Hexagonalidad y estructura transversalmente afín

Andrés Beltrán[1,2]

Marzo, 2017

Resumen

El presente trabajo prueba que la hexagonalidad del web $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$, imagen directa de la foliación $\mathcal{F}$ por la aplicación de Gauss $\mathcal{G}_{\mathcal{F}} : \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \dashrightarrow \check{\mathbb{P}}^2_{\mathbb{C}}$, implica que la foliación $\mathcal{F}$ es transversalmente afín.

MSC(2010): 53A60, 57R30.

Palabras clave: Foliaciones, webs.

[1] *Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias, PUCP.*
[2] *DGI-2016-1-0018, PUCP.*

1. Introducción

Existe una noción geométrica de hexagonalidad de un $3-$web $\mathcal{W}$ en $\mathbb{C}^3$ introducida por Blaschke y Dubourdieu [2] y caracterizada por la equivalencia de $\mathcal{W}$ con el $3-$web trivial dado por $\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z = 0$. No obstante, otra forma de caracterizar dicha noción es a través del anulamiento de su curvatura, una $2-$forma meromorfa con polos contenidos en el discriminante del web $\mathcal{W}$. La hexagonalidad para un $d-$web $\mathcal{W}$, con $d > 3$, se analiza a partir de la hexagonalidad de todos sus $3-$subwebs [16].

La aplicación de Gauss $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ asociada a una foliación $\mathcal{F}$ sobre $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ es una aplicación racional $\mathcal{G}_{\mathcal{F}} : \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \dashrightarrow \check{\mathbb{P}}^2_{\mathbb{C}}$ definida por $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(p) = T_p\mathcal{F}$, donde $T_p\mathcal{F}$ es la recta tangente de la foliación $\mathcal{F}$ en un punto regular p, cuyo conjunto de indeterminación coincide con el conjunto singular de $\mathcal{F}$. Nuestro punto de partida son las siguientes construcciones.

i) Si la foliación $\mathcal{F}$ es de grado d, en uso de la dualidad proyectiva, obtenemos en $\check{\mathbb{P}}^2_{\mathbb{C}}$ un $d-$web denotado por $\mathrm{Leg}\mathcal{F}$.

ii) La imagen directa $\mathcal{G}_*\mathcal{F}$ de la foliación $\mathcal{F}$ es el $d-$web sobre $\check{\mathbb{P}}^2_{\mathbb{C}}$ que se obtiene por la superposición de las $d-$foliaciones definidas por la aplicación de recubrimiento $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$.

En [7] los autores asocian a foliaciones de grado 3 sobre $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ una trivolución birracional: toda recta genérica ℓ es tangente a una foliación $\mathcal{F}$ en tres puntos; la aplicación buscada que intercambia estos puntos en general es multivaluada. Ellos obtienen un criterio para que dicha aplicación sea birracional y construyen ejemplos de $3-$webs hexagonales a partir de foliaciones que admiten trivoluciones no triviales asociadas a una foliación $\mathcal{F}$ de grado 3.

En este artículo demostramos que la hexagonalidad del web $\mathcal{G}_*\mathcal{F}$ implica que la foliación $\mathcal{F}$ es transversalmente afín, donde $\mathcal{G}_{\mathcal{F}} : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \check{\mathbb{P}}^2_{\mathbb{C}}$ es la aplicación de Gauss asociada a la foliación $\mathcal{F}$.

Definición 1.1. Una **estructura transversalmente afín singular** para una foliación $\mathcal{F}$ sobre el plano proyectivo complejo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ consiste de un par (ω, η) de $1-$formas meromorfas que verifican las siguientes condiciones:

i) ω define la foliación $\mathcal{F}$,

ii) $\mathrm{d}\omega = \omega \wedge \eta$,

iii) $\mathrm{d}\eta = 0$.

Un criterio para determinar cuando una foliación admite una estructura transversalmente afín es el criterio de Singer (ver [15]).

