Estructura de los grupos abelianos ordenados

Francisco Ugarte Guerra[1,2]

Julio, 2015

Resumen

Este trabajo presenta las notaciones y resultados básicos de la teoría de grupos abelianos ordenados necesarios para establecer el teorema de Hahn, el cual describe la estructura de este tipo de grupos. Además presentamos una prueba simple del teorema de Hahn para grupos ordenados de rango finito y algunos resultados sobre la minimalidad de la inmersión descrita en el teorema

MSC(2010): 06F20, 20F60.

Palabras clave: *grupos ordenados, subgrupos aislados, esqueleto de un grupo, teorema de Hahn.*

[1] *Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias, PUCP.*
[2] *Proyecto DGI: 0038-2012.*

1. Introducción

Este trabajo es esencialmente una recopilación de resultados de la teoría de grupos abelianos ordenados. Acá recogemos las notaciones y resultados básicos necesarios para establecer el teorema de Hahn, el mismo que describe la estructura de este tipo de grupos.

El teorema de Hahn [7] establece que todo grupo abeliano totalmente ordenado puede sumergirse en un subgrupo aditivo de una potencia de los números reales con el orden lexicográfico, es decir, en un subconjunto del producto cartesiano usual de copias de $\mathbb{R}$ (ver definición más adelante), y es, sin duda, una herramienta fundamental para la clasificación de grupos abelianos ordenados. La prueba del teorema apareció por primera vez en ([5]) y se desarrolla a lo largo de 27 páginas; a ella Clifford la califica de "maratón transfinita"(ver [2]). Cincuenta años más tarde, Hausner y Wendel ([6]) logran una demostración más simple, pero válida solo cuando G es un espacio vectorial real ordenado. Por último, Ribenboim ([7]) utiliza un resultado de álgebra lineal de Banachewski para dar una demostración simple del teorema.

Añadiremos una prueba simple del teorema de Hahn en el caso particular de grupos de rango finito y algunos resultados sobre la minimalidad de la inmersión sugerida por el teorema.

2. Definiciones y propiedades básicas

En esta sección presentamos las definiciones, los resultados y la notación que utilizamos en el artículo. Hemos omitido las demostraciones que no consideramos interesantes o que aparecen en otros lugares.

2.1. Producto de Hahn de una familia de grupos

Comenzaremos con la notación a ser utilizada al considerar productos de grupos. Partimos de una familia $\{G_i\}_{i\in I}$ de grupos abelianos. Como es habitual, representaremos su producto directo por $\prod_{i\in I} G_i$ y $\pi_j : \prod_{i\in I} G_i \to G_j$, dada por $\pi_j((g_i)_{i\in I}) = g_j$, la **proyección** j−ésima. Para cada elemento $\underline{g} \in \prod_{i\in I} G_i$, llamaremos **soporte de** $\underline{g}$ a

$$Sop(\underline{g}) = \{i \in I \mid \pi_i(\underline{g}) \neq 0\};$$

con esta notación la suma directa de la familia $\{G_i\}_{i\in I}$ es

$$\bigoplus_{i\in I} G_i = \{\underline{g} \in \prod_{i\in I} G_i \mid \sharp(Sop(\underline{g})) < \infty\}.$$

Si I es un conjunto totalmente ordenado, pondremos $\overline{I} = I \cup \{\infty\}$ y consideraremos el orden en $\overline{I}$ como el orden de I junto con $i < \infty$ para todo $i \in I$.

Para todo $\underline{g} \in \prod_{i\in I} G_i$ tal que $Sop(\underline{g})$ tiene mínimo definimos **el orden de** $\underline{g}$ como $\circ(\underline{g}) = \text{mín}\{Sop(\underline{g})\}$, es decir, $\circ(g) = i$ si y solo si $\pi_i(\underline{g}) \neq 0$ y $\pi_j(\underline{g}) = 0$ para $j < i$. Por convención aceptaremos que se cumple $Sop(\underline{0}) = \phi$ y $\circ(\underline{0}) = \infty$.

De la definición anterior se desprenden las siguientes propiedades para el orden de $\underline{g}$.

- Si $\underline{g} \in \bigoplus_{i\in I} G_i$, entonces $\underline{g}$ tiene siempre orden.
- Si $Sop(\underline{g})$ está bien ordenado, entonces tiene un mínimo y $\underline{g}$ tiene orden.
- Si I está bien ordenado, entonces para cada $g \in \prod_{i\in I} G_i$ o bien $\underline{g} \neq 0$ y su soporte está bien ordenado o, en su defecto, $\underline{g} = 0$. En otras palabras, para cada $\underline{g} \in \prod_{i\in I} G_i$ existe $\circ(\underline{g})$.

Sea $\underline{g} \in \prod_{i \in I} G_i \setminus \{\underline{0}\}$ tal que exista el orden de $\underline{g}$. Llamamos **inicial de** $\underline{g}$ al elemento $in(\underline{g}) = \pi_i(\underline{g}) \in G_i$, donde $i = \circ(\underline{g})$. Por convención pondremos $in(\underline{0}) = 0$.

Definición 2.1. Dada una familia de grupos abelianos $\{G_i\}_{i \in I}$ con I un conjunto totalmente ordenado, llamamos **producto de Hahn de la familia** a

$$\mathop{\mathrm{H}}_{i \in I} G_i = \{\underline{g} \in \prod_{i \in I} G_i \mid Sop(\underline{g}) \subset I \text{ bien ordenado}\} \cup \{\underline{0}\}.$$

Proposición 2.2. *El conjunto* $\mathop{\mathrm{H}}_{i \in I} G_i$ *es un subgrupo de* $\prod_{i \in I} G_i$ *que contiene a su vez como subgrupo a* $\bigoplus_{i \in I} G_i$*. En consecuencia, contiene como subgrupos a todos los* G_i*. Si* I *está bien ordenado, entonces se tiene* $\mathop{\mathrm{H}}_{i \in I} G_i = \prod_{i \in G} G_i$*, y si* I *es finito, se cumple* $\bigoplus_{i \in I} G_i = \mathop{\mathrm{H}}_{i \in I} G_i = \prod_{i \in I} G_i$*.* $\square$

La proposición es consecuencia de que una unión finita de conjuntos bien ordenados es bien ordenada.

2.2. Grupos divisibles

Recordemos que un grupo G se dice **divisible** cuando para cada $g \in G$ y cada $n \in \mathbb{N}$ no nulo existe $g' \in G$ con el cual se cumple $ng' = g$.

