección 5.2),

Caso III: $c = 0$ (sección 5.3).

5.1. Caso I: $a \neq 0,\ b \neq 0$ y $c \neq 0$

El cambio de variables $(x, y) \mapsto \left(\frac{-cx}{a}, \frac{-cy}{b} \right)$ en (5.1) permite reducir el problema a $-b = -c = a = 1$, de modo que f se simplifica a

$$f(x, y) = x^p y^q (1 - x - y)^r,\ \ p, q \in \mathbb{Z}^*, \quad r \in \mathbb{N}. \tag{5.2}$$

Lema 5.2. *Dado f como en* (5.1)*, en lo que atañe a curvas de género uno, es suficiente estudiar los casos*

- $p > 0, q > 0$.
- $p < 0,\ q > 0$ *y* $p + q + r > 0$.

Demostración. Si en (5.1) tenemos $p = 0$ o $q = 0$, entonces la fibra genérica de f posee género 0. Si $p > 0$ y $q > 0$, caemos en el primer caso. Supongamos se tenga $p < 0$ y $q < 0$. Entonces $\frac{1}{f} = x^{-p} y^{-q} (1 - x - y)^{-r}$ es también una integral primera. Por medio del cambio de variable $(x, y) \mapsto (x, 1 - x - y)$ llegamos al caso $p > 0$ y $q < 0$. Este caso podemos reducirlo, por medio del mapa $(x, y) \mapsto (y, x)$ al caso $p < 0$ y $q > 0$. Consideremos entonces las tres posibilidades.

Si $p + q + r > 0$, nos encontramos en el segundo caso, y no hay nada que añadir.

Si $p + q + r < 0$, efectuamos el cambio $(x, y) \mapsto \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x} \right)$ para obtener una integral primera de la forma

$$x^{-(p+q+r)} y^q (1 - x - y)^r. \tag{5.3}$$

Es decir, nos encontramos de vuelta en el primer caso.

Si $p+q+r=0$, entonces se cumple $r=-q-p$ y tendremos

$$f(x,y)=\left(\frac{x}{1-x-y}\right)^p\left(\frac{y}{1-x-y}\right)^q=x_1^p y_1^q,$$

con $x_1=\dfrac{x}{1-x-y}$ e $y_1=\dfrac{y}{1-x-y}$. Luego la curva $C=\{(x,y)\in\mathbb{C}^2 : x^p y^q(1-x-y)^r=t\}$ es birracionalmente equivalente a $C_1=\{(x,y) : x^p y^q=t\}$. Por lo tanto, no es necesario estudiar este caso pues la integral primera posee fibra genérica de género 0, lo que escapa a nuestro interés. $\square$

Observación 5.3. En el primer caso del lema anterior, por un cambio de variable afín, podemos asumir $0<p\leq q\leq r$. En efecto, basta usar los cambios de variables $(x,y)\mapsto(x,1-x-y)$ o $(x,y)\mapsto(1-x-y,y)$.

Proposición 5.4. *Sea $C_{p,q,r}=\{x^p y^q(1-x-y)^r=1\}$, con $\operatorname{mcd}(p,q,r)=1$ y sujetos a $0<p\leq q\leq r$. Entonces $C_{p,q,r}$ es de género 1 si y solo si se tiene $(p,q,r)\in\{(1,1,1),(1,1,2),(1,2,3)\}$.*

Demostración. Sea $f(x,y)=x^p y^q(1-x-y)^r$. Entonces df induce una foliación $\mathcal{F}$ que en coordenadas afines viene dada por la 1-forma holomorfa

$$\omega=y(p-py-(p+r)x)dx+x(q-qx-(q+r)y)dy. \tag{5.4}$$

Además, $\mathcal{F}$ en las coordenadas (u,v) y (s,t), donde $u=\frac{1}{x}, v=\frac{v}{u}, s=\frac{x}{y}$ y $t=\frac{1}{y}$, queda definida por las 1-formas holomorfas

