Un teorema de tipo Bott para orbifolds complejos y aplicaciones

A. Miguel Rodríguez[1]

Noviembre, 2015

Resumen

Presentamos (sin demostración) una versión del teorema de Bott para un orbifold complejo compacto y con singularidades aisladas. A continuación deducimos algunas consecuencias importantes de este teorema, y finalmente daremos algunas aplicaciones para foliaciones holomorfas en espacios proyectivos ponderados.

MSC(2010): 37F75, 57R18.

Palabras clave: Orbifold, espacios proyectivos ponderados, foliaciones.

[1] *ICEX - UFMG.*

1. Preliminares

Un orbifold o V-variedad puede ser visto localmente como un espacio cociente de un espacio euclidiano bajo una acción de un grupo finito lineal. La noción de orbifold fue introducida por Satake [10] en el contexto de automorfismos de formas en los años 50 con el nombre de V-variedad, y por Thurston [11] en el contexto de la geometría de las 3-variedades en los años 70; fue entonces cuando ganó el nombre de orbifold después de una votación entre sus alumnos. Objetos similares aparecen en geometría algebraica, ahí llamados $\mathbb{Q}$-variedades. Tales objetos pueden presentar singularidades, pero ellas son siempre de tipo cociente.

Un **orbifold** es un espacio complejo paracompacto conexo M que satisface la propiedad que cada punto $p \in M$ tiene una vecindad abierta $U \subset M$ que es un cociente $U \cong V/G$, donde V es una variedad compleja, G es un subgrupo finito del grupo de biholomorfismos de V, con V y G dependientes de p. Llamaremos **cobertura** local suave a la proyección natural $\pi : V \to U \cong V/G$. En adelante (M, p) denotará el germen de orbifold M en el punto p y será llamado **germen cociente**. Morfismos entre orbifolds son las aplicaciones holomorfas entre ellos.

Puesto que las posibles singularidades que aparecen en un orbifold M son de tipo cociente, se tiene que M es un espacio complejo reducido, normal, Cohen-Macaulay y con solo singularidades racionales. Denotaremos este conjunto singular por $Sing(M)$ y la parte regular por $M_{Reg} = M \backslash Sing(M)$. La dimensión de M es la dimensión de la variedad compleja M_{Reg}.

La estructura local de un orbifold entorno de sus singularidades fue descrita por David Prill en [8]: si $dim_{\mathbb{C}} M = n$, entonces cada germen cociente (M, p) determina un único (módulo conjugación) subgrupo finito pequeño $G_p \subset GL(n, \mathbb{C})$ tal que $(M, p) \cong (\mathbb{C}^n, 0)/G_p$, con una proyección natural $\pi : (\mathbb{C}^n, 0) \to (M, p)$. Notemos que se tiene $p \in Sing(M)$ si el grupo de isotropía G_p es no trivial. Resaltamos que se cumple $G_p = \pi_1((M, p) \backslash Sing(M))$ y por esa razón G_p es llamado el grupo fundamental local de M en p. Recordemos que G_p es pequeño si satisface

$codim_{\mathbb{C}}(Fix\,G_p) \geq 2$ (acá $Fix\,G_p = \cup_{g \neq e} Fix\,g$), o equivalentemente, si ningún elemento en G_p tiene a 1 como un autovalor de multiplicidad $n-1$. Veamos algunos ejemplos de orbifolds.

Ejemplo 1.1. I. Toda variedad complexa M es trivialmente un orbifold sin singularidades.

II. Sean $U = \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \subset \mathbb{C}$, $V = \mathbb{D}$, y μ_n el grupo de las raíces $n-$enésimas de la unidad actuando por multiplicación, con cociente $\pi : V \to U$ dado por $\pi(z) = z^n$. Resulta entonces que U es un orbifold con una única carta orbifold (V, μ_n, π).

III. Si $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ es un subgrupo finito, entonces el cociente $\mathbb{C}^n/G$ es un orbifold. En particular, para $n = 2$ y $G \subset SL(2, \mathbb{C})$ subgrupo finito, tenemos las singularidades kleinianas (o de Du Val) A_{m-1}, D_{m+2}, con $(m \geq 2)$, E_6, E_7 y E_8. En dimensión 2 cualquier espacio complejo con singularidades de tipo Klein tiene una estructura natural de orbifold.

IV. Un dato bien conocido es que toda variedad tórica M_Δ, donde Δ es un fan simplicial, es un orbifold. Como un ejemplo importante de este tipo de orbifolds aparecen los espacios proyectivos ponderados $\mathbb{P}^n(w)$.

V. Considere el 4-toro complejo $\mathbb{T}^4 = \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^4$. Definamos el mapa $\sigma : \mathbb{T}^4 \to \mathbb{T}^4$ mediante

$$\sigma(e^{it_1}, e^{it_2}, e^{it_3}, e^{it_4}) = (e^{-it_1}, e^{-it_2}, e^{-it_3}, e^{-it_4})$$

e identifiquemos $\langle\sigma\rangle$ con $\mathbb{Z}_2$. La superficie de Kummer $\mathbb{T}^4/\mathbb{Z}_2$ es un orbifold con 16 singularidades aisladas.

Una **k-forma diferencial en** M es una k-forma C^∞ en M_{Reg} tal que el pull-back $\pi^*\omega$ se extiende a una k-forma C^∞ en cada cobertura local suave $\pi : (V, \tilde{p}) \to (M, p)$ de M. De ahí, si ω es una $2n$-forma diferencial en M con soporte compacto $\mathrm{Supp}(\omega) \subset (M, p)$, entonces, por definición, se tiene

$$\int_M \omega = \frac{1}{\#G_p} \int_V \pi^*\omega.$$

Ahora, si la $2n$-forma diferencial ω tiene soporte compacto, mediante una partición de la unidad $\{\rho_\alpha, U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ (invariante por la acción local, ver [10]), tenemos

$$\int_M \omega = \sum_\alpha \int_M \rho_\alpha \omega.$$

Análogo al caso de variedades tenemos el haz $\mathscr{E}^k$ de k-formas diferenciales en M, junto con la derivada exterior $d : \mathscr{E}^k \to \mathscr{E}^{k+1}$ y el haz total $\mathscr{E}^* = \bigoplus_{0\le k\le 2n} \mathscr{E}^k$.

