Valoraciones y relaciones de dominación en grupos abelianos sin torsión

Francisco Ugarte Guerra[1,2]

Agosto, 2015

Resumen

En este trabajo definimos valoraciones y relaciones de dominación en grupos abelianos sin torsión y probamos que estos son esencialmente los mismos objetos. Adicionalmente probamos que las valoraciones también se corresponden con filtraciones de subgrupos cerrados por división por enteros y que todo grupo abeliano valorado y sin torsión puede sumergirse en el producto de Hahn de subgrupos definidos por la valoración.

MSC(2010): 06F20, 20F60, 13A18.

Palabras clave: *Valoraciones, grupos ordenados, relaciones de dominación, relaciones de orden, teorema de Hahn.*

[1] *Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias, PUCP.*
[2] *Proyecto DGI: 0141-2013.*

1. Introducción

Dado un grupo G, abeliano y sin torsión, podemos plantearnos la pregunta de si G es ordenable, es decir, si admite un orden compatible con su estructura de grupo. La respuesta a esta pregunta es afirmativa y se sigue del siguiente razonamiento.

Un grupo abeliano G se llama **divisible** si para todo $g \in G$ y $n \in \mathbb{Z}^*$ existe $h \in G$ que satisface $nh = g$, es decir, G es divisible si para cada $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^*$ y $g \in G$ tiene sentido hablar de $\frac{mg}{n} \in G$, esto es, existe un elemento h del grupo que verifica $nh = mg$, que obviamente es único. En otras palabras, G es divisible precisamente cuando su estructura de $\mathbb{Z}$-módulo se extiende a una estructura de $\mathbb{Q}$-espacio vectorial.

Todo grupo abeliano sin torsión se puede sumergir dentro de un grupo divisible mediante uno de los dos procedimientos equivalentes, que se detallan a continuación.

• Todo grupo abeliano G es un $\mathbb{Z}$-módulo y por tanto $\overline{G} = (\mathbb{Z}^*)^{-1}G$ es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial, pues se tiene $(\mathbb{Z}^*)^{-1}\mathbb{Z} = \mathbb{Q}$: entonces G se sumerge en $\overline{G}$ si identificamos g con $\frac{g}{1}$.
• Construimos $\overline{G}$ en uso también de la estructura de $\mathbb{Z}$-módulo vía el producto $\overline{G} = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} G$, donde identificamos $\frac{mg}{n}$ con $\frac{m}{n} \otimes_{\mathbb{Z}} g$. De este modo, al identificar $1 \otimes g$ con g, el grupo $\overline{G}$ resulta ser un grupo divisible que contiene a G .

Llegado a este punto, la tarea de ordenar G se reduce a ordenar $\overline{G}$ (interpretado este como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial) para luego tomar el orden inducido. Para ello basta construir una base $B = \{g_i\}_{i \in I}$ de $\overline{G}$, como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial, y expresar $\overline{G} = \bigoplus_{i \in I} V_i$ con $V_i \simeq \mathbb{Q}$. Como el conjunto I admite siempre un orden total y los elementos de la suma directa son, por definición, de soporte finito (es decir, una suma finita), podemos ordenar $\overline{G}$ lexicográficamente. Pese a que este orden es compatible con la estructura de grupo, no necesariamente es el único que goza de tal propiedad: por ejemplo $(\mathbb{R}, +)$, como grupo, admite su orden natural usual, y como $\mathbb{Q}-$espacio vectorial admite el orden lexicográfico antes descrito.

La suma directa no es el único subgrupo del producto de grupos que se puede ordenar lexicográficamente. Para aprovechar este orden basta con que el **soporte** (es decir, la colección $Sop(\underline{\alpha}) \subset I$ de índices para los cuales la correspondiente entrada es no nula) de cualquier elemento del subgrupo admita un mínimo.

Si $\{G_i\}_{i\in I}$ es una familia de grupos, llamaremos **producto de Hahn** de la familia a

$$\mathop{\mathrm{H}}_{i\in I} G_i = \{\underline{\alpha} \in \prod_{i\in I} G_i \mid Sop(\underline{\alpha}) \text{ está bien ordenado}\}.$$

Claramente se tiene siempre $\bigoplus_{i\in I} G_i \subset \mathop{\mathrm{H}}_{i\in I} G_i \subset \prod_{i\in I} G_i$. Además, si I está bien ordenado se cumple $\mathop{\mathrm{H}}_{i\in I} G_i = \prod_{i\in I} G_i$. Mientras si I es finito, los tres grupos coinciden (ver Proposición 2.2. en [10]).

Definimos el **orden** de g como $o(\underline{g}) = \text{mín}\ \{Sop(\underline{g})\}$ para elementos no nulos, y ponemos $o(0) = \infty$ por consistencia. Llamaremos **inicial** de g al elemento $in(\underline{g}) = \pi_i(\underline{g}) \in G_i$ (acá π_i proyección i-ésima) donde $i = o(\underline{g})$; por completitud pondremos $in(\underline{0}) = 0$. Cuando todo G_i ya está ordenado, podemos definir el **cono positivo** como

$$S = \{\underline{g} \in \mathop{\mathrm{H}}_{i\in I} G_i \mid in(\underline{g}) > 0\} \cup \{0\}.$$

Un elemento α será **positivo** (y pondremos $\alpha > 0$) cuando no sea nulo y pertenezca al cono positivo.