$$\omega_1=-v(-(p+r+q)+(p+q)u-(p+q+r)v)du+u(-q+qu-(q+r)v)dv, \tag{5.5}$$

y

$$\omega_2=s(-p+ps-(p+r)t)dt-t\big(-(p+q+r)+s(p-q)-(p+q+r)t\big)ds,$$

respectivamente. Luego $\mathcal{F}$ es de grado 2 pues $L_\infty=\{Z=0\}$ no es $\mathcal{F}$-invariante. Además, las singularidades de la foliación están dados por el conjunto $\mathrm{Sing}(\mathcal{F}) = \{A_0 = [0:0:1], A_1 = [0:1:1], A_2 = [1:0:1], A_3 = [p:q:p+q+r], A_4 = [1:0:0], A_5 = [1:-1:0], A_6 = [1:1:0], A_7 = \{[0:1:0]\}$.

Queda claro que $C = C_{p,q,r}$ es de grado $p+q+r$ y satisface $\mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \cap C = \{A_4, A_5, A_6\}$. Para calcular el género recurrimos al teorema 2.12, es decir ponemos

$$2 - 2\,\mathrm{gén}(C) = \sum_{i=4}^{6} i(\mathcal{F}, B_{A_i}) - (p+q+r)(2-1), \tag{5.6}$$

donde B_{A_i} son las ramas locales de C en A_i, con $i = 4, 5, 6$.

Calculemos explícitamente $m(\mathcal{F}, B_{A_4})$, las demás multiplicidades son análogas. En coordenadas (u, v, U_1), tenemos $A_4 = (0,0)$, mientras la curva C está dada por

$$v^q(1 - u + vu)^r = u^{p+q+r}.$$

Por otro lado, de la ecuación (5.5), la parte lineal del campo asociado en la singularidad A_4 posee autovalores $(q, p+r)$. Pongamos $\lambda = \dfrac{q}{p+q+r}$. Tenemos dos posibilidades.

Si $\lambda \notin \mathbb{N} \cup \frac{1}{\mathbb{N}}$, entonces por el teorema de la forma normal de Poincaré (ver [3]) existe un biholomorfismo $\varphi : (U,0) \to (V,0)$, $(u,v) \mapsto (x,y)$ con $\varphi(0) = 0$ que satisface $\varphi^*(\omega_1) = (p+q+r)vdu - qudv$.

Si $\lambda = \dfrac{q}{p+q+r} \in \mathbb{N} \cup \dfrac{1}{\mathbb{N}}$, por la forma normal de Dulac (ver [3]), existe un biholomorfismo $\varphi : (U,0) \to (V,0)$, $(u,v) \mapsto (x,y)$ con $\phi(0) = 0$ que satisface $\phi^*(\omega_1) = vdu - (\lambda u + \epsilon v^n)dv$, donde $n = \lambda$ o $\lambda^{-1} \in \mathbb{N}$ y $\epsilon \in \{0,1\}$. Como $\mathcal{F}$ admite integral primera, se tiene $\epsilon = 0$.

En ambos casos, existe un biholomorfismo ϕ que satisface

$$\omega_1 = (p+q+r)vdu - qudv \quad \text{y} \quad C = \{v^q - u^{p+q+r} = 0\}.$$

Como $i(\mathcal{F}, B_{A_4})$ es invariante por biholomorfismos podemos trabajar en estas coordenadas. Ahora, como se tiene

$$v^q - u^{p+q+r} = \prod_{k=0}^{m-1} (v^{\frac{q}{m}} - e^{2\pi i \frac{k}{m}} u^{\frac{p+q+r}{m}}),$$

donde $m = \text{mcd}(p+q+r, q) = \text{mcd}(p+r, q)$, se concluye que $B_k = \{v^{\frac{q}{m}} - e^{2\pi i \frac{k}{m}} u^{\frac{p+q+r}{m}} = 0\}$, $i = 0, \ldots, m-1$, son las ramas locales de C que pasan por A_4. Cada rama B_k de C en A_4 está parametrizada localmente por $(t^{\frac{q}{m}}, -e^{2\pi i \frac{k}{m}} t^{\frac{p+r}{m}})$, de donde se sigue la igualdad