Cuando M tiene dimensión n, vía la fórmula de Satake-Stokes (cf. [10]), para $\omega \in \Gamma_c(M, \mathscr{E}^{2n-1})$ (es decir, de soporte compacto) se logra

$$\int_M d\omega = 0.$$

Los complejos de De Rham $H^*_{dR}(M,\mathbb{C}) = \bigoplus\limits_{0\le k\le 2n} H^k_{dR}(M,\mathbb{C})$ (el usual) y $H^*_{dRc}(M,\mathbb{C}) = \bigoplus\limits_{0\le k\le 2n} H^k_{dRc}(M,\mathbb{C})$ (el de soporte compacto) quedan bien definidos entonces y vale dualidad de Poincaré: el par

$$\begin{array}{ccc} H^k_{dR}(M,\mathbb{C}) \times H^{2n-k}_{dRc}(M,\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ ([\omega],[\eta]) & \longmapsto & \displaystyle\int_M \omega\wedge\eta \end{array}$$

resulta no degenerado. Como en el caso de variedades, para orbifolds vale el teorema de De Rham y tenemos $H^*(M,\mathbb{C}) \cong H^*_{dR}(M,\mathbb{C})$, donde $H^*(M,\mathbb{C})$ es el anillo de cohomología singular con coeficientes complejos y, si consideramos la cohomología de Čech, vale también $H^*_{dR}(M,\mathbb{C}) \cong \check{H}^*(M,\mathbb{C})$.

Sea $\rho : E \to M$ una aplicación holomorfa sobreyectiva entre orbifolds. Sea F una variedad complexa. Diremos que ρ es un **fibrado holomorfo orbifold con fibra** F si para todo $p \in M$ existe un cobertura local suave $\pi : V \to U \cong V/G_p$, de una vecindad abierta U de p, y una acción de G_p sobre el fibrado trivial $V \times F$ sobre V (con fibra F)

con $E|_U \cong (V \times F)/G_p$. Obsérvese que en tal caso $\rho^{-1}(p) = F/G_p$ es un orbifold para todo $p \in M$. En particular se tiene $\rho^{-1}(p) = F$ para todo $p \in M_{Reg}$.

Ejemplo 1.2. Como ejemplo, tomemos $F = \mathbb{C}^k$, con acción de G_p sobre $V \times \mathbb{C}^k$ dada por $g \cdot (\tilde{x}, v) = (g\tilde{x}, A(\tilde{x}, g)v)$, donde $A : V \times G_p \to GL(n, \mathbb{C})$ es holomorfa y cumple $A(\tilde{x}, gh) = A(h\tilde{x}, g)A(\tilde{x}, h)$. Para más detalles ver [10], [7].

Sea (U, p) un germen cociente, y sea $\pi : (V, \tilde{p}) \to (U, p)$ un cobertura local suave. Un haz coherente $\mathcal{F}$ en (U, p) es un **haz orbifold libre** si $\mathcal{F}$ es reflexivo (es decir, el homomorfismo natural $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^{\vee\vee}$ es un isomorfismo) y $(\pi^*\mathcal{F})^{\vee\vee}$ es un haz libre. Cuando M es un orbifold, un haz coherente $\mathcal{F}$ en M será un **haz orbifold localmente libre** si $\mathcal{F}|_{(M,p)}$ es un haz orbifold libre para todo $p \in M$. Para mayores detalles ver [1].

Un **fibrado vectorial orbifold** E **sobre** M es un fibrado vectorial holomorfo E_{Reg} sobre M_{Reg} tal que $i_*(\mathcal{O}(E_{Reg}))$ es un haz orbifold localmente libre. Aquí $i : M_{Reg} \hookrightarrow M$ es la inclución y $\mathcal{O}(E_{Reg})$ el haz de secciones de E_{Reg}.

Ejemplo 1.3. En el ejemplo 1.1, caso **II**, consideremos el fibrado trivial orbifold dado por el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} V \times \mathbb{C} \arrow[r, "\pi^E"] \arrow[d, "\tilde{\rho}"'] & (V \times \mathbb{C})/\mu_n \arrow[d, "\rho"] \\ V \arrow[r, "\pi"'] & U, \end{tikzcd}$$

donde la acción de μ_n sobre $V \times \mathbb{C}$ está dada por $g \cdot (z, v) = (gz, gv)$.

Posteriormente daremos un ejemplo no trivial de un fibrado vectorial orbifold de rango uno en $\mathbb{P}^n(w)$.

Observación 1.4. Un fibrado vectorial holomorfo E_{Reg} en M_{Reg} es un fibrado vectorial holomorfo orbifold en M cuando para toda cobertura local suave $(V, \tilde{p}) \to (U, p) \cong (V, \tilde{p})/G_p$ de M existe un fibrado vectorial holomorfo E_V junto con una acción de grupos G_p tal que $(E_V|_{(V,\tilde{p})-Fix\,G_p})/G_p \cong E_{Reg}|_{(U,p)}$. Además E_V y la G_p-acción en E_V quedan determinadas únicamente por E_{Reg}.

Observación 1.5. Dado un haz orbifold localmente libre $\mathcal{F}$ sobre M, existe un fibrado vectorial orbifold en M tal que $\mathcal{F}$ es isomorfo al haz de secciones de E. Módulo isomorfismo E es único.

Sea M un orbifold y E un fibrado vectorial holomorfo orbifold en M. Una **métrica orbifold** h en E es una métrica hermitiana en E_{Reg} tal que para toda cobertura local suave $\pi : (V, \tilde{p}) \to (U, p)$, el pull-back $\pi^* h$ admite una extensión a una métrica hermitiana h_V en E_V.

Como en el caso de variedades, a través de particiones de la unidad siempre es posible construir métricas orbifold. De manera similar podemos construir conexiones, curvatura y clases de Chern asociadas a un fibrado vectorial holomorfo orbifold (para más detalles ver [7], [1]).

En el capítulo 2 de este trabajo (a continuación), presentaremos un teorema de tipo Bott para un orbifold complejo compacto y con singularidades aisladas (teorema 2.1), y deducimos algunas consecuencias importantes de este teorema. En el capítulo 3 daremos algunas aplicaciones en el contexto de foliaciones holomorfas en espacios proyectivos ponderados.

2. Un teorema de tipo Bott

Sea M un n-orbifold compacto y con singularidades aisladas. Sea L un fibrado vectorial orbifold de rango 1. Consideremos las clases de Chern

$$c_k(TM - L^\vee) = c_k(TM) + c_{k-1}(TM)c_1(L)^1 + \cdots + c_1(L)^k,$$

donde $L^\vee$ denota el dual de L y $1 \leq k \leq n$. Consideremos también

$$c^v(TM - L^\vee) = c_1^{v_1}(TM - L^\vee) \cdots c_n^{v_n}(TM - L^\vee),$$

donde $v = (v_1, \ldots, v_n)$ y $n = v_1 + 2v_2 + \cdots + nv_n$.