El tipo de orden lexicográfico del cual hablamos tiene una particularidad adicional. Para elementos positivos $\alpha, \beta \in \overline{G} = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Q}$ notamos que se cumple $\circ(\alpha) > \circ(\beta)$ si y solo si para todo m, n positivos se tiene $m\alpha < n\beta$. Por otro lado, la correspondencia $G \to I$ que a cada g le hace corresponder $\circ(g)$ es tal que $0 < \alpha \leq \beta$ implica $\circ(\alpha) \geq \circ(\beta)$. Notemos que $\circ(\alpha) > \circ(\beta)$ es una condición mas fuerte que $\alpha < \beta$: de ello se deduce que la relación $\alpha \preccurlyeq \beta \Leftrightarrow \circ(\alpha) > \circ(\beta)$ no es un orden.

Este tipo de relaciones, a las que llamaremos **relaciones de dominación**, son las que estudiaremos en este artículo. Además, las relacionaremos con el concepto de valoración, un concepto usual en teoría de cuerpos pero que nosotros ampliaremos a grupos, para luego demostrar que ambos conceptos son equivalentes. También establecemos la correspondencia biunívoca con los filtros de subgrupos absorbentes y, finalmente, definiremos la noción de grupo graduado asociado a una valoración y demostraremos que un grupo valorado puede sumergirse en el producto de Hahn de los subgrupos asociados a la valoración.

2. Relaciones de dominación y valoraciones

En la literatura, por ejemplo en [1], se definen ciertas relaciones de preorden en cuerpos ordenados con propiedades complementarias interesantes, a las que se le denominan relaciones de dominación. Nosotros proponemos una variante de esta definición para grupos abelianos libres de torsión.

Sea $(G, +)$ un grupo abeliano sin torsión. Diremos que $\preceq$ es una **relación de dominación en** G cuando para todo $x, y, z \in G$ se tiene

P1. $x \preceq x$,

P2. $x \preceq y$ e $y \preceq z$ implican $x \preceq z$,

P3. $x \preceq y$ o $y \preceq x$,

P4. $x \preceq y$ implica $mx \preceq ny$ para todo n, m enteros no nulos,

P5. $x \preceq z$ e $y \preceq z$ implican $x - y \preceq z$.

Observación 2.1. Las tres primeras propiedades significan que la relación es de preorden. La propiedad P5 equivale, dado P4, a que $x \preceq z$ e $y \preceq z$ impliquen $x + y \preceq z$.

En las relaciones de dominación en cuerpos, la condición P4 se sustituye por

$$f \preceq g \quad \text{implica} \quad fh \preceq gh.$$

Si K es un subcuerpo de $\mathbb{R}$ esta condición es equivalente a P4, pues $\mathbb{Q}$ es denso en K.

Sea G un grupo abeliano sin torsión. Si I es un conjunto totalmente ordenado con elemento máximo, al que representaremos por ∞, y se cumple $I \neq \{\infty\}$, diremos que la aplicación $\varphi : G \to I$ es una **valoración** cuando se tenga

i. φ es sobreyectiva,

ii. $\varphi(nx) = \varphi(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$,

iii. $\varphi(x + y) \geq \text{mín}\{\varphi(x), \varphi(y)\}$,

iv. $\varphi(0) = \infty$.

La condición ii. sustituye a la condición $\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y)$ de las valoraciones usuales definidas en cuerpos. Las valoraciones de un cuerpo K relativa a $\mathbb{Q}$ la cumplen pero, por ejemplo, la valoración p-ádica de $\mathbb{Q}$ no sería una valoración de $(\mathbb{Q}, +)$ como grupo abeliano: de hecho, la única valoración de $(\mathbb{Q}, +)$ como grupo es la valoración trivial, es decir, aquella para la cual se satisface $\varphi(x) = 0$ para $x \neq 0$ y $\varphi(0) = \infty$.

Dos valoraciones $\varphi_1 : G \to I$, $\varphi_2 : G \to J$ se dicen **equivalentes** cuando existe una biyección creciente $f : I \to J$ que satisface $f \circ \varphi_1 = \varphi_2$. En lo sucesivo identificamos valoraciones equivalentes.

Proposición 2.2. *Sea $(G, +)$ un grupo abeliano sin torsión y $\preceq$ una relación de dominación en G. Entonces se tiene lo siguiente.*

• *La relación $\sim$ definida en G por*

$$x \sim y \Leftrightarrow x \preceq y \ , \ y \preceq x$$

es de equivalencia.

• *La relación $\leq$ definida en el cociente $I = G/\!\sim$ mediante*

$$[x] \leq [y] \quad \textit{si y solo si} \quad y \preceq x$$

(donde $[x] = \{y \in G \mid x \sim y\}$) es un orden total con $[0]$ como elemento máximo.

• *La aplicación $\varphi_{\preceq} : G \to I$ dada por $\varphi_{\preceq}(x) = [x]$ es una valoración.*

Demostración. La primera aseveración es trivial y se deja como ejercicio al lector.