$$i(\mathcal{F}, B_k) = 1, \text{ para } k = 0, \cdots, m-1.$$

Análogamente, existen $n = \text{mcd}(p, q+r)$ ramas locales $B_j^{'}$ en A_5 tales que $i(\mathcal{F}, B_j^{'}) = 1$, y existen $l = \text{mcd}(r, p+q)$ ramas locales $B_j^{''}$, tales que $i(\mathcal{F}, B_j^{'}) = 1$. Al poner todo junto llegamos a

$$\sum_{i=4}^{6} i(\mathcal{F}, B_{A_i}) = m + n + l,$$

Al sustituir en (5.6) logramos

$$2 - 2\,\text{gén}(C) = m + n + l - (p + q + r). \tag{5.7}$$

En consecuencia, C es elíptica si y solamente si se cumple

$$p + q + r = m + n + l. \tag{5.8}$$

Veamos para qué valores se satisface (5.8). Como $m = \text{mcd}(q, r + p) \leq q$, $n = \text{mcd}(p, r+q) \leq p$ y $l = \text{mcd}(r, p+q) \leq r$, se tiene (5.8) si y solo si $\text{mcd}(q, p+r) = q, \text{mcd}(p, q+r) = p$ y $\text{mcd}(r, p+q) = r$.

A fin de tener $\text{mcd}(q, p+r) = q$, $\text{mcd}(p, q+r) = p$ y $\text{mcd}(r, p+q) = r$ deben existir $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$ sujetos a

$$r + p = \alpha q, \qquad r + q = \beta p, \qquad p + q = \gamma r.$$

De estas igualdades obtenemos

$$(\alpha + 1)q = (\beta + 1)p, \tag{5.9}$$

$$(\beta + 1)p = (\gamma + 1)r, \tag{5.10}$$

$$(\gamma\beta - 1)p = (\gamma + 1)q. \tag{5.11}$$

Como se tiene $p \leq q \leq r$, de (5.9) y (5.10) concluimos $\beta \geq \alpha \geq \gamma$. Por otro lado, de (5.9) y (5.11) obtenemos

$$\frac{q}{p} = \frac{\beta + 1}{\alpha + 1} = \frac{\gamma\beta - 1}{\gamma + 1},$$

de donde se logra

$$\alpha\gamma\beta = 2 + \alpha + \beta + \gamma, \quad \beta \geq \alpha \geq \gamma. \tag{5.12}$$

Al final tenemos diversas posibilidades.

Si $\alpha = \beta$, la ecuación (5.12) se reduce a $\beta^2\gamma = 2 + 2\beta + \gamma$, lo cual es equivalente a $2 = \gamma(\beta - 1)$. Esto solo es posible con $(\beta, \gamma) = (3, 1)$ o $(2, 2)$, de donde obtenemos dos ternas $(\alpha, \beta, \gamma) = (3, 3, 1)$ y $(2, 2, 2)$. Luego, de las ecuaciones (5.9), (5.10) y (5.11) y de los valores obtenidos para (α, β, γ), se logra $(p, q, r) = (1, 1, 2)$ o $(1, 1, 1)$.

Análogamente, si $\alpha = \gamma$, entonces $\gamma^2\beta = 2 + 2\gamma + \beta$ equivale a $2 = \beta(\gamma - 1)$. Como se tiene $\gamma \leq \beta$ se sigue $\gamma = \beta = 2$, y así $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 2, 2)$ y $(p, q, r) = (1, 1, 1)$.