Como casos particulares resaltamos los dos casos extremos:

I. $c_1(TM - L^\vee) = c_1(TM) + c_1(L)$,

II. $c_n(TM - L^\vee) = c_n(TM \otimes L)$.

Identifiquemos $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ con $\mathbb{C}^{n^2}$. Recordemos que un polinomio $\mathrm{P} : M_{n\times n}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ homogéneo de grado k es llamado **invariante** si cumple $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(GAG^{-1})$ para todo $G \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ invertible. (Ejemplos básicos de tales polinomios están dados por la relación $Det(A+t\cdot I) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}^{n-k}(A) \cdot t^n$: en particular tenemos $\mathrm{P}_1(A) = Tr(A)$, la traza, y $\mathrm{P}_n(A) = Det(A)$, el determinante).

Sean $\sigma_1(z_1, ..., z_n) = \sum_{i=1}^{n} z_i, \ \ldots, \ \sigma_n(z_1, ..., z_n) = \prod_{i=1}^{n} z_i$ las funciones simétricas elementales. Pongamos $\sigma^v = \sigma_1^{v_1} ... \sigma_n^{v_n}$. Es sabido que cualquier polinomio homogéneo invariante es una combinación lineal $\mathrm{P} = \sum_v a_v \sigma^v$, $a_v \in \mathbb{C}$ (ver [6]).

Teorema 2.1 ([3])**.** *Sea M un orbifold compacto de dimensión n con singularidades aisladas. Sea L un fibrado vectorial orbifold de rango 1 sobre M y ξ una sección holomorfa de $TM \otimes L$ cuyos ceros son aislados. Si P es un polinomio homogéneo invariante de grado n, entonces se tiene*

$$\int_M \mathrm{P}(TM - L^\vee) = \sum_{p/\xi(p)=0} \frac{1}{\# G_p} Res_{\widetilde{p}} \left(\frac{\mathrm{P}(J\tilde{\xi}) d\tilde{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\tilde{z}_n}{\tilde{\xi}_1 \ldots \tilde{\xi}_n} \right),$$

donde $\pi_p : (\widetilde{U}, \tilde{p}) \to (\widetilde{U}/G_p, p)$ denota la proyección, $\tilde{\xi} = \pi_p^*(\xi)$, $J\tilde{\xi} = (\frac{\partial \tilde{\xi}_i}{\partial \tilde{z}_j})$ y $Res_{\widetilde{p}} \left(\frac{\mathrm{P}(J\tilde{\xi}) d\tilde{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\tilde{z}_n}{\tilde{\xi}_1 \ldots \tilde{\xi}_n} \right)$ es el residuo de Grothendieck, siempre que $\xi(p) = 0$. $\square$

Definición 2.2 ([10])**.** Sea M un orbifold y ξ una sección holomorfa de $TM \otimes L$ con singularidades aisladas. Dado $p \in M$, consideremos la cobertura local suave $\pi_p : \widetilde{U} \to U \cong \widetilde{U}/G_p$ de una vecindad abierta U de p. El **índice de ξ en p** está definido por

$$\mathcal{I}_p(\xi) = \frac{1}{\# G_p}\mathcal{I}_{\tilde{p}}(\tilde{\xi}),$$

donde $\mathcal{I}_{\tilde{p}}(\tilde{\xi})$ es el índice de Poincaré Hopf de $\tilde{\xi}$ en $\tilde{p}$.

En el teorema 2.1, de las propriedades de los residuos, sigue directamente lo siguiente.

Corolario 2.3. *Con la notación del teorema 2.1 se tiene*

$$\int_M c_n(TM \otimes L) = \sum_{\xi(p)=0} \mathcal{I}_p(\xi).$$

Además, si los ceros de ξ son no degenerados (es decir $J\tilde{\xi}(\tilde{p}) \neq 0$ para todo $p \in Sing(\xi)$), tenemos

$$\int_M c^v(TM - L^\vee) = \sum_{\xi(p)=0} \frac{1}{\# G_p}\frac{C^v(J\tilde{\xi}(\tilde{p}))}{det(J\tilde{\xi}(\tilde{p}))}.$$

Proof. Para la primera parte, en el teorema 2.1 tomemos $\mathrm{P} = C_n$. Entonces la igualdad se sigue de $c_n(TM - L^\vee) = c_n(TM \otimes L)$ y $\mathcal{I}_{\tilde{p}}(\tilde{\xi}) = \mathrm{Res}_{\widetilde{p}}\left(\frac{\mathrm{C}_n(J\tilde{\xi})d\tilde{z}_1\wedge\cdots\wedge d\tilde{z}_n}{\tilde{\xi}_1\ldots\tilde{\xi}_n}\right)$. La segunda parte se desprende directamente de las propiedades locales de residuos para campos holomorfos con singularidades no degeneradas, ver [6, página 650]. □

Análogo al caso liso, daremos una generalización de la definición del índice de Baum-Bott para una superficie orbifold. Sea $\mathcal{F}$ una foliación holomorfa con singularidades aisladas en una superficie orbifold M. Sea $p \in M$ una singularidad de $\mathcal{F}$; asumamos que cerca de p la foliación está localmente dada por un campo de vectores holomorfo $\xi = \xi_1\frac{\partial}{\partial z} + \xi_2\frac{\partial}{\partial w}$ o por una $1-$forma holomorfa $\omega = \xi_1 dw - \xi_2 dz$, donde (z, w) son las coordenadas locales centradas en el punto $(0, 0)$ y ξ_1, ξ_2 son funciones holomorfas con $\xi_1^{-1}(0) \cap \xi_2^{-1}(0) = \{(0,0)\}$. Definimos el **índice de Baum-Bott en** p por

$$\mathcal{BB}(\mathcal{F}, p) = \frac{1}{\#G_p} Res_{(0,0)} \left(\frac{Tr^2(J\xi)}{\xi_1 \cdot \xi_2} dz \wedge dw \right).$$

3. Aplicación: foliaciones en $\mathbb{P}^n(w)$

En esta sección daremos las aplicaciones de los resultados dados anteriores a las foliaciones holomorfas en los espacios proyectivos ponderados. Primero, en forma rápida presentamos algunos preliminares; para más detalles se puede consultar [7], [5] o [4].

Sean $w_0, ..., w_n \in \mathbb{Z}^+$ coprimos dos a dos. Consideremos la acción en $\mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\}$ dada por

$$\lambda \cdot (Z_0, ..., Z_n) = (\lambda^{w_0} Z_0, ..., \lambda^{w_n} Z_n).$$

Pongamos $w = (w_0, ..., w_n)$, $|w| = w_0 + ... + w_n$.