Es claro que la relación $\leq$ es un orden total en I. Además notemos que $x \preceq x$ y $-x \preceq x$ implican $0 = x + (-x) \preceq x$; lo que conduce a $[0] \geq [x]$. Por lo tanto I tiene como máximo a $[0] = \infty$.

Claramente $\varphi_{\preceq}$ es sobreyectiva y satisface $\varphi_{\preceq}(0) = \infty$. Por otro lado, para $x \in G$ y $n \neq 0$ se tiene que $x \preceq x$ implica simultáneamente tanto $x \preceq nx$ como $nx \preceq x$. Con ello se tiene $[nx] = [x]$, o lo que es lo mismo $\varphi_{\preceq}(nx) = \varphi_{\preceq}(x)$. Por último, dados $x, y \in G$, a los que suponemos sin pérdida de generalidad sujetos a $[x] \leq [y]$ (con lo cual $\text{mín}\{\varphi_{\preceq}(x), \varphi_{\preceq}(y)\} = \varphi_{\preceq}(x)$), se tiene $y \preceq x, x \preceq x$ lo cual lleva a $x + y \preceq x$. Esto equivale a $[x + y] \geq [x]$. Por definición se tiene entonces $\varphi_{\preceq}(x + y) \geq \varphi_{\preceq}(x) = \text{mín}\{\varphi_{\preceq}(x), \varphi_{\preceq}(y)\}$. $\square$

Diremos que una valoración $\nu : G \to I$ **está asociada a la dominación** $\preceq$ si es equivalente a la valoración $\varphi_{\preceq}$ de la proposición anterior.

Si $\varphi_1 : G \to I$ y $\varphi_2 : G \to J$ son valoraciones, diremos que φ_2 **domina a** φ_1 en caso exista una aplicación creciente $f : I \to J$ de manera que se tenga $f \circ \varphi_1 = \varphi_2$. Obviamente φ_1 domina a φ_2 y φ_2 a φ_1 sucede única y exclusivamente si φ_1 y φ_2 son equivalentes pues φ_1, φ_2, ambas, son sobreyectivas.

Proposición 2.3. *Si denotamos por $\leq_I, \leq_J$ los órdenes de I y J, respectivamente, entonces φ_2 domina a φ_1 si y solo si $\varphi_1(x) \leq_I \varphi_1(y)$ implica $\varphi_2(x) \leq_J \varphi_2(y)$.*

Demostración. Si φ_2 domina a φ_1, entonces existe $f : I \to J$ aplicación creciente que verifica $f \circ \varphi_1 = \varphi_2$. Con ello $\varphi_1(x) \leq_I \varphi_1(y)$ implica $f(\varphi_1(x)) \leq_J f(\varphi_1(y))$, es decir, $\varphi_2(x) \leq_J \varphi_2(y)$.

Recíprocamente, definamos $f : I \to J$ como $f(i) = j$ cuando exista $x \in G$ para el cual se tenga $\varphi_1(x) = i$ y $\varphi_2(x) = j$. Notemos que f está bien definida pues φ_1 es sobreyectiva y por hipótesis $\varphi_1(x) = \varphi_1(y)$ lleva a $\varphi_2(x) = \varphi_2(y)$. Además f resulta ser creciente debido a que para $\varphi_1(x) = i \leq_I j = \varphi_1(y)$ se tiene $f(i) = \varphi_2(x) \leq_J \varphi_2(y) = f(j)$. $\square$

Proposición 2.4. *Sea G un grupo abeliano sin torsión, e $(I, \leq)$ un conjunto totalmente ordenado con ∞ como elemento máximo.*

Si $\varphi : G \to I$ es una valoración, entonces la relación $\preceq_\varphi$ definida por

$$x \preceq_\varphi y \quad \textit{si y solo si} \quad \varphi(x) \geq \varphi(y)$$

es una relación de dominación.

La correspondencia ψ entre $V = \{\varphi \mid \varphi : G \to I$ es una valoración $\}$ y $D = \{\preceq \mid \preceq$ es relación de dominación en $G\}$ definida vía $\psi(\varphi) = \preceq_\varphi$ es una biyección cuya inversa es la aplicación $\delta : D \to V$ dada por $\delta(\preceq) = \varphi_\preceq$.

Si $\varphi_1 : G \to I$ y $\varphi_2 : G \to J$ son valoraciones, entonces φ_2 domina a φ_1 si y solo si se cumple $\psi(\varphi_1) \subset \psi(\varphi_2)$.

Demostración. Es claro que las propiedades P1, P2 y P3 son verificadas trivialmente por $\preceq_\varphi$. Para comprobar P4 observemos que siempre que n, m sean no nulos se verifica la cadena de equivalencias

$$x \preceq_\varphi y \Leftrightarrow \varphi(x) \geq \varphi(y) \Leftrightarrow \varphi(mx) = \varphi(x) \geq \varphi(y) = \varphi(ny) \Leftrightarrow mx \preceq_\varphi ny.$$

Para verificar P5 partimos de $x \preceq_\varphi z$ e $y \preceq_\varphi z$, es decir de $\varphi(x) \geq \varphi(z)$ y $\varphi(y) \geq \varphi(z)$ y como se satisface $\varphi(x+y) \geq \min\{\varphi(x), \varphi(y)\} \geq \varphi(z)$, comprobamos que se verifica $x + y \preceq_\varphi z$.