Si $\beta > \alpha > \gamma$, de (5.12) obtenemos

$$\alpha\beta\gamma < 2 + 3\beta,$$

que equivale a $\beta(\gamma\alpha - 3) < 2$ Luego, si $\alpha\gamma > 3$, la ecuación anterior implica que $\beta = 1$, una contradicción. Por lo tanto, $\alpha\gamma \leq 3$ que, junto con $\gamma < \alpha$, implica $\gamma = 1$ y $\alpha = 2$ o 3. Sin embargo, $\alpha = 3$ y $\gamma = 1$ en (5.12) implican $\beta = 3$, otra contradicción. Entonces $\alpha = 2$, $\gamma = 1$ y, por (5.12), $\beta = 5$. Así obtenemos la terna $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 2, 5)$ y $(p, q, r) = (1, 2, 3)$. $\square$

Ahora estudiaremos en detalle el segundo caso del lema 5.2.

Proposición 5.5. *Sea* $C_{p,q,r} = \{y^q(1 - x - y)^r = x^p\}$*, donde* $p > 0$*,* $q > 0$*,* $-p+q+r > 0$ *y* $\mathrm{mcd}(p, q, r) = 1$*. Entonces se tiene* $\text{gén}(C_{p,q,r}) = 1$

si y solamente si (p, q, r) *pertenece a la siguiente tabla*

p	q	r	p	q	r	p	q	r	p	q	r
2	1	3	2	3	1	1	2	2	3	2	2
2	1	4	2	4	1	1	2	3	1	3	2
3	1	4	3	4	1	4	2	3	4	3	2
3	1	6	3	6	1	1	3	4	1	4	3
4	1	6	4	6	1	6	3	4	6	4	3

Demostración. Sea $C = \{y^q(1-x-y)^r = x^p\}$ y $f(x, y) = \dfrac{y^q(1-x-y)^r}{x^p}$. Entonces df induce una foliación $\mathcal{F}$ dada por las formas

$$\omega = y(-p + py - (-p + r)x)dx + x(q - qx - (q + r)y)dy, \tag{5.13}$$

$$\omega_1 = -v(-(p + r + q) + (p + q)u - (p + q + r)v)du + \tag{5.14}$$
$$u(-q + qu - (q + r)v)dv,$$

en las coordenadas (x, y) y (u, v), respectivamente. Luego $\deg(\mathcal{F}) = 2$ y $\mathrm{Sing}(\mathcal{F}) = \{A_0 = [0 : 0 : 1], A_1 = [0 : 1 : 1], A_2 = [1 : 0 : 1], A_3 = [-p : q : -p + q + r], A_4 = [1 : 0 : 0], A_5 = [1 : -1 : 0], A_6 = [1 : 1 : 0], A_7 = [1 : 0 : 0]\}$. Por su parte, la curva C tiene grado $q + r$ y cumple $\mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \cap C = \{A_0, A_1, A_4, A_6\}$.

Calculemos $i(\mathcal{F}, B_{A_0})$, donde B_{A_0} es una rama local de C en A_0. Por el mismo argumento de la proposición 5.4, podemos suponer, sin perdida de generalidad, que se tiene

$$\omega = -pydx + qxdy \quad \text{y} \quad C_{p,q,r} = \{y^q - x^p = 0\}.$$

Sea $m = \mathrm{mcd}(p, q)$. Dada la factorización

$$y^q - x^p = \prod_{k=0}^{m-1} (y^{\frac{q}{m}} - e^{2\pi i \frac{k}{m}} x^{\frac{p}{m}}),$$

se tiene que en A_0 existen m ramas $B_k = \left\{ y^{\frac{q}{m}} - e^{2\pi i \frac{k}{m}} x^{\frac{p}{m}} = 0 \right\}$ tales que $i(\mathcal{F}, B) = 1$. Análogamente, en A_1 (resp. A_4 y A_6), existen $n =$