El **espacio proyectivo ponderado en los pesos** $w_0, ..., w_n$ está dado por

$$\mathbb{P}_w^n = \mathbb{P}^n(w) = \mathbb{P}(w_0, ..., w_n) = (\mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\}) / \sim;$$

Acá $\sim$ hace referencia a la relación de equivalencia determinada por las órbitas del grupo del párrafo anterior. Denotaremos por $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\} \to \mathbb{P}_w^n$ a proyección canónica. Observemos que para $w_0 = ... = w_n = 1$ se tiene $\mathbb{P}_w^n = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$, el espacio proyectivo usual.

Estos espacios tienen singularidades precisamente cuando algún w_i es distinto de 1. En efecto, en tal caso se tiene

$$Sing(\mathbb{P}_w^n) = \{(0 : .. : \underbrace{1}_{i} : .. : 0)_w : w_i \neq 1\}.$$

En este contexto resulta útil introducir la función $\varphi : \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^n_w$ dada por $\varphi(Z_0 : ... : Z_n) = (Z_0^{w_0} : ... : Z_n^{w_n})_w$. Es un simple ejercicio verificar que φ es de grado $w_0 \cdots w_n$.

Establezcamos algo de notación. Para cada i pongamos

$$U_i = \{[Z_0, ..., Z_n]_w \in \mathbb{P}^n_w : Z_i \neq 0\} \subset \mathbb{P}^n_w.$$

Además consideremos $\mu_{w_i} = \{z \in \mathbb{C}^* : z^{w_i} = 1\}$.

El grupo μ_{w_i} induce una acción en $\widetilde{U_i} = \mathbb{C}^n$ dada por

$$\lambda.(Z_0, .., \widehat{Z_i}, .., Z_n) = (\lambda^{w_0} Z_0, .., \widehat{Z_i}, .., \lambda^{w_n} Z_n),$$

de modo que se tiene $U_i \cong \widetilde{U_i}/\mu_{w_i}$. Entre estas copias de $\mathbb{C}^n$, para $j < i$ tenemos un cambio de coordenadas orbifold (ver [7]), osea una aplicación holomorfa inyectiva

$$\varphi_{ij} : \widetilde{U_i} \hookrightarrow \widetilde{U}_j$$

dada por

$$\varphi_{ij}\left((Z_0, .., \widehat{Z_i}, .., Z_n)\right) = \left(\frac{Z_0}{Z_j^{w_0/w_j}}, .., \frac{\widehat{Z_j}}{Z_j}, .., \frac{1}{Z_j^{w_i/w_j}}, .., \frac{Z_n}{Z_j^{w_n/w_j}}\right),$$

tal que φ_{ij} respeta la acción local de los grupos μ_{w_i} y μ_{w_j}. Con ello $\mathbb{P}^n_w$ adopta estructura de orbifold.

Fijemos $d \in \mathbb{Z}$, consideramos la acción

$$\mathbb{C}^* \times (\mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\} \times \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\} \times \mathbb{C}$$

dado por

$$(\lambda, (Z_0, ..., Z_n), t) \mapsto ((\lambda^{w_0} Z_0, ..., \lambda^{w_n} Z_n), \lambda^d t).$$

Definimos el **fibrado vectorial orbifold lineal en** $\mathbb{P}^n_w$ por

$$\mathcal{O}_w(d) := (\mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\} \times \mathbb{C}) / \sim .$$

La siguiente proposición describe las secciones holomorfas globales de $\mathcal{O}_w(d)$ cuando $d > 0$.

Proposición 3.1 ([7]). *Si $d > 0$, tenemos*

$$H^0(\mathbb{P}^n_w, \mathcal{O}_w(d)) = \bigoplus_{w_0k_0+...+w_nk_n=d} \mathbb{C} \cdot (Z_0^{k_0}...Z_n^{k_n}).$$

□

Se verifica que el grupo de Picard de $\mathbb{P}^n_w$ es un grupo cíclico infinito con el producto tensorial y es generado por $\mathcal{O}_w(1)$, con $\mathcal{O}_w(1)^{\otimes d} = \mathcal{O}_w(d)$, $d \in \mathbb{Z}$. Además, si $\varphi : \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^n_w$ es como antes, entonces $\varphi^*(\mathcal{O}_w(1)) = \mathcal{O}(1)$ (es decir, φ es functorial). Detalles de esto puede ser visto en [7].

Proposición 3.2 ([7]). *Para $\mathcal{O}_w(1)$, el fibrado hiperplano en $\mathbb{P}^n_w$, se tiene*

$$\int_{\mathbb{P}^n_w} c_1(\mathcal{O}_w(1))^n = \frac{1}{w_0 \cdots w_n}.$$

□

Similar al caso proyectivo, tenemos una sucesión de Euler (ver [7]):

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{C}} \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{i=0}^{n} \mathcal{O}_w(w_i) \xrightarrow{\beta} T\mathbb{P}^n_w \longrightarrow 0,$$

donde

I. $\alpha : 1 \longmapsto (w_0Z_0, ..., w_nZ_n)$,

II. $\beta : (P_0, ..., P_n) \longmapsto \pi_*(\sum_{i=0}^n P_i \frac{\partial}{\partial Z_i})$, acá $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\} \to \mathbb{P}^n_w$ es la proyección canónica.

Al aplicar producto tensorial con $\mathcal{O}_w(d-1)$ obtenemos la sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{O}_w(d-1) \to \bigoplus_{i=0}^{n} \mathcal{O}_w(w_i + d - 1) \to T\mathbb{P}^n_w \otimes \mathcal{O}_w(d-1) \to 0.$$

Una foliación holomorfa de dimensión uno y grado d en $\mathbb{P}^n_w$ queda en la práctica inducida por un elemento de $H^0(\mathbb{P}^n_w, T\mathbb{P}^n_w \otimes \mathcal{O}_w(d-1))$ (comparar con [4]).

En efecto, toda foliación holomorfa de dimensión uno y grado d en $\mathbb{P}^n_w$ queda determinada por un campo de vectores en $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$ de la forma $X = \sum_{i=0}^n P_i(Z)\frac{\partial}{\partial Z_i}$, donde cada P_i es un polinomio casi-homogéneo de tipo $(w_0, ..., w_n)$ y grado de casi-homogeneidad $d+w_i-1$: es decir, que satisface

$$P_i(\lambda^{w_0}Z_0, ..., \lambda^{w_n}Z_n) = \lambda^{d+w_i-1}P_i(Z_0, ..., Z_n),\ i = 0, ..., n.$$

Sin embargo, obsérvese que $Q\mathcal{R}_w + X$ define la misma foliación que X, donde $\mathcal{R}_w = w_0Z_0\frac{\partial}{\partial Z_0} + ... + w_nZ_n\frac{\partial}{\partial Z_n}$ es el campo radial y Q es cualquier polinomio casi-homogéneo de tipo $(w_0, ..., w_n)$ y grado de casi-homogeneidad $d-1$, de ahí la terminología.