Ejemplo 2.3. El grupo $\mathbb{Z}$ no es divisible pero en cambio $\mathbb{Q}$ sí lo es. El hecho de que G sea divisible significa que la ecuación $nx = g$ con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ tiene solución para cada $g \in G$. Notemos que no se afirma que esa solución sea única. Por ejemplo, el grupo $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ es divisible porque todo elemento de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ admite una escritura de la forma $\dfrac{a}{b} + \mathbb{Z}$ con $b > 0$ y $b > |a|$ y a, b relativamente primos. De este modo, para cada $\alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ con $\alpha = \dfrac{a}{b} + \mathbb{Z}$ se cumple $n\left(\dfrac{a}{bn} + \mathbb{Z}\right) = \alpha$. Sin embargo, este elemento no es único pues basta observar que la igualdad $n\left(\left(\dfrac{a}{bn}+\dfrac{1}{n}\right)+\mathbb{Z}\right)=\alpha$ abre camino muchas soluciones.

Proposición 2.4. *Para un grupo abeliano G son equivalentes:*

i. *G es divisible sin torsión,*

ii. *para todo $g\in G$ y cada $n\in\mathbb{N}-\{0\}$ se cumple que la ecuación $nx=g$ tiene una única solución en G,*

iii. *G admite una estructura de $\mathbb{Q}$-espacio vectorial que extiende su estructura natural de $\mathbb{Z}$ módulo.*

Demostración. Como G es divisible, la ecuación $nx=g$ tiene solución y, si g_1 y g_2 son soluciones, $g=ng_1=ng_2$ implica $n(g_1-g_2)=0$. Como G no tiene torsión, se obtiene $g_1-g_2=0$. Luego i implica ii.

Definimos $\frac{m}{n}g$ como la única solución de la ecuación $nx=mg$. Resulta inmediato que con la ley externa así definida estamos ante un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial. Así hemos verificado que ii implica iii.

Como G es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial, se sigue que no tiene torsión, pues $ng=0$ con $n\neq 0$ implica $0=\frac{1}{n}(ng)=g$. Por otro lado G es divisible gracias a la igualdad $n(\frac{1}{n}g)=g$. Por tanto iii implica i. □

Veamos ahora que todo grupo abeliano sin torsión se puede sumergir en un grupo divisible.

Proposición 2.5. *Si G es un grupo abeliano sin torsión, existe un grupo $\overline{G}$ divisible y un homomorfismo inyectivo de grupos $l:G\to\overline{G}$ tales que para todo grupo abeliano sin torsión H y para todo homomorfismo $f:G\to H$ podemos encontrar un único homomorfismo de grupos $t:\overline{G}\to H$ tal que $t\circ l=f$.*

Demostración. Formamos el conjunto $\mathbb{Z}^+\times G$ ($\mathbb{Z}^+=\{n\in\mathbb{Z}\mid n>0\}$), y definimos la relación $(n_1,g_1)\sim(n_2,g_2)$ cuando $n_2g_1=n_1g_2$. Es inmediato que $\sim$ es una relación de equivalencia.

Si ponemos $\overline{G} = \mathbb{Z}^+ \times G/\sim$ y representamos con $\dfrac{g}{n}$ la clase de (n, g), resulta que $\overline{G}$ es un grupo con la operación

$$\frac{g_1}{n_1} + \frac{g_2}{n_2} = \frac{n_2 g_1 + n_1 g_2}{n_1 n_2}.$$

Observamos que así $\overline{G}$ es divisible y la aplicación $l : G \to \overline{G}$, definida mediante $l(g) = \dfrac{g}{1}$, resulta un homomorfismo inyectivo.

Por otro lado, si H es divisible y $f : G \to H$ es un homomorfismo, basta definir $t : \overline{G} \to H$ al poner $t\left(\dfrac{g}{n}\right) \in H$ como la única solución en H de la ecuación $nx = f(g)$ para conseguir el fin buscado. $\square$

Como consecuencia tenemos que todo grupo G abeliano sin torsión se puede sumergir en un grupo divisible sin torsión $\overline{G}$. Al grupo $\overline{G}$ lo llamaremos **cierre divisible de** G.

El hecho de que el cierre divisible del producto de Hahn $\coprod_{i \in I} G_i$ sea el producto de Hahn de los cierres divisibles de G_i, es decir, que se satisfaga $\coprod_{i \in I} \overline{G}_i = \overline{\coprod_{i \in I} G_i}$, queda como ejercicio para el lector.

Observación 2.6. En virtud de la definición de la ley externa en $\overline{G}$, tenemos que se satisface $\dfrac{m}{n}\dfrac{g}{r} = \dfrac{mg}{nr}$.

También, al tomar diversos $\dfrac{g_i}{n_i}, \ldots, \dfrac{g_r}{n_r} \in \overline{G}$ conviene definir $n = n_1 \cdots n_r$ y $n_i' = n/n_i$. Luego, al usar la igualdad $\dfrac{g_i}{n_i} = \dfrac{n_i' g_i}{n}$, se obtiene

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{g_i}{n_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{r} n_i' g_i.$$

A esta última técnica se le conoce con el nombre de **reducción a denominador común.**

Lema 2.7. *Sea G un grupo abeliano sin torsión. Si H es un subgrupo de G y $L(H)$ es el subespacio vectorial de $\overline{G}$ generado por H, entonces $\alpha \in \overline{G}$ pertenece a $L(H)$ si y solo si existe un número natural n con el cual se tiene $n\alpha \in H$.*

Demostración. Por definición, si $\alpha \in L(H)$, existen $\dfrac{m_1}{n_1}, \ldots, \dfrac{m_r}{n_r} \in \mathbb{Q}$, con $m_i > 0$ y $g_1, \ldots, g_r \in H$, sujetos a

$$\alpha = \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{n_i} \frac{g_i}{1}.$$

Por reducción a denominador común esto es igual a $\dfrac{h}{n}$ para cierto $h \in G$ y $n \in \mathbb{N}$. De ahí se justifica $n\alpha = h \in H$.

Recíprocamente, si $n\alpha \in H$, entonces $n\alpha \in L(H)$, de donde se obtiene $\alpha \in L(H)$. $\square$

Podemos establecer correspondencias ida y vuelta entre $S(G)$, la colección de subgrupos G, y $\mathcal{L}(\overline{G})$, la colección de subespacios de $\overline{G}$ de la siguiente manera.

- $L : S(G) \to \mathcal{L}(\overline{G})$ asocia a cada subgrupo H de G el subespacio $L(H)$ de $\overline{G}$ generado por H,
- $\Delta : \mathcal{L}(\overline{G}) \to S(G)$ asocia a cada subespacio $T \in \mathcal{L}(\overline{G})$ el grupo $\Delta(T) = T \cap G$.