$\mathrm{mcd}(p, r)$ (respectivamente $l = \mathrm{mcd}(r, -p+q+r)$ y $k = \mathrm{mcd}(q, -p+q+r)$) ramas locales B tales que $i(\mathcal{F}, B) = 1$. Al reemplazar en (5.6) se llega a

$$2 - 2\,\text{gén}(C) = m + n + l + k - (q + r).$$

De este modo $C_{p,q,r}$ es una curva elíptica si y solamente si se tiene

$$q + r = m + n + l + k. \tag{5.15}$$

La proposición se sigue en virtud de [1, Lemma 4.8]. □

5.2. Caso II: $a = 0, b \neq 0$ y $c \neq 0$

Al tenerse $bc \neq 0$, podemos suponer que la integral primera tiene la forma $f(x, y) = x^p y^q (\frac{b}{c} y + 1)^r$. Tras un cambio de variable $y \mapsto \dfrac{c}{b} y$, podemos suponer además $b = c = 1$ y

$$f(x, y) = x^p y^q (y + 1)^r. \tag{5.16}$$

Lema 5.6. *Con las notación anterior, por medio de un cambio birracional de variables, podemos suponer $p > 0$ y $q > 0$.*

Demostración. Si $p < 0$, hacemos el cambio birracional $(x, y) \mapsto (1/x, y)$. Luego se tendrá $f(x, y) = x^{-p} y^q (y + 1)^r$ y así todo se reduce a $p > 0$. Si $q < 0$ se tiene

$$x^p y^q (y + 1)^r = (xy^{-n})^p y^{q+np} (y + 1)^r, \tag{5.17}$$

para todo n. En particular existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $q + n_0 p > 0$. Luego, por medio del mapa $(x, y) \mapsto (xy^{-n_0}, y)$ podemos reducir todo a $q > 0$. □

Esto naturalmente deriva en la siguiente proposición.

Proposición 5.7. *La curva algebraica*

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x^p y^q (1 + y)^r = 1\},$$

con $p, q, r \in \mathbb{N}$ *y* $\text{mcd}(p, q, r) = 1$*, es elíptica si y solamente si bajo permutaciones de* $\{y = o\}$ *y* $\{y + 1 = 0\}$ *se encuentra en la siguiente lista:*

$$x^3 y^{1+3n}(1+y)^{1+3m} = 1, \qquad x^3 y^{2+3n}(1+y)^{2+3m} = 1,$$
$$x^4 y^{1+4n}(1+y)^{1+4m} = 1, \qquad x^4 y^{3+4n}(1+y)^{3+4m} = 1,$$
$$x^6 y^{1+6n}(1+y)^{1+5m} = 1, \qquad x^6 y^{4+6n}(1+y)^{4+6m} = 1,$$
$$x^4 y^{2(1+2u)}(1+y)^r = 1,\ r \in \mathbb{Z}^* \setminus 2\mathbb{Z},$$
$$x^6 y^{3(1+2u)}(1+y)^r = 1,\ r \in \mathbb{Z}^* \setminus 3\mathbb{Z}.$$

Demostración. Como trabajamos con $t^* \in \mathbb{C}$ genérico, podemos reducir todo a $t = 1$. Sea entonces $C = C_{p,q,r} = \{x^p y^q (1 - x - y)^r = 1\}$ y $f = x^p y^q (1 - x - y)^r$. Tal como en la proposición 5.5, df induce una foliación $\mathcal{F}$ en $\mathbb{P}^2$ que en las coordenadas (x, y), (u, v) y (s, t) viene dada por

$$\omega = \frac{df}{x^{p-1} y^{q-1} (y+1)^{r-1}} = py(1+y)dx + x(q + (q+r)y)dy \qquad (5.18)$$

$$= u\big(qu + (q+r)v\big)dv - v\big((p+q)u + (p+q+r)v\big)du, \qquad (5.19)$$

$$= ps(s+1)dt - t\big(p+q+r+s(p+q)\big)ds, \qquad (5.20)$$

respectivamente. De esta manera se tiene $\deg(\mathcal{F}) = 2$, pues L_∞ no es $\mathcal{F}$-invariante. Además, el grado de $C_{p,q,r}$ es $p + q + r$ y $\text{Sing}(\mathcal{F}) \cap C = \{A_3 = [1 : 0 : 0], A_4 = [0 : 1 : 0]\}$. Así, por el teorema 2.12 tenemos

$$2 - 2\,\text{gén}(C) = \sum_{B_{A_3}} m(\mathcal{F}, B_{A_3}) + \sum_{B_{A_4}} m(\mathcal{F}, B_{A_4}) - (p+q+r)(2-1), \quad (5.21)$$

donde B_{A_3} y B_{A_4} son las ramas locales de C en A_3 y A_4.