Proposición 3.3. *Si $d > 1 -$ Máx$\{w_i + w_j : i \neq j\}$, entonces se tiene $H^0(\mathbb{P}^n_w, T\mathbb{P}^n_w \otimes \mathcal{O}_w(d-1)) \neq \{0\}$.*

Prueba. El par $\Omega^r_{\mathbb{P}^n_w} \times \Omega^{n-r}_{\mathbb{P}^n_w} \longrightarrow \Omega^n_{\mathbb{P}^n_w}$ induce el isomorfismo $\Omega^r_{\mathbb{P}^n_w} \cong Hom_{\mathbb{C}}(\Omega^{n-r}_{\mathbb{P}^n_w}, \Omega^n_{\mathbb{P}^n_w})$. Por otro lado tenemos $K_{\mathbb{P}^n_w} = \mathcal{O}_w(-\sum_{i=0}^n w_i)$, de modo que se logra $T\mathbb{P}^n_w = (\Omega^1_{\mathbb{P}^n_w})^\vee = \Omega^{n-1}_{\mathbb{P}^n_w} \otimes (\Omega^n_{\mathbb{P}^n_w})^\vee = \Omega^{n-1}_{\mathbb{P}^n_w}(\sum_{i=0}^n w_i)$. Una vez que se tiene $H^0(\mathbb{P}^n_w, T\mathbb{P}^n_w \otimes \mathcal{O}_w(d-1)) \cong H^0(\mathbb{P}^n_w, \Omega^{n-1}_{\mathbb{P}^n_w}(\sum_{i=0}^n w_i + d-1))$, el resultado se sigue de [5, corolario 2.3.4]. $\square$

Pasemos ahora a aplicaciones y ejemplos en los espacios proyectivos ponderados. El siguiente corolario es una aplicación del corolario 2.3.

Corolario 3.4. *Para ξ una sección holomorfa de $T\mathbb{P}^n_w \otimes \mathcal{O}_w(d-1)$ con singularidades aisladas se tiene*

$$\sum_{\xi(p)=0} \mathcal{I}_p(\xi) = \frac{1}{w_0 \cdots w_n} \sum_{j=0}^n (d-1)^{n-j}\sigma_j(w).$$

En particular, si ξ tiene singularidades no degeneradas, entonces se cumple

$$\sum_{\xi(p)=0} \frac{1}{\#G_p} = \frac{1}{w_0 \cdots w_n} \sum_{j=0}^n (d-1)^{n-j}\sigma_j(w).$$

Si además ξ se tiene $Sing(\xi) \cap Sing(\mathbb{P}^n_w) = \varnothing$, entonces se satisface

$$\#Sing(\xi) = \frac{1}{w_0 \cdots w_n} \sum_{j=0}^{n} (d-1)^{n-j} \sigma_j(w).$$

Prueba. En virtud del corolario 2.3 basta demostrar la igualdad

$$\int_{\mathbb{P}^n_w} c_n(T\mathbb{P}^n_w \otimes \mathcal{O}_w(d-1)) = \frac{1}{w_0 \cdots w_n} \sum_{j=0}^{n} (d-1)^{n-j} \sigma_j(w).$$

Veamos eso. Pongamos $s = d-1$. En la sucesión de Euler

$$0 \to \underline{\mathbb{C}} \to \bigoplus_{i=0}^{n} \mathcal{O}_w(w_i) \to T\mathbb{P}^n_w \to 0,$$

tenemos $c(T\mathbb{P}^n_w) = c(\underline{\mathbb{C}})c(T\mathbb{P}^n_w) = c(\bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_w(w_i))$; lo cual conduce a

$$\begin{aligned}
c_n(T\mathbb{P}^n_w \otimes \mathcal{O}_w(s)) &= \sum_{j=0}^{n} c_j(T\mathbb{P}^n_w) c_1(\mathcal{O}_w(s))^{n-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n} c_j(\bigoplus_{i=0}^{n} \mathcal{O}_w(w_i)) c_1(\mathcal{O}_w(s))^{n-j}. \\
&= \sum_{j=0}^{n} s^{n-j} c_j(\bigoplus_{i=0}^{n} \mathcal{O}_w(w_i)) c_1(\mathcal{O}_w(1))^{n-j}. \quad (3.1)
\end{aligned}$$

Para calcular $c_j(\bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_w(w_i))$ ponemos $c_1(\mathcal{O}_w(1)) = h$, y tenemos entonces

$$\begin{aligned}
c(\bigoplus_{i=0}^{n} \mathcal{O}_w(w_i)) &= \prod_{i=0}^{n} c(\mathcal{O}_w(w_i)) = \prod_{i=0}^{n} (1 + c_1(\mathcal{O}_w(w_i))) \\
&= \prod_{i=0}^{n} (1 + w_i h) = 1 + \sum_{j=1}^{n+1} \sigma_j(w) h^j.
\end{aligned}$$

Así, en (3.1) tenemos

$$\begin{aligned} c_n(T\mathbb{P}^n_w \otimes \mathcal{O}_w(s)) &= s^n h^n + \sum_{j=1}^{n} s^{n-j} c_j(\bigoplus_{i=0}^{n} \mathcal{O}_w(w_i))h^{n-j} \\ &= s^n h^n + \sum_{j=1}^{n} s^{n-j}\sigma_j(w)h^j h^{n-j} \\ &= \big(s^n + \sum_{j=1}^{n} s^{n-j}\sigma_j(w)\big)h^n \\ &= \big(\sum_{j=0}^{n} s^{n-j}\sigma_j(w)\big)h^n. \end{aligned}$$

Gracias a ello la proposición 3.2 nos lleva a

$$\int_{\mathbb{P}^n_w} c_n(T\mathbb{P}^n_w \otimes \mathcal{O}_w(s)) = \frac{1}{w_0 \cdots w_n} \sum_{j=0}^{n} s^{n-j}\sigma_j(w).$$

□

En el siguiente corolario establecemos condiciones para que una foliación en $\mathbb{P}^n_w$ sea singular.