Obviamente si φ es equivalente a φ', entonces $x \preceq_\varphi y$ es lo mismo que $x \preceq_{\varphi'} y$. Por tanto, la relación de dominación $\preceq_\varphi$ depende exclusivamente de la clase de equivalencia de la valoración. Veamos que las dos correspondencias entre valoraciones y relaciones de dominación que hemos definido son inversas una de la otra.

Sea $\varphi : G \to I$ una valoración. Sabemos que si $\sim_\varphi$ es la relación de equivalencia asociada con $\preceq_\varphi$, poner $g \sim_\varphi g'$, equivale a $g \preceq_\varphi g'$ y $g' \preceq_\varphi g$, es decir a $\varphi(g) = \varphi(g')$. Por lo tanto, la asignación $f : G/{\sim_\varphi} \to I$ definida mediante $f([g]) = \varphi(g)$ es una biyección. Más aún, debido a que de $[g] \leq [g']$ se pasa a $g' \preceq_\varphi g$, y de ahí a $\varphi(g) \leq \varphi(g')$, resulta que f es creciente. Como la valoración asociada a $\preceq_\varphi$ es

$$\varphi' : G \to G/{\sim_\varphi} \text{ con } \varphi'(g) = [g],$$

se verifica que $f \circ \varphi' = \varphi$ y φ' y φ son equivalentes.

Veamos ahora la composición en sentido contrario. Si $\preceq$ es una dominación y $\varphi : G \to G/\sim$ con $\varphi(g) = [g]$ es la valoración asociada, entonces la dominación asociada $\preceq'$ está dada por:

$$g_1 \preceq' g_2 \quad \text{si y solo si} \quad \varphi(g_1) \geq \varphi(g_2);$$

esto es lo mismo que aseverar que $[g_1] \geq [g_2]$ se cumple si y solo si $g_1 \preceq g_2$. En consecuencia, las dos correspondencias son inversa una de la otra.

La tercera afirmación se desprende de la proposición 2.3. $\square$

Así hemos confirmado que valoración y relación de dominación son conceptos intercambiables.

3. Valoraciones y filtros absorbentes de subgrupos

Una valoración $\nu : G \to I$ en un grupo abeliano G determina una familia de subgrupos $S_i(\nu) = \{g \in G \mid \nu(g) \geq i\}$. Prácticamente de la definición se siguen dos propiedades importantes:

- $ng \in S_i(\nu)$ implica $g \in S_i(\nu)$ para $n \geq 0$;
- $S_i(\nu) \smallsetminus \bigcup_{j>i} S_j(\nu) \neq \emptyset$ para cada $i \in I$.

La primera propiedad es una forma débil de la condición de grupo divisible y es consecuencia de la igualdad $\nu(ng) = \nu(g)$. La segunda se deriva del hecho de ser ν sobreyectiva.

Veremos en breve que toda familia de subgrupos de G con estas propiedades define una valoración.

Diremos que un subgrupo H de un grupo abeliano G sin torsión es **absorbente** cuando para cada $g \in G$ y n no nulo la condición $ng \in H$ implica $g \in H$.

Obviamente todo subgrupo divisible es absorbente. Sin embargo, un subgrupo absorbente no tiene por qué ser divisible. Por ejemplo en $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ todos los subgrupos de la forma $\{(\lambda a, \lambda b), \lambda \in \mathbb{Z}$ y $\mathrm{MCD}(a,b) = 1\}$ son absorbentes pero no divisibles.

Sea I un conjunto totalmente ordenado con un máximo —al que llamaremos ∞—. A una familia $\{S_i\}_{i\in I}$ de subgrupos de G (libre de torsión) que verifica

- S_i es absorbente,
- $S_i^+ = \bigcup_{j>i} S_j$ es un subgrupo propio de S_i y
- para cada g existe i con el cual se tiene $g \in S_i \setminus S_i^+$

la llamaremos **filtro de subgrupos absorbentes**.

Proposición 3.1. *Si G es un grupo sin torsión y $\nu : G \to I$ es una valoración, los conjuntos $S_i(\nu) = \{g \in G \mid \nu(g) \geq i\}$ constituyen un filtro de subgrupos absorbentes.*

Demostración. Cada $S_i(\nu)$ es un subgrupo de G pues para $g, h \in S_i(\nu)$ se tiene $\nu(g-h) \geq \min\{\nu(g), \nu(-h) = \nu(h)\} \geq i$, esto es, $g - h \in S_i(\nu)$.

Cada $S_i(\nu)$ es absorbente, pues para $n \neq 0$ la condición $ng \in S_i(\nu)$ conduce a $\nu(g) = \nu(ng) \geq i$, es decir, a $g \in S_i(\nu)$.

Las otras dos condiciones en la definición son triviales al ser ν sobreyectiva. $\square$

La segunda condición en la definición significa que la familia de subgrupos $\{S_i\}_{i\in I}$ es estrictamente decreciente y que dado i siempre es posible encontrar $g \in S_i$ que no pertenezca a ningún S_j con $j > i$. La tercera condición afirma que para cada g el conjunto $\{i \mid g \in S_i\}$ tiene un mínimo.