Claramente $H_1 \subset H_2$ implica $L(H_1) \subset L(H_2)$ y $T_1 \subset T_2$ implica $\Delta(T_1) \subset \Delta(T_2)$. Sin embargo L y Δ no son inversas una de la otra aunque siempre se cumpla $L\Delta(T) = T$. En efecto, siempre se cumple $L\Delta(T) \subset T$ puesto que T es subespacio de $\mathcal{L}(\overline{G})$, se satisface $\Delta(T) \subset T$ y $L\Delta(T)$ es el menor subespacio que contiene a $\Delta(T)$. Por el otro lado, dado $h \in T$, al ser G es un sistema de generadores de $\overline{G}$, se satisface

$$h = \frac{m_1}{n_1} g_1 + \ldots + \frac{m_r}{n_r} g_r = \frac{g}{n} \in T.$$

para cierto $g \in G$ y n entero positivo. Luego,$g = nh \in T \cap G = \Delta(T)$, lo cual implica $h \in L\Delta(T)$.

Que no siempre $\Delta L(H)$ y H coincidan se comprueba, por ejemplo, al tomar $G = \mathbb{Z}$. En tal caso se tiene $\overline{G} = \mathbb{Q}$ y al definir $H = 2\mathbb{Z} \in S(\mathbb{Z})$ se obtiene $\Delta L(H) = \mathbb{Z} \neq H$.

2.3. Grupos ordenados

Definición 2.8. Un grupo abeliano es **ordenado** si es ordenado como conjunto y $g, h \geq 0$ implica $g + h \geq 0$.

Si el orden es total, diremos que G es **un grupo abeliano totalmente ordenado**. Aquí solo trabajaremos con grupos totalmente ordenados, por lo cual en lo general omitiremos la palabra totalmente.

Definición 2.9. Sean $(G, +, \leq)$ y $(G', +, \leq)$ grupos abelianos ordenados. Decimos que un homomorfismo $\varphi : G \to G'$ es un **homomorfismo creciente de grupos ordenados** si $g_1 \leq g_2$ (en G) implica $\varphi(g_1) \leq \varphi(g_2)$ (en G').

Lema 2.10. *Un grupo abeliano $(G, +, \leq)$ es totalmente ordenado si y solo si existe un subconjunto $S \subset G$, al que en lo sucesivo llamaremos* **cono positivo** *, que cumple las siguientes propiedades:*

- $S \cup -S = G$,
- $S \cap -S = \{0\}$,
- *para cada $g_1, g_2 \in S$ se tiene $g_1 + g_2 \in S$.*

Demostración. En un sentido, si G es totalmente ordenado, basta definir $S = \{g \in G \text{ con } g \geq 0\}$. Este S satisface la primera condición ya que $\leq$ es un orden total, la segunda por la propiedad antisimétrica del orden y la tercera porque G es un grupo ordenado.

En el otro sentido, si $S \subset G$ satisface las tres propiedades, ponemos $g_1 \leq g_2$ cuando $g_2 - g_1 \in S$. Claramente $\leq$ satisface los axiomas de orden. Por ejemplo se tiene $g_1 \leq g_1$, pues $g_1 - g_1 = 0 \in S$. Además si se satisface $g_1 \leq g_2$ y $g_2 \leq g_1$, entonces para $h = g_1 - g_2$, se tiene $h \in S$ y $-h \in S$, es decir $h \in S \cap -S = \{0\}$, con lo cual concluimos $g_1 = g_2$, También $g_1 \leq g_2$ y $g_2 \leq g_3$ implican $g_1 - g_2 \in S$ y $g_2 - g_3 \in S$, y de ahí se pasa a $(g_1 - g_2) + (g_2 - g_3) = g_1 - g_3 \in S$, es decir, a $g_1 \leq g_3$. Notemos que este orden es total pues, dados $g_1, g_2 \in G$, se tiene $g_1 - g_2 \in G = S \cup -S$.

Si suponemos $g_1 - g_2 \in S$, entonces se tiene $g_1 - g_2 \geq 0$ y tal como el orden ha sido definido obtenemos $g_1 \leq g_2$. $\square$

Un homomorfismo de grupos ordenados $f : G \to G'$ es creciente si y solo si $f(S) \subset S'$ donde S y S' son, respectivamente, los conos positivos de G y G'.

Lema 2.11. *Un grupo abeliano totalmente ordenado no tiene torsión.*

Demostración. Sea $g \neq 0$ y $n > 0$. Como el grupo es totalmente ordenado, se cumple $g > 0$ o $g < 0$. Si $g > 0$, entonces se tiene que $n \cdot g = g + \cdots + g > 0$. De forma análoga, de $g < 0$ se infiere $n \cdot g < 0$. Como para $n < 0$ se tiene $ng = 0$ si y solo si $(-n)g = 0$, se obtiene el resultado. $\square$

La siguiente proposición establece que cuando G es un grupo abeliano totalmente ordenado, el grupo $\overline{G}$ (el cierre divisible de G, ver proposición 2.5) acepta un orden con el cual $\overline{G}$ es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial ordenado y el homomorfismo de inmersión $l : G \to \overline{G}$ es creciente.

Proposición 2.12. *Si G es un grupo abeliano totalmente ordenado, entonces su cierre divisible $\overline{G}$ se puede ordenar de modo que el homomorfismo $l : G \to \overline{G}$ sea un homomorfismo creciente de grupos ordenados.*

Demostración. Para definir el orden de $\overline{G}$, por el Lema 2,1, basta considerar como conjunto de elementos positivos a

$$S' = \left\{ \frac{g}{n} \in \overline{G} \text{ con } g \geq 0 \text{ y } n \in \mathbb{Z}^+ \right\} \subset \overline{G}.$$

Con ello la condición $\frac{g_1}{n_1} \leq \frac{g_2}{n_2}$ equivale a $\frac{g_1}{n_1} - \frac{g_2}{n_2} = \frac{n_2 g_1 - n_1 g_2}{n_1 n_2} \in S'$, que a su vez es lo mismo que la condición $n_2 g_1 - n_1 g_2 \geq 0$.

Para establecer la segunda afirmación basta definir $l(g) = \frac{g}{1}$. $\square$

Definición 2.13. Un grupo abeliano G totalmente ordenado es **arquimediano** cuando para cada $\alpha, \beta \in G$ con $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ para el cual se tiene $n\beta \geq \alpha > (n-1)\beta$.

Lema 2.14. *Sea G un grupo abeliano ordenado. Entonces G es arquimediano si y solo si es isomorfo a un subgrupo de* $(\mathbb{R}, +)$.