Corolario 3.5. *Sea $\mathcal{F}$ una foliación holomorfa de grado d y con singularidades aisladas en $\mathbb{P}^n_w$. Si se cumple $d > 0$ ó $d-1 \nmid \sigma_n(w)$, entonces se tiene $Sing(\mathcal{F}) \neq \varnothing$. Para $n = 2$ basta $d \geq 0$ para lograr $Sing(\mathcal{F}) \neq \varnothing$.*

En particular, cuando $\mathcal{F}$ es inducida por una sección holomorfa ξ de $T\mathbb{P}^n_w \otimes \mathcal{O}_w(d-1)$, si para algún i se cumple $w_i = 1$ y $deg(\xi_i) > 0$, entonces se tiene $Sing(\mathcal{F}) \neq \varnothing$.

Prueba. Bajo la primera condición, supongamos se satisfaga $Sing(\xi) = \varnothing$. Entonces por el corolario 3.4 tenemos $\sum_{j=0}^{n}(d-1)^{n-j}\sigma_j(w) = 0$; lo cual obviamente implica $d-1|\sigma_n$. Como $d > 0$ implica $\sum_{j=0}^{n}(d-1)^{n-j}P_j(w) > 0$, deducimos de paso que se cumple $d \leq 0$.

En el segundo caso es suficiente analizar $d = 0$. Para ello nuevamente supongamos se tenga $Sing(\xi) = \varnothing$. Entonces por el corolario 3.4 tenemos $1 = \sigma_1(w) - \sigma_2(w) \leq 0$, lo cual es una contradicción.

Bajo las hipótesis del caso particular tenemos $0 < deg(\xi_i) = d + w_i - 1 = d$. La primera parte conduce luego a $Sing(\xi) \neq \varnothing$. $\square$

Los siguientes dos corolarios brindan un nexo entre el conjunto singular de una foliación y el del espacio ambiente $\mathbb{P}^n_w$. Recordemos que se tiene

$$Sing(\mathbb{P}^n_w) = \{(0 : .. : \underbrace{1}_{i} : .. : 0)_w : w_i \neq 1\}.$$

Corolario 3.6. *Sea $\mathcal{F}$ una foliación holomorfa de grado d en $\mathbb{P}^2_w$ con singularidades aisladas.*
• *Si $w = (1, 1, k)$ con $1 < k \nmid d^2$, entonces $\mathcal{F}$ tiene una singularidad incluida en $\{(0 : 0 : 1)_w\} = Sing(\mathbb{P}^2_w)$.*
• *Sea $w = (1, 1, k)$ con $k > 1$, y supongamos se tenga $d \geq 0$. Entonces si $(0 : 0 : 1)_w$ es una singularidad no degenerada de $\mathcal{F}$, resulta que $\mathcal{F}$ admite por lo menos una singularidad adicional.*
• *Sea $d \neq 1$. Si las singularidades de $\mathcal{F}$ son todas no degeneradas, entonces $Sing(\mathcal{F}) \neq \{(1 : 0 : 0)_w, (0 : 1 : 0)_w, (0 : 0 : 1)_w\}$. (Compare con el ejemplo 3.9, abajo.)*

Prueba. Si en la primera parte suponemos que $\mathcal{F}$ no admite una singularidad en $(0 : 0 : 1)_w$, entonces por el corolario 3.4 se tiene $\frac{d^2}{k} + d + 1 = \frac{(d-1)^2 + (d-1)\sigma_1(w) + \sigma_2(w)}{k} \in \mathbb{Z}$; de donde en particular se concluye $k|d^2$.

Si en segunda parte nuevamente suponemos lo contrario, el corolario 3.4 entrega $\frac{1}{k} = \frac{d^2 + kd + k}{k}$; lo cual es imposible una vez que se tiene $k > 1$ y $d \geq 0$.

Si en la tercera parte suponemos lo contrario, el corolario 3.4 nos lleva a $\frac{1}{w_0} + \frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} = \frac{(d-1)^2 + (d-1)\sigma_1(w) + \sigma_2(w)}{w_0 w_1 w_2}$. Esto derivará en $d = 1$ o $d = 1 - \sigma_1(w)$. Como por hipótesis se tiene $d \neq 1$ se deberá satisfacer $d = 1 - \sigma_1(w)$. Pero ello contradice a $d > 1 - \text{Máx}\{w_i + w_j : i \neq j\} > 1 - \sigma_1(w)$, propiedad ya demostrada en la proposición 3.3. $\square$

Corolario 3.7. *Sea $\mathcal{F}$ una foliación holomorfa de grado d en $\mathbb{P}^n_w$ con singularidades aisladas y no degeneradas.*

- *Sea $n \geq 3$. Si $d \neq 1$ y $d-1 \nmid \sigma_{n-1}(w)$, entonces $Sing(\mathcal{F}) \neq \{(1 : .. : 0)_w, ..., (0 : .. : 1)_w\}$. (Compare con el ejemplo 3.9, abajo.)*
- *Si $d = 1$ (en este caso $\mathcal{F}$ es inducida por un campo global pues se tiene $H^0(\mathbb{P}^n_w, T\mathbb{P}^n_w \otimes \mathcal{O}_w(0)) \cong H^0(\mathbb{P}^n_w, T\mathbb{P}^n_w)$) y $w_i \nmid \sigma_n(w)$ para algún i, entonces se satisface $Sing(\mathcal{F}) \cap Sing(\mathbb{P}^n_w) \neq \varnothing$.*

Prueba. Para la primera afirmación supongamos que se tenga $Sing(\mathcal{F}) = \{(1 : .. : 0)_w, ..., (0 : .. : 1)_w\}$ con $d \neq 1$. Entonces por el corolario 3.4 se cumple $\frac{\sigma_n(w)}{w_0 ... w_n} = \frac{1}{w_0} + ... + \frac{1}{w_n} = \frac{(d-1)^n + ... + (d-1)\sigma_{n-1}(w) + \sigma_n(w)}{w_0 ... w_n}$; es decir se tendrá $d-1 | \sigma_{n-1}(w)$.

Ahora supongamos se cumple $d = 1$ y $Sing(\mathcal{F}) \cap Sing(\mathbb{P}^n_w) = \varnothing$. El corolario 3.4 nos lleva a $\frac{\sigma_n(w)}{w_0 ... w_n} = \sum \mathcal{I}_p(\xi) \in \mathbb{N}$, de donde pasamos a $w_0 ... w_n | \sigma_n(w)$, lo cual equivale a decir que todo w_i divide a $\sigma_n(w)$ pues los w_i son coprimos entre sí. $\square$

Ejemplo 3.8. Tomemos $w = (1, 1, 3)$, y consideremos el campo $\xi = Y^5 \frac{\partial}{\partial X} + X^5 \frac{\partial}{\partial Y} + YZ^2 \frac{\partial}{\partial Z}$ (con $d = 5$).