Sea B_{A_3} una rama local de C en A_3. Entonces en las coordenadas (u, v, U_1), se tendrá $A_3 = (0, 0)$ y $C_{p,q,r} = \{v^q (u + v)^r - u^{p+q+r} = 0\}$. De la ecuación (5.19) concluimos que $\mathcal{F}$ es dada en una vecindad de U_{A_3} de A_3 por

$$u\big(qu + (q+r)v\big)dv - v\big((p+q)u + (p+q+r)v\big)du.$$

Luego, si $\pi_{A_3} : \widetilde{U}_{A_3} \to U_{A_3}$ es el *blow-up* en A_3, entonces $\pi^*_{A_3}\mathcal{F}$ en las coordenadas (u,t), con $v = ut$, viene dada por

$$\omega_{p_1} = -t(p+pt)du + u\big(q+(q+r)t\big)dt, \tag{5.22}$$

y, en las coordenadas (s,t), con $u = vt$, por

$$\omega_{p_2} = p(t-t^2)du + u\big(-r+(q+r)t\big)dt. \tag{5.23}$$

Con $\widetilde{C} = \{f(u,t) = t^q(1+t)^r - u^p\}$ el transformado estricto de C se tiene $\pi^*_{A_3}\mathcal{F} \cap \widetilde{C} = \{p_1 = (0,0), p_2 = (0,-1)\}$. En las formulas (5.22) y (5.23), como $\pi^*_{A_3}\mathcal{F}$ posee integral primera, gracias a los teoremas de linealización de Poincaré y Dulac, podemos suponer sin pérdida de generalidad que se cumple

$$\omega_{p_1} = -ptdu + qudt, \quad \omega_{p_2} = ptdu - rudt.$$

Sea $\widetilde{B}_{p_1}$ una componente de la curva $t^q = u^p$ o de la curva $t^r = u^p$. Para $m = \mathrm{mcd}(p,q)$ se tiene

$$t^q - u^p = \prod_{k=0}^{m-1}(t^{\frac{q}{m}} - e^{2\pi i \frac{k}{m}} u^{\frac{p}{m}}).$$

Por lo tanto, se satisface $\widetilde{B}_{p_1} = \{t^{\frac{q}{m}} = e^{2\pi i\frac{k}{m}}u^{\frac{p}{m}}\}$ para algún $k \in \{0,\cdots,m-1\}$. En particular, se logra $i(\pi^*_{A_3}\mathcal{F}, \widetilde{B}_{p_1}) = 1$. Por el teorema 2.11, como A_3 es una singularidad no dicrítica, si $\pi(\tilde{B}_{p_1}) = B_{A_3}$ tenemos

$$i(\mathcal{F}, B_{A_3}) = i(\pi^*_{A_3}\mathcal{F}, \widetilde{B}_{p_1}) + m_{A_3}(B_{A_3})(l-1) = 1 + m_{A_3}(B_{A_3}), \tag{5.24}$$

donde m_{A_3} es la multiplicidad de la rama B_{A_3}. De esta manera por (5.24), para calcular $i(\mathcal{F}, B_{A_3})$ es suficiente calcular $m_{A_3}(B_{A_3})$. Como $\widetilde{\alpha}_i(z) = (z^{\frac{q}{m}}, z^{\frac{p}{m}})$ es una parametrización de Puiseux para la rama $\widetilde{B}_{p_1}$, se concluye que $\alpha_i(z) = (z^{\frac{q}{m}}, e^{2\pi i\frac{k}{mq}}z^{\frac{p}{m}})$ es una parametrización de Puiseux de B_{A_3}. Del teorema de parametrización de Puiseux se obtiene $m_{A_3}(B_{A_3}) = \mathrm{mín}(\frac{q}{m}, \frac{p+q}{m}) = \frac{q}{m}$. Luego, al reemplazar en (5.24) logramos