Proposición 3.2. *Si $\{V_i\}_{i\in I}$ es un filtro de subgrupos absorbentes en un grupo G, entonces existe una valoración $\nu : G \to I$ con la cual se tiene $S_i(\nu) = V_i$ para todo i.*

Demostración. Sea $V_i^+ = \bigcup_{j>i} V_j$. Definamos $\nu(g) = i$ si $g \in V_i \smallsetminus V_i^+$. Debido a la definición de filtro, tal ν está bien definida y es sobreyectiva.

Para $g, h \in G$ sujetos a $\nu(g) = i \leq j = \nu(h)$, se tiene tanto $g \in V_i$ como $h \in V_j \subset V_i$, de aquí se obtiene $g + h \in V_i$, lo cual implica $\nu(g + h) \geq i = \text{mín}\{\nu(g), \nu(h)\}$.

La relación anterior prueba que siempre se cumple $\nu(ng) \geq \nu(g)$. Si $n \neq 0$, mostraremos que se da la igualdad. En efecto, al ser los V_i absorbentes, la condición $ng \in V_{\nu(ng)}$ implica $g \in V_{\nu(ng)}$; de ahí la igualdad. $\square$

Hemos comprobado que existe una correspondencia biunívoca entre valoraciones y dominaciones, así como una entre valoraciones y filtros de subgrupos absorbentes. Por transitividad existe una correspondencia entre filtros y relaciones de dominación.

La relación de dominación correspondiente a un filtro de subgrupos absorbente $\{S_i\}_{i \in I}$ está dada por

$$\alpha \preccurlyeq \beta \qquad \text{si y solo si} \qquad \text{para } \alpha \in S_i, \beta \in S_j \text{ se tiene } i \leq j.$$

Por su parte, el filtro asociado a la relación de dominación $\preccurlyeq$ está dado por la familia de conjuntos de la forma

$$S_{[a]} = \{g \mid a \preccurlyeq g\}, \text{ donde } [a] = \{b \mid a \preccurlyeq b \text{ y } b \preccurlyeq a\}.$$

Los filtros de subgrupos absorbentes caracterizan también la dominación de valoraciones. Antes veamos un ejemplo de cómo están relacionados los filtros de subgrupos absorbentes asociados a dos valoraciones relacionadas por dominación.

Ejemplo 3.3. Sea el grupo $(G = \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}, +)$ con $+$ la suma usual de $\mathbb{R}$ componente a componente. Consideraremos dos valoraciones con distinto grupo de llegada. Primero tenemos $\nu_1 : G \to \mathbb{Q} \cup \{\infty\} = \mathbb{Q}^*$ definida para $\mathbf{a} = (\alpha_i)_{i \in \mathbb{Q}^*} \in G$ mediante

$$\nu_1(\mathbf{a}) = \begin{cases} \infty & \text{si } \alpha_i = 0 \text{ para todo } i \\ t & \text{si } \alpha_i = 0 \text{ para } i < t \text{ y } \alpha_t \neq 0 \end{cases}$$

y $\nu_2 : G \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\} = \mathbb{Z}^*$ como

$$\nu_2(\mathbf{a}) = \begin{cases} \infty & \text{si } \alpha_i = 0 \text{ para todo } i \\ n & \text{si } n\sqrt{2} \leq \nu_1(\mathbf{a}) < (n+1)\sqrt{2}. \end{cases}$$

La aplicación $f : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Z}^*$ dada por

$$f(\alpha) = \begin{cases} n & \text{si } n\sqrt{2} \leq \alpha < (n+1)\sqrt{2} \\ \infty & \text{si } \alpha = \infty \end{cases}$$

es creciente, y por construcción satisface $f \circ \nu_1 = \nu_2$, es decir, ν_2 domina a ν_1. Queda como un sencillo ejercicio para el lector comprobar que satisface las propiedades siguientes:

- para $n \in \mathbb{Z}$ se tiene $T_n(\nu_2) = \bigcup\limits_{f(i)=n} S_i(\nu_1) = \bigcup\limits_{f(i)\geq n} S_i(\nu_1)$,
- para $i \in \mathbb{Q}$ se tiene $S_i(\nu_1) \subset T_{f(i)}(\nu_2)$; además, si $S_i(\nu_1) \subset T_h(\nu_2)$, entonces se cumple $f(i) \geq h$.

Estas propiedades en cierto sentido caracterizan a la aplicación f, tal como veremos en las proposiciones siguientes.

Proposición 3.4. *Supongamos que la valoración $\nu_1 : G \to I$ domina a la valoración $\nu_2 : G \to J$, con $f : I \to J$ la aplicación creciente tal que $f \circ \nu_1 = \nu_2$. Sean $S_i = S_i(\nu_1)$ y $T_r = S_r(\nu_2)$ los filtros asociados como en la proposición 3.1. Entonces*

- *para todo $r \in J$ se tiene $T_r = \bigcup\limits_{f(i)=r} S_i$, esto es $T_r = \bigcup\limits_{S_i \subset T_r} S_i$, y*
- *para todo $i \in I$ la condición $S_i \subset T_h$ implica $h \leq f(i)$; es decir, $f(i) = \text{máx}\{h \mid S_i \subset T_h\}$.*

Demostración. Primero es importante anotar que f es sobreyectiva, pues ν_1 y ν_2 lo son y se tiene la composición $f \circ \nu_1 = \nu_2$.