Primero calculemos las singularidades de la folición asociada. La igualdad

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ Y^5 & X^5 & YZ^2 \\ X & Y & 3Z \end{vmatrix} = 0,$$

nos lleva al sistema (en $\mathbb{C}^3 - \{0\}$):

$$\begin{aligned} 3ZX^5 &= Y^2Z^2 \\ 3ZY^5 &= XYZ^2 \\ Y^6 &= X^6, \end{aligned}$$

que tiene como solución $(X, \alpha X, 0)$ y $(X, \alpha X, 3\alpha^4 X^3)$, con $\alpha^6 = 1$, en U_0, y a $(0, 0, Z)$, donde $Z \neq 0$. (Nada novedoso aparece en U_1.) Al pasar al cociente, obtenemos

$$Sing(\mathcal{F}) = \{(1 : \alpha : 0)_w, (1 : \alpha : 3\alpha^4)_w, (0 : 0 : 1)_w\},$$

trece singularidades en total.

Ahora estudiaremos el campo ξ localmente. En $U_0 = \{X \neq 0\}$, tenemos $\pi_*(\xi)\frac{\partial}{\partial X} = -\frac{1}{X}(Y\frac{\partial}{\partial y} + 3Z\frac{\partial}{\partial z})$, $\pi_*(\xi)\frac{\partial}{\partial Y} = \frac{1}{X}\frac{\partial}{\partial y}$ y $\pi_*(\xi)\frac{\partial}{\partial Z} = \frac{1}{X}\frac{\partial}{\partial z}$. Trasladando estas expresiones en ξ con $X = 1$, tenemos la expresión local $\tilde{\xi}$ de ξ en U_0 dada por

$$\tilde{\xi} = (1 - y^6)\frac{\partial}{\partial y} + (yz^2 - 3zy^5)\frac{\partial}{\partial z}.$$

(En la práctica, la expresión local del campo ξ en U_0 puede ser obtenida sustituyendo la expresión de $\mathcal{R}_w = X\frac{\partial}{\partial X} + Y\frac{\partial}{\partial Y} + 3Z\frac{\partial}{\partial Z} = 0$ en ξ, con $X = 1$). Con esta expresión obtenemos

$$det(J\tilde{\xi}) = \begin{vmatrix} -6y^5 & 0 \\ z^2 - 15zy^4 & 2yz - 3y^5 \end{vmatrix} = -6y^5(2yz - 3y^5).$$

Claramente $(y, z) = (\alpha, 0), (\alpha, 3\alpha^4)$ son singularidades no degeneradas. Así $\mathcal{I}_{(\alpha,0)}(\xi) = \mathcal{I}_{(\alpha,3\alpha^4)}(\xi) = 1$, lo que implica que la suma de índices (en el abierto U_0) es igual a 12 (pues son 12 las singularidades).

En $U_2 = \{Z \neq 0\}$, de $\mathcal{R}_w = 0$ pasamos a $\frac{\partial}{\partial Z} = -\frac{1}{3}(X\frac{\partial}{\partial X} + Y\frac{\partial}{\partial Y})$. La expresión local para ξ en U_2 resulta ser

$$\tilde{\xi} = (y^5 - \frac{1}{3}xy)\frac{\partial}{\partial x} + (x^5 - \frac{1}{3}y^2)\frac{\partial}{\partial y}.$$

En este caso se tiene

$$det(J\tilde{\xi}) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3}y & 5y^4 - \frac{1}{3}x \\ 5x^4 & -\frac{2}{3}y \end{vmatrix} = \frac{2}{9}y^2 - 5x^4(5y^4 - \frac{1}{3}x).$$

Acá únicamente interesa la singularidad $(x, y) = (0, 0)$, la cual es degenerada y cuyo índice está dado por definición por $\mathcal{I}_{(0,0)}(\xi) = \frac{7}{3}$. Una vez que $\sum_{\xi(p)=0} \mathcal{I}_p(\xi) = \frac{43}{3}$, el corolario 3.4 queda ratificado.

Ejemplo 3.9. Sean $w_0, ...w_n \in \mathbb{Z}^+$ coprimos de a dos. Supongamos se tenga $w_i \neq w_j$ cuando $i \neq j$. Consideremos el campo

$$X = \sum_{k=0}^{n} Z_k \frac{\partial}{\partial Z_k} \in H^0(\mathbb{P}^n_w, T\mathbb{P}^n_w)$$

(acá $d = 1$).

En la carta afín $Z_i \neq 0$ (donde fijamos $Z_i = 1$), de

$$\mathcal{R}_w = \sum_{k=0}^{n} w_k Z_k \frac{\partial}{\partial Z_k} = 0$$

se pasa a

$$\frac{\partial}{\partial Z_i} = -\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{w_k}{w_i} Z_k \frac{\partial}{\partial Z_k},$$

lo que proporciona la expresión local de X en U_i dada por

$$X_i = \sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \left(1 - \frac{w_k}{w_i}\right) Z_k \frac{\partial}{\partial Z_k}.$$

Se observa que el origen es la única singularidad, no degenerada además.

Resumiendo, tenemos

$$Sing(\mathcal{F}) = \big\{(1:0:\cdots:0)_w, \cdots, (0:0:\cdots:1)_w\big\}.$$

Obtenemos entonces

$$\sum_{p:X(p)=0} \mathcal{I}_p(X) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{w_i} = \frac{\sigma_n(w)}{w_0, \ldots, w_n} = \frac{\sum_{j=0}^{n}(d-1)^{n-j}\sigma_j(w)}{w_0 \cdots w_n},$$

y así el corolario 3.4 es satisfecho ($d = 1$).

Corolario 3.10. *Sea ξ una sección holomorfa de $T\mathbb{P}^2_w \otimes \mathcal{O}_w(d-1)$ cuyas singularidades son todas aisladas. Entonces se cumple*

$$\sum_{\xi(p)=0} \mathcal{BB}(\mathcal{F}, p) = \frac{1}{w_0 w_1 w_2}(|w| + d - 1)^2.$$

Prueba. De acuerdo con el teorema 2.1 basta con demostrar la igualdad

$$\int_{\mathbb{P}^2_w} c_1^2(T\mathbb{P}^2_w - \mathcal{O}_w(1-d)) = \frac{1}{w_0 w_1 w_2}(|w| + d - 1)^2.$$

Pongamos $s = d - 1$ y $h = c_1(\mathcal{O}_w(1))$. En efecto, de la proposición 3.2 se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{P}^2_w} c_1^2(T\mathbb{P}^2_w - \mathcal{O}_w(1-d)) &= \int_{\mathbb{P}^2_w} \big(c_1(T\mathbb{P}^2_w) + c_1(\mathcal{O}_w(d-1))\big)^2 \\
&= \int_{\mathbb{P}^2_w} \big(|w|h + sh\big)^2 \\
&= \int_{\mathbb{P}^2_w} (|w| + s)^2 h^2 \\
&= (|w| + s)^2 \int_{\mathbb{P}^2_w} h^2 \\
&= \frac{1}{w_0 w_1 w_2} (|w| + s)^2.
\end{aligned}$$