Demostración. Fijemos $\alpha \geq 0$ en G. Tomemos $\beta > 0$. Como G es arquimediano, para cada n existe $m(n)$ con el cual se tiene

$$m(n)\alpha \geq n\beta > (m(n) - 1)\alpha.$$

Un poco de manipulación estándar implica

$$\frac{m(n+1)}{n+1} > \frac{m(n)}{n} - \frac{1}{n} \qquad \text{y} \qquad \frac{m(n)}{n} > \frac{m(n+1)}{n+1} - \frac{1}{n+1},$$

de lo cual se sigue de inmediato que la secuencia $\left\{\dfrac{m(n)}{n}\right\}$ es de Cauchy. Si ponemos $f(\beta) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{m(n+1)}{n+1}$, es fácil ver que con $f(-\beta) = -f(\beta)$, éste se extiende a un homomorfismo sobreyectivo. Una prueba alternativa puede encontrarse en [7] $\square$

Observación 2.15. Si G es un grupo abeliano sin torsión que satisface $\sharp(G) \leq \sharp(\mathbb{R})$ (para las cardinalidades), entonces $\overline{G}$ admite una base B como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial con $\sharp(B) \leq \sharp(\mathbb{R})$. Al tenerse $dim_{\mathbb{Q}}\mathbb{R} = \sharp(\mathbb{R})$, podemos seleccionar una parte libre B' de $\mathbb{R}$ con $\sharp(B') = \sharp(B)$. Entonces si $f : B \to B'$ es una biyección, se sigue que f induce un isomorfismo de $\mathbb{Q}$-espacios vectoriales entre $\overline{G}$ y $L(B')$, el subespacio de $\mathbb{R}$ generado por B'. Este isomorfismo permite ordenar $\overline{G}$ y brindarle de paso a su subgrupo G una estructura de grupo ordenado arquimediano.

Proposición 2.16. *Si $\{G_i\}_{i\in I}$ es una familia de grupos abelianos ordenados con I conjunto totalmente ordenado, entonces a $\coprod\limits_{i\in I} G_i$ se le puede dotar de una estructura de grupo ordenado con la cual los morfismos $G_i \to \coprod\limits_{i\in I} G_i$ son crecientes.*

Demostración. Al poner

$$S = \{\underline{g} \in \coprod_{i\in I} G_i \mid in(\underline{g}) > 0\} \cup \{0\},$$

las propiedades de los conos positivos para $\coprod_{i\in I} G_i$ (ver lema 2.10) se cumplen trivialmente.

Que las inyecciones sean crecientes es obvio pues resulta trivial que los conos positivos son los llevados al conjunto S definido arriba. $\square$

Observación 2.17. Como consecuencia de la proposición resulta que el homomorfismo $\bigoplus_{i\in I} G_i \to \coprod_{i\in I} G_i$ es creciente siempre que en la suma directa se tome el orden lexicográfico.

Proposición 2.18. *Todo grupo abeliano sin torsión admite un orden compatible con la estructura de grupo.*

Demostración. Todo grupo abeliano sin torsión G se puede sumergir en su cierre divisible $\overline{G}$, que es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial. Si $B = \{v_i\}_{i\in I}$ es una base de $\overline{G}$, podemos identificar $\bigoplus_{i\in I} \mathbb{Q} \approx \overline{G}$. Al ser $\mathbb{Q}$ ordenado, la observación anterior garantiza que en $\overline{G}$ existe un orden compatible con la estructura de grupo. Este orden en $\overline{G}$ induce un orden en G. $\square$

Observación 2.19. Si G es grupo abeliano sin torsión y $\sharp(G) \leq \sharp(\mathbb{R})$, entonces $\sharp(B) \leq \sharp(\mathbb{R})$ y podemos elegir una familia de números reales $\mathbb{Q}$-independientes $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ de manera que el homomorfismo φ de G en $\mathbb{R}$ definido como $\varphi(\sum r_i g_i) = \sum r_i\alpha_i$ es inyectivo e induce un orden arquimediano en G. Como el orden de la proposición anterior es claramente no arquimediano, entonces los dos órdenes son distintos y, en cierto sentido, son los órdenes extremos que se pueden definir en G.

2.4. Subgrupos aislados

Si partimos de un grupo G ordenado vamos a introducir un tipo de subgrupo de G que nos permitirá distinguir si el orden de G se aproxima más al de $\mathbb{R}$ o al de una suma directa de copias de $\mathbb{Q}$.

Definición 2.20. Sea Γ un grupo abeliano totalmente ordenado. Diremos que $\Gamma_0 \subset \Gamma$ es un **subgrupo convexo** de Γ (también llamado **aislado**) si dados $a, b \in \Gamma_0$, la condición $a \leq x \leq b$ implica $x \in \Gamma_0$.

Definición 2.21. Llamamos **segmento de extremos** a **y** b al conjunto

$$[a, b] = \{x \in \Gamma \text{ tal que } a \leq x \leq b\}.$$

Con esta notación Γ_0 es aislado cuando para cada $a, b \in \Gamma_0$ se satisface $[a, b] \subset \Gamma_0$, de aquí el nombre de convexo.

Se verifican las siguientes propiedades, cuya prueba dejamos en manos del lector.

Lema 2.22. *Para un grupo abeliano totalmente ordenado* Γ *se satisfacen las siguientes propiedades.*

- *Un subgrupo* $\Gamma_0 \subset \Gamma$ *es aislado si y solo si* $0 < x \leq a$ *con* $a \in \Gamma_0$ *implica* $x \in \Gamma_0$.
- *Un subgrupo* $\Gamma_0 \subset \Gamma$ *es aislado si y solo si en* Γ/Γ_0 *la relación* $\leq$ *definida como* $x + \Gamma_0 \leq y + \Gamma_0$ *cuando* $x \leq y$ *es una relación de orden.*
- *Si* Γ_0 *y* Γ_1 *son subgrupos aislados de* Γ, *entonces se tiene* $\Gamma_0 \subset \Gamma$ *o* $\Gamma_1 \subset \Gamma_0$ *(es decir, el conjunto de subgrupos aislados de* G *queda totalmente ordenado por inclusión).*

Definición 2.23. Sea G un grupo abeliano ordenado, diremos que

- G es un **grupo de rango racional** n si la dimensión de su cierre divisible $\overline{G}$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial es n;
- G es un **grupo de rango** n cuando admite n subgrupos propios aislados y no más.

Lema 2.24. *Sea* G *un grupo abeliano ordenado.*

- *El grupo* G *es arquimediano si y solo si sus únicos subgrupos aislados son* 0 *y* G, *es decir,* G *tiene rango igual a uno.*

- *Si G tiene rango n, con subgrupos aislados*

$$\Gamma_0 = 0 \subset \Gamma_1 \subset \dots \Gamma_{n-1} \subset \Gamma_n = G,$$

entonces Γ_i/Γ_{i-1} no tiene subgrupos aislados propios y, en consecuencia, es arquimediano.