Si $g \in \bigcup\limits_{f(i)=r} S_i$, existe $i \in I$ tal que $g \in S_i$ y se satisfará $\nu_1(g) \geq i$. Como f es creciente, obtenemos $\nu_2(g) = f(\nu_1(g)) \geq f(i) = r$, es decir, $g \in T_r$. Recíprocamente, si $g \in T_r$, entonces se cumple $\nu_2(g) \geq r$. En el caso se tenga $\nu_2(g) = r$, se cumplirá $f(\nu_1(g)) = r$, esto es, $g \in S_j$

para $j = \nu_1(g)$, donde además se satisface $f(j) = r$, de todo ello se desprende $g \in \bigcup_{f(i)=r} S_i$. Si por el contrario se cumple $\nu_2(g) > r$, entonces se tendrá $f(\nu_1(g)) > r$. Pero como f es sobreyectiva, existe $j \in I$ sujeto a $r = f(j)$, vale decir, $f(\nu_1(g)) > f(j)$. Como f es creciente, ello implica $\nu_1(g) > j$. Esto por definición significa $g \in S_j$ con $f(j) = r$, de donde se obtiene $g \in \bigcup_{f(i)=r} S_i$.

Sea ahora $S_i \subset T_h = \bigcup_{f(j)=h} S_j$. Como ν_1 es sobreyectiva, existe $g \in S_i$ con $\nu_1(g) = i$. De este modo $S_i \subset T_h$ implica que existe j tal que $g \in S_j$ con $f(j) = h$. Sin embargo $g \in S_j$ implica $i = \nu_1(g) \geq j$, de donde, como f es creciente, se obtiene $f(i) \geq f(j) = h$. $\square$

Un filtro de subgrupos absorbentes $\{S_i\}_{i\in I}$ será una **especialización** de otro filtro $\{T_r\}_{r\in J}$ cuando verifica dos propiedades:

- para todo $i \in I$ existe $\max\{r \in J \mid S_i \subset T_r\} = m_i$ y
- para todo $r \in J$ se tiene $T_r = \bigcup_{m_j=r} S_j$.

La relación de especialización es una relación de orden en el conjunto de filtros absorbentes de subgrupos de G.

Proposición 3.5. *Dadas valoraciones ν_1 y ν_2, sean $\{S_i\}_{i\in I}$, $\{T_j\}_{j\in J}$ las familias de subgrupos absorbentes asociadas. Entonces $\{S_i\}_{i\in I}$ es una especialización de $\{T_j\}_{j\in J}$, si y solo si la valoración ν_2 domina a la valoración ν_1.*

Demostración. Si $\{S_i\}_{i\in I}$ es una especialización de $\{T_j\}_{j\in J}$, definimos $f : I \to J$ por $f(i) = m_i = \max\{j \in J \mid S_i \subset T_j\}$. La aplicación f está bien definida y es creciente. En efecto, para $i_1 \leq i_2$ se tiene $S_{i_2} \subset S_{i_1}$; luego, se pasa a $S_{i_2} \subset T_{f(i_1)}$, lo cual a su vez implica $T_{f(i_1)} \subset T_{f(i_2)}$, esto es $f(i_1) \leq f(i_2)$. Veamos a continuación que se satisface la relación $f(\nu_1(g)) = \nu_2(g)$. Primero notemos que para $\nu_1(g) = i$ se tiene

$$g \in S_i \subset \bigcup_{f(j)=f(i)} S_j = T_{f(i)};$$

lo que equivale a tener $f(\nu_1(g)) \leq \nu_2(g)$. Probaremos que $h > f(i)$ implica $g \notin T_h$: con ello conseguimos $\nu_2(g) = f(i) \geq f(\nu_1(g))$ y habremos terminado. En efecto, si $h > f(i)$, aparece $j \in J$ con $f(j) = h$. Como se tiene $f(j) = h > f(i)$ y f es creciente, se logra $j > i$. Por definición de i se sigue entonces $g \notin S_j$. En base a ello, para $f(j) = h > f(i)$ se tendrá $g \notin T_h$.

El recíproco quedó probado en la proposición 3.4. $\square$

En esta sección hemos demostrado el teorema siguiente.

Teorema 3.6. *Si G es un grupo libre de torsión, entonces existen isomorfismos de conjuntos ordenados entre:*

i. *las relaciones de dominación en G ordenadas por contenido,*

ii. *las valoraciones de G ordenadas por la relación de orden natural y*

iii. *los filtros absorbentes de subgrupos de G ordenados por la relación $\leq$ definida por $\{S_i\}_{i\in I} \leq \{T_j\}_{j\in J}$ siempre y cuando S_i sea una especialización de T_j.* $\square$

4. Grupos graduados asociados a una valoración

Para $\nu : G \to I$ una valoración, escribamos

$$S_i = \{g \in G \mid \nu(g) \geq i\} \quad \text{y} \quad S_i^+ = \{g \in G \mid \nu(g) > i\}.$$

Llamaremos **grupo graduado de G asociado a ν** al grupo

$$Gr_\nu(G) = \bigoplus_{i\in I} S_i/S_i^+,$$

y **graduado de Hahn asociado** a la valoración a

$$\mathcal{H}_\nu(G) = \coprod_{i\in I} S_i/S_i^+.$$

Para probar que un grupo valorado y divisible puede sumergirse en su graduado de Hahn usaremos el siguiente lema.