□

Sea ξ una sección holomorfa de $T\mathbb{P}^2_\omega \otimes \mathcal{O}_\omega(d-1)$ con singularidades aisladas. Sea $\mathcal{F}$ la foliación inducida por ξ. Dado $p \in Sing(\mathcal{F})$, diremos que p **es una singularidad radial** si localmente (es decir, vía una carta orbifold) el campo ξ es de la forma

$$x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + \cdots .$$

Corolario 3.11. *Sea $\mathcal{F}$ una foliación holomorfa de grado d en $\mathbb{P}^2_w$ con singularidades aisladas. Si todas las singularidades son radiales, entonces se satisface*

$$d = \frac{1}{3}\left(3 - \sigma_1(w) \pm 2\sqrt{\sigma_1(w)^2 - 3\sigma_2(w)}\right).$$

En particular si $w_0 = w_1 = w_2 = 1$, entonces se tiene $d = 0$; y si $w_0 = w_1 = 1$ y $w_2 = k$, entonces $d = \frac{k-1}{3}$ o $d = 1 - k$.

Prueba. Puesto que cada singularidad es localmente radial, tenemos

$\mathcal{BB}(\mathcal{F}, p) = 4\,\mathcal{I}_p(\xi)$ para todo $p \in \mathbb{P}^2_w$. De esta manera se logra

$$\begin{aligned}
\frac{1}{w_0 w_1 w_2}(|w| + d - 1)^2 &= \sum_{\xi(p)=0} \mathcal{BB}(\mathcal{F}, p) \\
&= 4 \sum \mathcal{I}_p(\xi) \\
&= 4\,\frac{(d-1)^2 + (d-1)\sigma_1(w) + \sigma_2(w)}{w_0 w_1 w_2}.
\end{aligned}$$

Tenemos entonces $3(d-1)^2 + 2\sigma_1(w)(d-1) + 4\sigma_2(w) - \sigma_1(w)^2 = 0$, y el resultado se sigue directamente. $\square$

Ejemplo 3.12. El campo $X = -k\frac{\partial}{\partial Z_2}$ en $\mathbb{P}(1, 1, k)$, con $k > 1$, tiene grado $d = 1 - k$ y admite una única singularidad, que es de tipo radial en la carta $U_2(Z_2 = 1)$. Obsérvese que se cumple $d > 1 - \text{Máx}\{w_i + w_j : i \neq j\} = -k$.

Corolario 3.13. *Sea $\mathcal{F}$ una foliación holomorfa de grado d en $\mathbb{P}(a^2 - b^2 + c, a^2 - 2ab + c, c)$ con singularidades aisladas radiales. Entonces $3 \nmid 2a - b$ implica $d = 1 + b^2 - c$.*

Prueba. En la expresión

$$d = \frac{1}{3}\left(3 - \sigma_1(\omega) \pm 2\sqrt{\sigma_1(\omega)^2 - 3\sigma_2(\omega)}\right),$$

una vez que $w_0 = a^2 - b^2 + c$, $w_1 = a^2 - 2ab + c$ y $w_2 = c$ tenemos $\sigma_1(\omega)^2 - 3\sigma_2(\omega) = (a^2 + b^2 - ab)^2$. Ello implica $d = 1 - c + b^2$ o $d = 1 - c - \frac{1}{3}(2a - b)^2$, y el resultado se sigue de inmediato. $\square$

Agradecimientos. Quiero agradecer de manera muy especial a mis orientadores de doctorado en la Universidad Federal de Minas Gerais UFMG (Brasil): Maurício Corrêa Jr. y Márcio Gomes Soares. Agradezco también al profesor Arturo Fernández Pérez de la UFMG por las valiosas conversaciones durante mi doctorado.

Referencias

[1] Raimund Blache, *Chern classes and Hirzebruch-Riemann-Roch Theorem for coherent sheaves on complex-projective orbifolds with isolated singularities.* Mathematische Zeitschrift. **222** (1996), Vol. 222, 7 – 57.

[2] Raoul Bott, *Vector Fields and Characteristic Numbers.* The Michigan Mathematical Journal. (1967), vol 14, 231 – 244.

[3] Maurício Corrêa Jr., Miguel Rodríguez Peña y Marcio G. Soares, *A Bott-Type Residue Formula on Complex Orbifolds.* International Mathematics Research Notices Advance Access published. (2015).

[4] Maurício Corrêa Jr. y Márcio G. Soares, *A Note on Poincaré's Problem for Quasi-Homogeneous Foliations.* Proceedings of the American Mathematical Society. **9** (2012), vol 140, 3145 – 3150.

[5] Igor Dolgachev, *Weighted Projective Varieties.* Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag. (1982), Vol. 956.

[6] Phillip Griffiths y Joseph Harris, *Principles of Algebraic Geometry.* Harvard University. (1978).

[7] Etienne Mann, *Cohomologie quantique orbifolde des espaces projectifs à poids.* J. Algebraic Geom. **17** (2008), 137 – 166.

[8] David Prill, *Local classification of quotients of complex manifolds by discontinuous groups.* Duke Mathematical Journal. **34** (1967), 375 – 386.

[9] Arnulfo Miguel Rodríguez Peña, *Fórmulas residuais de tipo Bott e invariante de Futaki para orbifolds complexos.* Tesis doctoral. Universidad Federal de Minas Gerais. (2014).

[10] ICHIRO SATAKE, *The Gauss-Bonnet Theorem for V-manifolds.* Journal of the Mathematical Society of Japan. **4** (1957), Vol. 9.

[11] WILLIAM P. THURSTON, *The Geometry and Topology of Three-Manifolds.* Princeton University Press. (1997).

Abstract: We present (without proof) a version of Bott theorem for compact complex orbifolds with isolated singularities. Then we deduce some important consequences of this theorem, and finally we give some applications to holomorphic foliations on weighted projective spaces.

Keywords: Orbifold, weighted projective spaces, foliations.

A. Miguel Rodríguez
ICEX - UFMG
Departamento de Matemática
Av. Antônio Carlos 6627
30123-970 Belo Horizonte MG, Brazil

DEMAT - UFSJ
Departamento de Matemática y Estadística
Praça Frei Orlando 170, Centro
36307-352 São João Del-Rei MG, Brazil.

miguel.rodriguez.mat@ufsj.edu.br