Teorema 1.2 (Criterio de Singer). *Sea ω una forma racional en $\mathbb{C}^2$. Entonces ω tiene una integral primera liouvilliana si y solamente si la foliación definida por $\mathcal{F}$ admite una estructura transversalmente afín.*

Webs

Un **germen de $k-$web singular** de codimensión uno sobre $(\mathbb{C}^n, 0)$ es una clase de equivalencia $[\omega]$ de gérmenes de $k-$formas simétricas, esto es, secciones de $\mathrm{Sym}^k\Omega^1(\mathbb{C}^n, 0)$ módulo multiplicación por $\mathcal{O}^*(\mathbb{C}^n, 0)$, tales que cualquier representante ω definido en una vecindad conexa U del origen verifica las siguientes propiedades:

1. el conjunto de ceros de ω tiene codimensión mayor o igual a 2;
2. ω puede ser vista como un polinomio homogéneo de grado k libre de factores cuadrados en el anillo $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)[\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_k]$;
3. para un punto genérico $p \in U$, $\omega(p)$ es un producto de k $1-$formas;
4. para un punto genérico $p \in U$, el germen de ω en p es el producto de $k-$gérmenes de $1-$formas integrables.

Un **$k-$web global $\mathcal{W}$ de codimensión uno** sobre una superficie compleja $\mathbf{S}$ está dado por una cobertura por abiertos $\mathcal{U} = \{U_i\}$ de $\mathbf{S}$ y $k-$formas simétricas $\omega_i \in \mathrm{Sym}^k\Omega^1_{\mathbf{S}}(U_i)$ que verifican las siguientes condiciones.

a) Para cada intersección no vacía $U_i \cap U_j$ de elementos de $\mathcal{U}$ existe una función no nula $g_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$ tal que $\omega_i = g_{ij}\omega_j$.

b) El conjunto singular $\mathrm{Sing}(\omega_i)$ de ω_i tiene codimensión al menos dos.

c) Para cada $U_i \in \mathcal{U}$ y $p \in U_i$ genérico, el germen de ω_i en p es un producto de k gérmenes de $1-$formas integrables que no son colineales dos a dos.

Cuando $k = 1$, recuperamos la definición de foliación singular de codimensión uno.

El subconjunto de $\mathbf{S}$ donde la condición (c) falla es denominado **discriminante** de $\mathcal{W}$ y se denota por $\Delta(\mathcal{W})$. Asimismo, el **conjunto singular** $\Sigma_{\mathcal{W}}$ de $\mathcal{W}$ es definido por $\Sigma_{\mathcal{W}} \cap U_i = \mathrm{Sing}(\omega_i)$ y está contenido en $\Delta(\mathcal{W})$.

Si la superficie $\mathbf{S}$ es compacta, entonces un $k-$**web global** es un elemento del espacio $H^0(\mathbf{S}, \mathrm{Sym}^k\Omega^1_{\mathbf{S}} \otimes \mathcal{N})$, donde $\mathcal{N} \in \mathrm{Pic}(\mathbf{S})$ es un fibrado lineal cuyo germen de cualquier representante en cualquier punto de $\mathbf{S}$ verifica las condiciones (1-4).

Web asociado a una foliación

De la secuencia de Euler

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}(1)^{\oplus 3} \to T\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \to 0$$

podemos deducir la siguiente secuencia exacta

$$0 \to \mathrm{Sym}^{k-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}(1)^{\oplus 3}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}} \to \mathrm{Sym}^k(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}(1)^{\oplus 3}) \to \mathrm{Sym}^k T\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \to 0.$$

De ello se sigue que un $k-$web de grado d sobre $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ queda determinado por un polinomio bihomogéneo $P(x, y, z; a, b, c)$ de grado d en las coordenadas (x, y, z) y grado k en las coordenadas (a, b, c), respectivamente. Las coordenadas $(a : b : c)$ son las coordenadas homogéneas naturales en el plano dual proyectivo:

$$\begin{aligned} T^*_{(x:y:z)}\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} &= \{\omega = a\mathrm{d}x + b\mathrm{d}y + c\mathrm{d}z \in T^*\mathbb{C}^3 : \omega(R) = 0\} \\ &= \{a\mathrm{d}x + b\mathrm{d}y + c\mathrm{d}z : ax + by + cz = 0\}, \end{aligned}$$

donde R es el campo radial. Existe una identificación natural de $\mathbb{P}T^*\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ con la variedad de incidencia

$$\mathcal{I} = \{((x:y:z),(a:b:c)) : \ ax + by + cz = 0\} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \times \check{\mathbb{P}}^2_{\mathbb{C}}.$$