Demostración. Sea G es arquimediano y $H \neq 0$ un subgrupo aislado de G. Fijemos $\beta > 0$ en H (el cual existe al ser H no trivial). Dado $\alpha > 0$ en Γ, por la propiedad arquimediana, existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n\beta > \alpha > 0$ lo cual por convexidad implica $\alpha \in [0, n\beta] \subset H$. De no satisfacerse $\alpha < 0$, se tendrá $-\alpha \geq 0$ e igual concluiremos $-\alpha \in H$; al ser H un grupo, ello equivale a $\alpha \in H$. De este modo H y G coinciden.

Recíprocamente, supongamos G no admita subgrupos aislados no triviales. Para $\alpha > 0$, la colección

$$S_\alpha = \{\gamma | \text{ existe } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ con } |\gamma| < n\alpha\},$$

es claramente un subgrupo aislado. Al contener éste al menos a α, resulta igual a G. De este modo, dado $\beta > 0$, existe n tal que $0 < \beta < n\alpha$; es decir, se satisface la propiedad arquimediana.

La segunda afirmación resulta de que cuando $\Gamma_i \subset G$ es un subgrupo aislado, existe una correspondencia biunívoca obvia entre los subgrupos aislados $H \subset G$ con $\Gamma_i \subset H \subset \Gamma$ y los subgrupos aislados de Γ/Γ_i. $\square$

Llamaremos **grupo de rango finito** a todo grupo de rango n con n entero.

Definición 2.25. Dado $E \subset G$, llamaremos **subgrupo aislado generado por** E a la intersección de los subgrupos aislados que contienen a E.

Definición 2.26. Dado $\Gamma \subset G$ subgrupo, llamaremos **interior de** Γ al mayor subgrupo aislado contenido propiamente en él.

Si $A(G)$ denota a la familia de subgrupos aislados de G, entonces el interior de Γ está dado por

$$\widetilde{\Gamma} = \bigcup_{\substack{\Gamma_i \subsetneq \Gamma \\ \Gamma_i \in A(G)}} \Gamma_i.$$

Definición 2.27. A un subgrupo aislado de G generado por un único elemento, digamos $g \neq 0$, lo llamaremos **subgrupo aislado principal**, y lo representaremos por Γ_g.

Claramente Γ_g es el menor subgrupo aislado que contiene a g.

Proposición 2.28. *Si Γ es un subgrupo principal del grupo G, entonces $\Gamma/\widetilde{\Gamma}$ es un grupo arquimediano distinto de cero.*

Demostración. Como siempre se tiene $\Gamma_g \supset \widetilde{\Gamma}_g$, basta probar que se cumple $\Gamma_g \neq \widetilde{\Gamma}_g$ y que no aparecen subgrupos aislados intermedios entre ellos. Como obviamente se satisface $g \in \Gamma_g$, sobra verficar $g \notin \widetilde{\Gamma}_g$. En efecto, de no ser así, por definición existiría $\Gamma_i \subsetneq \Gamma$ aislado tal que $g \in \Gamma_i$, y ello contradiría el hecho de que Γ_g sea el menor subgrupo aislado que contiene a g. Si $\widetilde{\Gamma}_g \subsetneq \Gamma \subsetneq \Gamma_g$ se llega a una contradicción porque $\Gamma \subsetneq \Gamma_g$ implica $\Gamma \subset \widetilde{\Gamma}_g$, ya que por definición de $\widetilde{\Gamma}_g$ éste es uno de los subgrupos que pertenecen a $\widetilde{\Gamma}_g$ y satisfacen $\Gamma \subset \widetilde{\Gamma}_g$. ☐

3. Esqueleto de un grupo ordenado

Sea $(G, \leq)$ un grupo ordenado y $\{\Gamma_i\}_{i\in I}$ la familia de subgrupos aislados principales de G, ordenados por inclusión. Notemos que podemos ordenar I de manera que se cumpla $i < j$ cuando $\Gamma_i \subset \Gamma_j$. Escribamos $H_i = \Gamma_i/\widetilde{\Gamma}_i$.

A la familia ordenada de grupos arquimedianos $\{H_i\}_{i\in I}$ se le denomina **esqueleto** de G.

Proposición 3.1. *Sea G un grupo ordenado y $\{H_i\}_{i\in I}$ su esqueleto. Entonces para todo $g \in G$ no nulo existe un único $i \in I$ con el cual se tiene $g \in \Gamma_i$ y $g \notin \widetilde{\Gamma}_i$.*

Demostración. Puesto que para cada $g \neq 0$ se tiene $g \notin \widetilde{\Gamma}_g$ y $g \in \Gamma_g$, la existencia es evidente. Para constatar unicidad, supongamos se tenga $g \in \Gamma_j$ y $g \notin \widetilde{\Gamma}_j$ junto con $\Gamma_j \neq \Gamma_g$. Entonces como Γ_g es el menor subgrupo aislado que contiene a g, se satisface $\Gamma_g \subsetneq \Gamma_j$ y $\Gamma_g \subset \widetilde{\Gamma}_j$, lo que implica $g \in \widetilde{\Gamma}_j$; esto es una contradicción. $\square$

A partir del esqueleto podemos construir dos grupos abelianos graduados y ordenados asociados a un grupo abeliano ordenado.

i. El **graduado asociado al orden** está dado por

$$Gr(G) = \bigoplus_{i\in I} H_i = \bigoplus_{i\in I} \Gamma_i/\widetilde{\Gamma}_i.$$

ii. El **graduado de Hahn** del grupo G está dado por

$$\mathcal{H}(G) = \coprod_{i\in I} H_i.$$

De lo estudiado en la sección anterior se desprende que $Gr(G)$ y $\mathcal{H}(G)$ son grupos abelianos ordenados que satisfacen $Gr(G) \subset \mathcal{H}(G)$.

El teorema de Hahn, que no probamos aquí (ver [5], [7]), establece el siguiente resultado estructural.

Teorema 3.2. *Si G es un grupo abeliano ordenado, entonces G es de manera natural un subgrupo de $\mathcal{H}(G)$. Es más, la inmersión $G \to \mathcal{H}(G)$ es creciente.* $\square$

Como consecuencia, dado que los H_i son arquimedianos, se tiene $H_i \subset \mathbb{R}$, y de esta manera todo grupo abeliano ordenado se puede sumergir en un producto de Hahn de copias de $\mathbb{R}$.