$$i(\mathcal{F}, B_{A_3}) = 1 + \frac{q}{m}.$$

Análogamente, si $\widetilde{B}_{p_2}$ es una de las ramas de la curva $t^r = u^p$ que pasan por p_2, se tendrá $i(\mathcal{F}, B_{A_3}) = 1 + \frac{r}{n}$, donde $\pi(\tilde{B}_{p_2}) = B_{A_3}$. Además, existen $l = \text{mcd}(p, q + r)$ ramas en A_4, tales que $i(\mathcal{F}, B_{A_4}) = 1$. Por lo tanto en (5.21) conseguimos

$$2-2\,\text{gén}(C) = \sum_{i=1}^{m}(1+\frac{q}{m})+\sum_{i=1}^{n}(1+\frac{r}{n})+\sum_{i=1}^{l}-(p+q+r)(2-1) = m+n+l-p.$$

En pocas palabras, se tendrá $\text{gén}(C) = 1$ si y solamente si $p = m+n+l$.

Al poner $n = \text{mcd}(p, r)$, $m = \text{mcd}(p, q)$ y $l = \text{mcd}(p, q+r)$ existirán valores $\gamma, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$ sujetos a

$$p = n\gamma, \quad p = m\beta, \quad p = l\alpha.$$

De estas ecuaciones, debido a la condición $p = m + n + l$, se pasa a

$$\gamma\beta\alpha = \gamma\alpha + \beta\alpha + \beta\gamma. \tag{5.25}$$

Como las variables α, β, γ en (5.25) son permutables, calcularemos las soluciones en el caso $\gamma \leq \alpha \leq \beta$. Si $\alpha = \beta$ o $\alpha = \gamma$, la terna tendrá que ser $(\gamma, \alpha, \beta) = (2, 4, 4)$ o $(3, 3, 3)$. Analicemos cada caso por separado.

Para el caso $(\gamma, \alpha, \beta) = (3, 3, 3)$, se tiene $p = 3n = 3m = 3l$ y $m = n = l$. Como p, q, r no tienen factores comunes se cumplirá $n = m = l = 1$ y $p = 3$. Por el algoritmo de la división, existen enteros $u, t \in \mathbb{N}$ sujetos a $r = 3u + t$, con $0 \leq t < 3$. Al ser p, r relativamente primos, esto fuerza $t = 1, 2$. En consecuencia r puede ser de la siguiente formas

$$r = 3u + 1 \text{ o } r = 3u + 2. \tag{5.26}$$

Análogamente, existen $v, s \in \mathbb{N}$ tales que $q = 3v+s$, con $0 \leq s < 3$. Como $\text{mcd}(p, q)$=1 se tiene $s = 1$ o 2, lo que implica $q = 3v + 1$ o $q = 3v + 2$, respectivamente. De esto, como además se tiene $\text{mcd}(3, q + r) = 1$, por la ecuación (5.26), obtenemos

$$(p, q, r) = (3, 3v + 1, 3u + 1) \quad \text{o} \quad (3, 3v + 2, 3u + 2). \tag{5.27}$$

Ahora veamos el caso $(\gamma, \alpha, \beta) = (2, 4, 4)$. En este caso, $p = 2n = 4n = 4l$, así $m = l$ y $n = 2l = 2m$. Como $\text{mcd}(p, q, r) = 1$ tenemos $l = m = 1$, $n = 2$ y $p = 4$. Similarmente al caso anterior, existen enteros u, v y t, s tales que $q = 4u + t$ y $r = 4v + s$, con $0 \leq s, t < 4$. Como $m = \text{mcd}(p, q) = n = \text{mcd}(p, r) = 1$ y $l = \text{mcd}(p, q + r) = 2$, entonces $t, s \neq 0$ y $t + s$ es par y no es múltiplo de 4. Por lo tanto, obtenemos las familias de soluciones

$$(p, q, r) = (4, 4u + 1, 4v + 1),\ u, v \in \mathbb{N},$$
$$(p, q, r) = (4, 4u + 3, 4v + 3),\ u, v \in \mathbb{N}.$$