Lema 4.1. *(Lema de Banaschewski.) Si V es un espacio vectorial sobre K y $\mathcal{S}$ es una familia no vacía de subespacios de V, entonces existe una aplicación $\gamma : \mathcal{S} \to \mathcal{L}(V)$, con $\mathcal{L}(V)$ el conjunto de subespacios de V, tal que*

i. para $L \in \mathcal{S}$ se tiene $V = L \oplus \gamma(L)$ (así, $\gamma(L)$ es complemento de L),

ii. si $L_1 \subset L_2$ son elementos de $\mathcal{S}$, entonces se tiene $\gamma(L_2) \subset \gamma(L_1)$.

Demostración. Una prueba de este lema puede verse en [6]. □

Teorema 4.2. *Si G es un grupo divisible y valorado, entonces G se puede sumergir en su graduado de Hahn.*

Demostración. Si G es un grupo divisible, entonces se le puede dotar de una estructura de $\mathbb{Q}$-espacio vectorial y podremos aplicar el lema de Banaschewski a una familia de subespacios de G adecuadamente elegida.

Dado el filtro $\{S_i\}_{i \in I}$ asociado a la valoración, definamos

$$\mathcal{S} = \{L \in \mathcal{L}(G) \mid L = \bigcup_{j \in J} S_j, J \subset I, J \neq \emptyset\}.$$

Notemos que como $\{S_i\}_{i \in I}$ es una familia creciente de subespacios de G, los elementos de $\mathcal{S}$ son efectivamente subespacios de G. El lema de Banaschewski garantiza la existencia de una aplicación γ que nos permite seleccionar un complementario $\gamma(L)$ para cada $L \in S$ de modo que la condición $L_1 \subset L_2$ implique $\gamma(L_2) \subset \gamma(L_1)$.

Seguidamente, en cada espacio $T_i = S_i/S_i^+$ elijamos de forma conveniente una base $\{g_{ij} + S_i^+\}_{j \in J_i}$ con representantes $\{g_{ij}\}_{i \in I, j \in J_i}$. Para cada índice i podemos construir el subespacio $U_i = L(\{g_{ij}\}_{j \in J_i})$.

Claramente se tiene la inclusión $U_i \subset S_i$ y que $\theta_i : U_i \to T_i$, definido a través de $\theta_i(g_{ij}) = g_{ij} + S_i^+$, es un isomorfismo. Además se satisface $U_i + S_i^+ = S_i$, donde la suma es directa. Luego se cumple

$$G = S_i + \gamma(S_i) = U_i + S_i^+ + \gamma(S_i).$$

Podemos construir entonces la proyección $\pi_i : G \to U_i$, que satisface $\pi_i|_{S_i^+} = \pi_i|_{\gamma(S_i)} = 0$ y $\pi_i|_{U_i} = Id$. Esta función al componerse con θ_i define homomorfismo

$$\theta_i \circ \pi_i = \varphi_i : G \to T_i.$$

Estos, juntos, inducen el homomorfismo $\varphi : G \to \prod_{i \in I} T_i$ definido por $\varphi(g) = (\varphi_i(g))_{i \in I}$. Probaremos que se tiene $Im(\varphi) \subset \coprod_{i \in I} T_i$, es decir que $Sop(\varphi(v))$ está bien ordenado para cada $v \in G$.

Dado $C \subset Sop(\varphi(v))$, constataremos que C tiene un mínimo, es decir, mostraremos que existe $i \in C$ con $S_j \subset S_i$ para cada $j \in C$. Formamos $S = \bigcup_{j \in C} S_j$ para así tener $S \in \mathcal{S}$. De este modo podremos escribir $G = S \oplus \gamma(S)$. En consecuencia, dado $v \in G$, existen únicos $u \in S$ y $w \in \gamma(S)$ con $v = u + w$. Siempre se cumplirá $\varphi_j(v) = \varphi_j(u) + \varphi_j(w)$, independientemente de si j pertenece o no a C. Sin embargo, para $j \in C$, se tendrá $S_j \subset S$, lo que lleva a $\gamma(S) \subset \gamma(S_j)$: esto conduce a $\varphi_j(w) = 0$, gracias a $\pi_j(w) = 0$. Esto prueba que se satisface $\varphi_j(v) = \varphi_j(u)$ para cada $j \in C$. Por otro lado $u \in S = \bigcup_{j \in C} S_j$ asegura la existencia de i_0 con $u \in S_{i_0}$. Veamos que se tiene $i_0 = \min \{C\}$, es decir $S_j \subset S_{i_0}$ para todo $j \in C$. De no ser así, existirá $j \in C$ tal que $S_j \not\subset S_{i_0}$. Al ser la familia S_j monótona ello implicará $S_{i_0} \subsetneq S_j$, lo cual conduce a $S_{i_0} \subset S_j^+$ y de ahí a $\pi_j(u) = 0$. Ello lleva a $\varphi_j(u) = \varphi_j(v) = 0$ en contradicción con $j \in Sop(\varphi(v))$. Además φ es inyectiva porque para cada $v \in G$ no nulo existe i con $v \in S_i \setminus S_i^+$; en consecuencia concluimos $\varphi_i(v) \neq 0$. □

La siguiente proposición es una consecuencia del teorema anterior.