Por ello, la posibilidad de ordenar un grupo G se traduce en la posibilidad de hallar esqueletos de G, donde los órdenes se corresponden con los esqueletos. Podemos preguntarnos antes si dos grupos con el mismo esqueleto son isomorfos.

Ejemplo 3.3. En la demostración de la proposición 2.28, cuando G es un grupo ordenado, hemos construido el grupo S_g que obviamente representa el mínimo subgrupo aislado que contiene a g, es decir, es idéntico a Γ_α. De este modo H es un subgrupo aislado principal de G cuando existe $g \in G$ con el que se cumple

$$H = \Gamma_g = \{\alpha \in G \mid \exists n \in \mathbb{Z}^+,\ 0 \leq |\alpha| \leq n\,|g|\}.$$

Por ejemplo, si $\{G_i\}_{i\in I}$ es una familia de grupos arquimedianos y ponemos $G = \coprod_{i\in I} G_i$, entonces H será un subgrupo aislado principal de G cuando exista $\underline{g} \in G$ tal que

$$H = \Gamma_{\underline{g}} = \{\underline{\alpha} \in \coprod_{i\in I} G_i \mid \exists n \in \mathbb{Z}^+,\ 0 \leq |\underline{\alpha}| \leq n\,|\underline{g}|\}.$$

Puesto que el orden es lexicográfico, y se tiene que $r = \circ(\underline{g})$ y $\circ(n\underline{g})$ coinciden, todo elemento $\underline{\alpha} \in H$ satisfará $\circ(\underline{\alpha}) \geq r$. Recíprocamente, por un lado $\circ(\underline{\alpha}) > r$ implica directamente $\underline{\alpha} < \underline{g}$; mientras por otro la igualdad $\circ(\underline{\alpha}) = r$ conduce a que $\alpha_r \in G_r$ es no nulo: por la propiedad a arquimediana de G_i, deberá existir n sujeto a $0 < |\alpha_r| < n|g_r|$, y con ello nuevamente obtenemos $0 \leq |\underline{\alpha}| \leq n\,|\underline{g}|$.

Las observaciones anteriores confirman así las caracterizaciones

$$\widetilde{H} = \{\underline{\alpha} \in \coprod_{i\in I} G_i \mid \alpha_i = 0 \text{ cuando } i \leq r\},$$

$$H = \{\underline{\alpha} \in \coprod_{i\in I} G_i \mid \alpha_i = 0 \text{ cuando } i < r\}.$$

Consecuencia directo de ello se justifica la identificación $H/\widetilde{H} = G_i$.

Teorema 3.4. *Si $\mathfrak{F} = \{G_i\}_{i\in I}$ es una familia de grupos arquimedianos ordenados (con I un conjunto totalmente ordenado), entonces se tiene lo siguiente.*

- *(Cantor-Ribemboim) El grupo $G = \coprod_{i\in I} G_i$ tiene por esqueleto a $\mathfrak{F}$.*
- *El subgrupo $\bigoplus_{i\in I} G_i \subset \coprod_{i\in I} G_i$ también tiene por esqueleto a $\mathfrak{F}$.*

Demostración. Sea $G = \coprod_{i\in I} G_i$. Como los grupos G_i son arquimedianos, los subgrupos aislados principales de G están dados por

$$\Gamma_i = \{\underline{g} \in G \mid g_j = 0 \ , \ j < i\},$$

y para cada uno de ellos se tiene

$$\widetilde{\Gamma}_i = \{\underline{g} \in G \mid g_j = 0 \ , \ j \leq i\}.$$

De este modo el esqueleto de G es $\{\Gamma_i/\widetilde{\Gamma}_i\}_{i\in I} \simeq \{G_i\}_{i\in I}$.

El mismo razonamiento se aplica a $\bigoplus_{i\in I} G_i$, los detalles son dejados en manos del lector. □

De este modo tenemos dos grupos, uno contenido en otro, con el mismo esqueleto. Ambos grupos coinciden cuando I es finito. No obstante, aún en este caso el esqueleto no determina el grupo, ver ejemplo 3.6, abajo.

Si añadimos la hipótesis de que los grupos sean divisibles se logra lo siguiente.

Proposición 3.5. *Si G es un grupo divisible con esqueleto $\mathfrak{F} = \{H_i\}_{i\in I}$, entonces de manera natural se tiene*

$$\bigoplus_{i\in I} H_i \subset G \subset \coprod_{i\in I} H_i.$$

Si I es finito los tres grupos coinciden.

Demostración. La segunda inclusión es el teorema de Hahn. Para probar la primera basta observar que si $\mathfrak{F} = \{H_i\}_{i\in I}$ es el esqueleto de G, entonces al ser G divisible, para cada $i \in I$, los cocientes $H_i = \Gamma_i/\widetilde{\Gamma}_i$ serán $\mathbb{Q}$-espacios vectoriales ordenados con bases

$$\mathcal{B}_i = \{g_{ij} + \widetilde{\Gamma}_i \text{ con } g_{ij} \in \Gamma_i\}_{j\in J_i}.$$

Los elementos $\{g_{ij}\}_{i\in I, j\in J_i}$ son independientes en G (como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial), lo que permite definir los morfismos inyectivos crecientes

$\gamma_i : H_i \to G$ mediante $\gamma_i(g_{ij} + \widetilde{\Gamma}_i) = g_{ij}$, que a su vez inducen un homomorfismo inyectivo $\gamma : \bigoplus_{i\in I} H_i \to G$ que es creciente pues para $i < l$ se tiene $g_{lj} \in \Gamma_l \setminus \Gamma_i$. $\square$

Acabamos de establecer que cuando G es divisible, el grupo $\bigoplus_{i\in I} H_i$ aparece como cota inferior y $\coprod_{i\in I} H_i$ como cota superior entre los grupos cuyo esqueleto es el mismo de G. Si G no fuera divisible ello ya no es posible.

El siguiente ejemplo, propuesto por Clifford en [2], muestra dos grupos no isomorfos con el mismo esqueleto.

Ejemplo 3.6. Sea el grupo $G \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ generado por $\left\{\left(\frac{1}{p_r}, \frac{r}{p_r}\right)\right\}_{r\in\mathbb{N}}$ donde p_r es el r-ésimo primo, es decir, $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots$.

Primero notemos que $H = \{0\} \times \mathbb{Z}$ es un subgrupo de G. Para ello basta observar que se tiene $2 \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in G$ y $3 \cdot \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \in G$, de lo que se sigue $(1, 1) \in G$ y $(1, 2) \in G$ y, con ello, $(0, 1) \in G$; esto muestra la inclusión $H \subset G$.