Si $\beta > \alpha > \gamma$, por (5.25), $\gamma = 2$, $\alpha = 3$ y $\beta = 6$. En este caso, $p = 2n = 6m = 3l$. Como $\text{mcd}(p, q, r) = 1$ entonces $m = 1$, $n = 3$ y $l = 2$ y $p = 6$. Por el mismo argumento que en los casos anteriores, obtenemos $(p, q, r) = (6, 6u + 1, 6v + 3)$ o $(p, q, r) = (6, 6u + 5, 6v + 3)$, con $u, v \in \mathbb{N}$. $\square$

5.3. Caso III: $c = 0$

En este caso se tiene $b \neq 0$ y $a \neq 0$. Por medio del cambio de coordenadas $x \mapsto \dfrac{x}{a}$ y $y \mapsto \dfrac{y}{b}$ podemos suponer $a = b = 1$ y $f(x, y) = x^p y^q (x + y)^r$. Por medio del cambio birracional $(x', y') \mapsto \left(x', \frac{x'}{y'}\right)$, reducimos el trabajo a $f(x', y') = x'^{p+q+r} y'^q (1 + y')^r$ y regresamos al caso 5.2.

Referencias

[1] Bueno, O. and Puchuri, L., *A new proof of the classification of Elliptic Foliations induced by real Quadratic Fields with center.* ArXiv e-prints 1606.00098v1, 2016.

[2] Camacho, C., Lins Neto, A., and Sad, P., *Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields.* J. Differential Geom. 20, 1 (1984), 143–174.

[3] Camacho, C., and Sad, P., *Pontos singulares de equações diferenciais analíticas.* 16º Colóquio Brasileiro de Matemática. [16th Brazilian Mathematics Colloquium]. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1987.

[4] Cerveau, D., and Lins Neto, A., *Holomorphic foliations in* **C**P(2) *having an invariant algebraic curve.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 41, 4 (1991), 883–903.

[5] Fernandez, P., *Topología de las singularidades de curvas analíticas irreducibles planas.* Master's thesis, Universidade Federal Fluminense, 1998.

[6] Gautier, S., *Quadratic centers defining elliptic surfaces.* Journal of Differential Equations, 12 (2008), 3545–3569.

[7] Kapteyn, W., *On the midpoints of integral curves of differential equations of the first order and the first degree.* Nederl. Akad. Wetensch. Verslag. Afd. Natuurk. 19 (1911), 1446–1457.

[8] Puchuri, L., *Clasificación de foliaciones elípticas inducidas por campos cuadráticos reales con centro.* Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional de Ingeniería, 2015.

[9] Reyssat, E., *Quelques Aspects Des Surfaces de Riemann.* Birkhaüser-Verlag, 1989.

Abstract

Embedded in the study of Hilbert's infinitesimal problem is the question of existence and number of limit cycles of linear perturbations of Hamiltonian fields. Since there is available a classification of real quadratic fields with center in $\mathbb{R}^2$, we can match them with complex fields in $\mathbb{C}^2$

that induce a foliation in $\mathbb{P}^2$. Our objective is to classify the foliations in $\mathbb{P}^2$ induced by the fields obtained by said classification of quadratic fields with center which are elliptic fibrations, that is, the ones with level curves of genus one.

keywords: Limit cycles, Hilbert's 16th problem, elliptic foliations.

Liliana Puchuri

Instituto de Matématica y Ciencias Afines (IMCA)
Calle Los Biólogos 245
Urb. San César - Primera Etapa, La Molina
Perú

Sección Matemáticas
Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú
Av. Universitaria 1801, San Miguel
Perú
`lpuchuri@pucp.pe`