Proposición 4.3. *Sea G un grupo sin torsión y $\nu : G \to I$ una valoración de G. Entonces existe una única valoración $\overline{\nu} : \overline{G} \to I$ con $\overline{\nu} \circ \varphi = \nu$. Esta valoración verifica $L(S_i(\nu)) = S_i(\overline{\nu})$.*

Demostración. Es claro que $\overline{\nu}(\frac{g}{n}) = \nu(g)$ caracteriza tal propiedad. □

Como consecuencia del teorema 4.2 y la proposición 4.3, un grupo G con la valoración ν se puede sumergir en el grupo divisible $\overline{G}$ —el cierre divisible de G—, al cual se extiende la valoración ν dando lugar a una valoración $\overline{\nu}$. El grupo valorado $(\overline{G}, \overline{\nu})$ tiene por esqueleto $\{\overline{H}_i\}_{i \in I}$, el mismo que se corresponde con el esqueleto $\{H_i\}_{i \in I}$ del grupo valorado (G, ν) por intermedio de

$$H_i = S_i(\nu)/S_i(\nu)^+, \quad \overline{H}_i = L(S_i(\nu))/L(S_i(\nu)^+),$$

de modo que $\overline{H}_i$ no es sino el cierre divisible de H_i para todo i. Tenemos entonces el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi|G"] \arrow[d, "l"] & \coprod_{i \in I} H_i \arrow[d, "\delta"] \\ \overline{G} \arrow[r, "\varphi"] & \coprod_{i \in I} \overline{H}_i, \end{tikzcd}$$

donde l es la inmersión $l(g) = \dfrac{g}{1}$ y δ es el producto de las inmersiones $H_i \hookrightarrow \overline{H}_i$, es decir,

$$\delta\left((h_i)_{i \in I}\right) = \left(\frac{h_i}{1}\right)_{i \in I}.$$

La valoración $\overline{\nu}$ se extiende a $\coprod_{i \in I} \overline{H}_i$ (ver proposición 4.3) como la función de orden de modo que se satisface

$$\overline{\nu}\left(\frac{g}{1}\right) = \circ\left(\varphi\left(\frac{g}{1}\right)\right).$$

Por restricción a G, $\varphi|_G$ permite extender la valoración ν de G a $\coprod_{i \in I} H_i$, es decir, se tendrá

$$\nu(g) = \circ(\varphi(g)).$$

En resumen, hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 4.4. *Si G es un grupo sin torsión y ν es una valoración de G, entonces G se puede sumergir en $\mathcal{H}_\nu(G)$ de modo que si llamamos φ a la inmersión, entonces para $g \in G$ se tiene $\nu(g) = \circ(\varphi(g))$.* $\square$

Por lo tanto, todo grupo valorado y sin torsión se puede sumergir en un producto de Hahn de subgrupos para el cual la valoración equivale a la función de orden.

Referencias

[1] Aschenbrenner, M., Dries, L. V. D. *Asymptotic differential algebra.* Contemporary Mathematics, 373, (2005), pp. 49-86.

[2] Clifford, A. H. *Note on Hahn's Theorem on Ordered Abelian Groups.* Proceedings of the American Mathematical Society Vol. 5, No. 6 (Dec., 1954), pp. 860-863.

[3] Conrad, P. *Embedding Theorems for Abelian Groups with Valuations.* American Journal of Mathematics Vol. 75, No. 1 (Jan., 1953), pp. 1-29.

[4] Gravett, K.A.H. *Ordered Abelian groups.* The Quarterly Journal of Mathematics, vol. 7, no. 1, pp. 57-63.

[5] Hahn, H. *Ober die nichtarchimedischen Grossensysteme.* Sitz. der K. Akad. der Wiss., Math.Nat.KI. vol.116, Abt.Ila(1907), pp. 601-655.

[6] Rimbenboim, P. *Théorie des valuations.* Les presses de L'Université de Montréal, Montreal, Quebec, (1965).

[7] Robinson, A., Zakon, E. *Elementary Properties of Ordered Abelian Groups.* Transactions of the American Mathematical Society Vol. 96, No. 2 (Aug., 1960), pp. 222-236.

[8] Van Der Hoeven, J. *Transseries and real differentiale algebra* Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, (2006).

[9] Ugarte, F. *Álgebra de series y solución de ecuaciones algebraicas sobre cuerpos valorados.* (Ph D. Thesis) Univ. Valladolid, (2010).

[10] Ugarte, F. *Estructura de los grupos abelianos ordenados.* Pro Mathematica Vol. 29, No. 57 (2016), pp. 105-128.

Abstract

We define valuations and dominance relations in torsion-free abelian groups and prove that they are essentially the same objects. Next we show that valuations correspond with filtrations of subgroups closed under division by integers. We also prove that every torsion-free abelian valued group can be embedded in the Hahn product of subgroups defined by the respective valuations.

Keywords: Valuations, ordered groups, dominance relations, order relations, Hahn's theorem.

Francisco Ugarte Guerra
Sección Matemáticas
Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú
fugarte@pucp.edu.pe