En segundo lugar, notemos que H es aislado. En efecto, para $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $(0, 0) \leq (a, b) \leq (0, n)$ con $(a, b) \in G$ implica $a = 0$. Pero $(0, b) \in G$ lleva a $(0, b) = n_1 \left(\frac{1}{p_{i_1}}, \frac{i_1}{p_{i_1}}\right) + \cdots + n_r \left(\frac{1}{p_{i_r}}, \frac{i_r}{p_{i_r}}\right)$, para ciertos n_j, y con ello se tiene

$$0 = \frac{n_1}{p_{i_1}} + \cdots + \frac{n_r}{p_{i_r}}. \tag{1}$$

Si ponemos $Q_j = p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_{j-1}} \cdot p_{i_{j+1}} \cdot \ldots \cdot p_{i_r}$, entonces p_{i_j} divide a Q_k si y solo si $j \neq k$. Al multiplicar (1) por $p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_r}$ obtenemos $0 = n_1 Q_1 + \ldots + n_r Q_r$, es decir,

$$n_j Q_j = -(n_1 Q_1 + \ldots + n_{j-1} Q_{j-1} + n_{j+1} Q_{j+1} + \ldots n_r Q_r),$$

Pro Mathematica, 29, 57 (2016), 105-128, ISSN 2305-2430

de donde concluimos que p_{i_j} divide a n_jQ_j. Esto a su vez implica que p_{i_j} divide a n_j. De esta forma se consigue

$$b = \sum_{j=1}^{r} \frac{n_j i_j}{p_{i_j}} \in \mathbb{Z}.$$

Como esto significa $(a, b) \in H$, se concluye que H es aislado.

En tercer lugar notemos que H no admite subgrupo complementario en G. Supongamos, por el contrario que existe un subgrupo T tal que $H + T = G$ con $H \cap T = \{0\}$. En tal caso, para todo r se tendría

$$\left(\frac{1}{p_r}, \frac{r}{p_r}\right) = (0, n_r) + (a_r, b_r),$$

de donde se pasaría a

$$(a_r, b_r) = \left(\frac{1}{p_r}, \frac{r}{p_r} - n_r\right) \in T.$$

Esto a su vez conduce a $(1, r - p_r n_r) \in T$. Ahora bien, si existieran r y s de forma que $r - n_r p_r \neq s - n_s r_s$, entonces existiría un entero n no nulo tal que $(0, n) \in T$. Por tanto, para que T sea complementario a H, es obligatorio que lo valores

$$1 - 2n_1, 2 - 3n_2, 3 - 5n_3, \cdots,$$

sean todos iguales. De ello resulta

$$n_2 = \frac{2n_1 + 1}{3},\ n_3 = \frac{2n_1 + 2}{5}, \ldots, n_r = \frac{2n_1 + r}{p_{r+1}}, \ldots,$$

Pero acá n_1 es fijo mientras $\dfrac{r}{p_{r+1}}$ tiende a cero, con lo que resulta imposible que $\dfrac{2n_1 + r}{p_{r+1}}$ sea persistentemente un entero. Concluimos que H no admite subgrupo complementario en G.

Como H es arquimediano, pertenece al esqueleto de G, y como no tiene complementario, es imposible que G sea suma directa de los grupos de su esqueleto.

Por su parte, el cociente G/H es también arquimediano puesto que cumple $(\alpha, \beta) + H \neq 0$ equivales a que se tenga $(\alpha, \beta) \notin H$, es decir, a la condición $\alpha \neq 0$. En consecuencia, se tiene que $(\alpha, \beta) + H \in G/H$, y $(\alpha, \beta)+H > (0, 0)$ si y solo si $\alpha > 0$ y, como además $\mathbb{Q}$ es arquimediano, el cociente G/H también lo es. Por lo tanto, el esqueleto de G es $\{H, G/H\}$ y los grupos G y $H \bigoplus G/H$ no son isomorfos a pesar de tener el mismo esqueleto.

En un trabajo posterior caracterizaremos los esqueletos correspondientes a órdenes de G compatibles con el orden dado. Para a ello tendremos que introducir un nuevo objeto: las valoraciones.

4. Teorema de Hahn para grupos de rango finito

Comenzaremos probando que es suficiente probar el Teorema de Hahn para $\mathbb{Q}$-espacios vectoriales para validar el resultado general.

Proposición 4.1. *Sea G un grupo totalmente ordenado.*

- *Si $H \subset G$ es un grupo aislado de G, entonces $L(H)$ es un subgrupo aislado de $\overline{G}$.*
- *Si $R \subset \overline{G}$ es un subgrupo aislado de $\overline{G}$, entonces $\Delta(R)$ es un subgrupo aislado de G.*
- *Existe una correspondencia biunívoca entre los subgrupos aislados de G y de $\overline{G}$. Esta correspondencia además preserva el orden definido por inclusión.*

Demostración. Para la primera afirmación tomamos $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in L(H)$ sujetos $\alpha_1 \leq \beta \leq \alpha_2$. Entonces merced al lema 2.7 existen $n_1, n_2, n \in \mathbb{Z}^+$ tales que $n_1\alpha_1,\ n_2\alpha_2, n\beta\ \in H$. Con $m = n_1n_2n$ se satisface $m\alpha_1 \leq m\beta \leq m\alpha_2$, y al tenerse $m\alpha_1, m\alpha_2 \in H$, la convexidad del grupo H implica $m\beta \in H$ y $\beta \in L(H)$.

La segunda parte es trivial.

Por último probaremos que las correspondencias L y Δ son inversas una de la otra. Al introducir las asignaciones mostramos que siempre se satisfacía $L\Delta(T) = T$. Ahora probaremos que cuando H es un subgrupo aislado de G se tiene también $\Delta L(H) = H$, es decir, $L(H) \cap G = H$. Como es directa la inclusión $H \subset L(H) \cap G$, nos limitamos a probar $L(H) \cap G \subset H$. Sea entonces $\alpha \in L(H) \cap G$. En tal caso directo de la definición se tiene $n\alpha \in H$ para cierto n positivo. Como se satisface $0 < |\alpha| \leq n\,|\alpha|$, que H sea aislado implica $\alpha \in H$. $\square$

Observación 4.2. Si Γ es un grupo abeliano, los subgrupos aislados de $\overline{G}$ son justamente los subespacios vectoriales generados por los subgrupos aislados de G. Por tal razón el rango de $\overline{G}$ coincide con el rango de G.

En la sección 2.3 hicimos constar que los subgrupos $L(\Gamma_i)/L(\Gamma_{i-1})$ son arquimedianos y, por tanto, isomorfos a un subgrupo de $\mathbb{R}$.

Lema 4.3. *Sea V es un K-espacio vectorial. Si se tiene*

$$0 = L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_n = V,$$

con L_i subespacios vectoriales y $\overline{B}_i = \{v_{ij} + L_{i-1},\ \text{con } v_{ij} \in L_i\}_{j \in I_i}$ base de L_i/L_{i-1} para cada i, entonces

$$B = \{v_{ij},\ \text{para } 1 \leq i \leq n \text{ y } j \in I_i\}$$

es una base de V.

Demostración. Veamos en primer lugar que el conjunto B es un sistema de generadores de V. Dado $v \in V$ se tiene $v + L_{n-1} \in L_n/L_{n-1}$ y por lo tanto también

$$v + L_{n-1} = \sum_{j \in I_n} \lambda_{nj} v_{nj} + L_{n-1},$$

para ciertos $\lambda_{nj} \in K$. Si ponemos $v_n = \sum_{j \in I_n} \lambda_{nj} v_{nj}$, entonces se tiene $v - v_n \in L_{n-1}$ y $(v - v_n) + L_{n-2} \in L_{n-1}/L_{n-2},$. Con ello se logra

$v - v_n = \sum_{j \in I_{n-1}} \lambda_{n-1j} v_{n-1j} + L_{n-2}$ e inductivamente se sigue el resultado. La independencia lineal es trivial si nuevamente pasamos sucesivamente al cociente de los L_n. $\square$

En uso de los resultados anteriores probaremos a continuación el teorema final de este trabajo.

Teorema 4.4. *Si* $(G, +, \leq)$ *es un grupo abeliano totalmente ordenado y de rango* n*, entonces* G *es isomorfo a un subgrupo de* $(\mathbb{R}^n, +)$ *con el orden lexicográfico.*

Demostración. Sustituimos, de ser necesario, G por $\overline{G}$ para suponer que G es divisible. De esta forma G tiene estructura de $\mathbb{Q}$-espacio vectorial, y si además tiene rango n, con la cadena de subgrupos aislados dada por $\{0\} = \Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \ldots \subset \Gamma_n = G$, entonces $\overline{B_{ij}} = \{g_{ij} + \Gamma_{i-1}\}_{j \in I_i}$ resulta base de Γ_i / Γ_{i-1} para ciertos g_{ij}. Por el lema 4.3, la colección $\{g_{ij}\}$ actúa cual base de $\overline{G}$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial. Fijada esta base, al suponer $g_{ij} > 0$, se tiene que para cada $g \in G$ se cumple

$$\begin{aligned} g &= \sum \lambda_{ij} g_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j \in I_i} \lambda_{ij} g_{ij} \right) \\ &= g_1 + g_2 + \cdots + g_n, \text{ donde } g_i \in \Gamma_i. \end{aligned}$$

Ahora podemos construir una aplicación

$$\varphi : G \to \Gamma_n / \Gamma_{n-1} \times \ldots \times \Gamma_1 / \Gamma_0$$

con $\varphi(g) = (g_n + \Gamma_{n-1}, \ldots, g_1 + \Gamma_0)$. Esta aplicación es $\mathbb{Q}$-lineal porque lo es en cada componente. Además transforma la base B de $\overline{G}$ en una base del espacio producto $\Gamma_n / \Gamma_{n-1} \times \ldots \times \Gamma_1 / \Gamma_0$, y por ende es un isomorfismo de espacios vectoriales. Vamos ahora a comprobar que si en el espacio producto consideramos el orden lexicográfico, entonces φ resulta creciente. Para ello observemos que dado $g \in G$, con $g \neq 0$, existe

$r \leq n$ tal que $g_r \neq 0$ y $g_s = 0$ para cada $s > r$. Luego se tiene $g > 0$ si y solo si $g + \Gamma_{r-1} = g_r + \Gamma_{r-1} > 0$, lo cual es posible única y exclusivamente de tenerse

$$(g_n + \Gamma_{n-1}, \ldots, g_r + \Gamma_{r-1}, \ldots, g_1) = (0, \ldots, 0, g_r + \Gamma_{r-1}, \ldots, g_1) > 0$$

en el orden lexicográfico. Por otra parte, como Γ_r/Γ_{r-1} es arquimediano, resulta isomorfo a un subgrupo de $\mathbb{R}$, lo que da paso a una inmersión

$$\Gamma_r/\Gamma_{r-1} \hookrightarrow \mathbb{R}.$$

Al poner todo junto logramos

$$G \simeq \Gamma_n/\Gamma_{n-1} \times \ldots \times \Gamma_1/\Gamma_0 \hookrightarrow \mathbb{R}^n.$$

En pocas palabras, si G es divisible, entonces G es isomorfo a un producto de subgrupos de $\mathbb{R}$ ordenados con el orden lexicográfico. $\square$

Referencias

[1] Birkhoff, G.; *Lattice theory.* American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 25, rev. ed., New York, (1949), pp. 240

[2] Clifford, A. H.; *Note on Hahn's Theorem on ordered Abelian Groups.* Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 5, No. 6 (Dec., 1954), pp. 860-863.

[3] Conrad, P.; *Embedding Theorems for Abelian Groups with Valuations.* American Journal of Mathematics, Vol. 75, No. 1 (Jan., 1953), pp. 1-29.

[4] Gravett, K.A.H.; *Ordered Abelian groups.* The Quarterly Journal of Mathematics, Vol. 7, No. 1, (1955), pp. 57-63.

[5] Hahn, H.; *Über die nichtarchimedischen Größensysteme.* Sitzungsber. d. Akademie d. Wiss. Wien, math. -naturw. Klasse, Vol. 116, Abt.Ila (1907), pp. 601-655.

[6] Hausner, M., Wendel, J.; *Ordered vector spaces.* Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 3 (1952), pp. 977-982.

[7] Rimbenboim, P.; *Théorie des valuations.* Les presses de L'Université de Montréal, Montreal, Quebec, (1965).

[8] Robinson, A., Zakon, E.; *Elementary Properties of ordered Abelian Groups.* Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 96, No. 2 (Aug., 1960), pp. 222-236.

[9] Ugarte, F.; *Álgebra de series y solución de ecuaciones algebraicas sobre cuerpos valorados.* (Phd. Thesis) Univ. Valladolid, (2010).

Abstract

This paper covers the notation and basic results of the theory of ordered abelian groups required to state Hahn's Theorem, which deals with the structure of such groups. In addition, we present a simple proof of Hahn's theorem for groups of finite range and some results concerning the minimality of the immersion sugested by the theorem.

Keywords: Hahn's theorem, convex groups, valuations.

Francisco Ugarte Guerra
Sección Matemáticas
Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú
Av. Universitaria 1801, San Miguel
Perú
`fugarte@pucp.edu.pe`