Sean $\mathcal{W}$ un $k-$web de grado d sobre $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ y $P(x,y,z;a,,b,c)$ un polinomio bihomogéneo que define $\mathcal{W}$. Entonces $\mathbf{S}_{\mathcal{W}} \subset \mathbb{P}T^*\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, en adelante el **gráfico de $\mathcal{W}$ sobre** $\mathbb{P}T^*\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, está dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\mathcal{W}} = \{((x:y:z);(a:b:c)) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \times \check{\mathbb{P}}^2_{\mathbb{C}} : \\ ax + by + cz = 0, \ P(x,y,z;a,b,c) = 0\} \end{aligned}$$

bajo la identificación entre $\mathcal{I}$ y $\mathbb{P}T^*\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

Supongamos que $\mathcal{W}$ es un web irreducible de grado $d > 0$ y consideremos las restricciones π y $\check{\pi}$ a $\mathbf{S}_{\mathcal{W}}$ de las proyecciones naturales de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \times \check{\mathbb{P}}^2_{\mathbb{C}}$ sobre $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ y $\check{\mathbb{P}}^2_{\mathbb{C}}$ respectivamente. La **distribución de contacto** $\mathcal{D}$ sobre $\mathbb{P}T^*\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ es dada por

$$\mathcal{D} = \ker(a\mathrm{d}x + b\mathrm{d}y + c\mathrm{d}z) = \ker(x\mathrm{d}a + y\mathrm{d}b + z\mathrm{d}c).$$

La foliación $\mathcal{F}_{\mathcal{W}}$ inducida por $\mathcal{D}$ sobre $\mathbf{S}_{\mathcal{W}}$ se proyecta a través de π sobre un $k-$web $\mathcal{W}$ y, a través de $\check{\pi}$, sobre un $d-$web $\check{\mathcal{W}}$ en $\check{\mathbb{P}}^2_{\mathbb{C}}$. El $d-$web es llamado **transformado de Legendre** de $\mathcal{W}$ y se suele denotar por $\mathrm{Leg}\mathcal{W}$.

En los libros clásicos de ecuaciones diferenciales ordinarias uno encuentra que el transformado de Legendre es una transformación involutiva que envía una ecuación diferencial polinomial de la forma $F(x,y,p) = 0$ a otra de la forma $F(P, XP - Y, X) = 0$, donde $p = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ y $P = \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}$; ver por ejemplo [9, pág. 40].

Consideremos una carta afín (x, y) de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ y una carta afín (p, q) de $\check{\mathbb{P}}^2_{\mathbb{C}}$ cuyas coordenadas corresponden a la recta $\{y = px + q\}$. Si un web $\mathcal{W}$ es definido por una ecuación diferencial implícita $F(x, y, p) = 0$, con $p = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, entonces el web Leg$\mathcal{W}$ es definido por la ecuación implícita afín

$$\check{F}(p, q; x) = F(x, px + q, p) = 0, \quad \text{donde } x = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}; \tag{1.1}$$

en este caso el discriminante es el divisor dado por $\check{\Delta}_{\mathcal{F}} = \{\mathrm{disc}(\check{F}) = 0\}$, donde $\mathrm{disc}(\check{F})$ es el $x-$discriminante.

Observación 1.3. Si $\mathcal{F} : X = A(x, y)\dfrac{\partial}{\partial x} + B(x, y)\dfrac{\partial}{\partial y}$ es una foliación no saturada pero libre de cuadrados, entonces su transformado de Legendre está bien definido.

Curvatura de webs

Sea $\mathcal{W}$ un $k-$web completamente descomponible sobre una superficie $\mathbf{S}$, esto es $\mathcal{W} = \mathcal{F}_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{F}_k$ donde cada foliación $\mathcal{F}_i$ es definida por la $1-$forma ω_i con singularidades aisladas. De acuerdo con [16], para cada terna (r, s, t) con $1 \leq r < s < t \leq k$ definimos $\eta_{rst} = \eta(\mathcal{F}_r \boxtimes \mathcal{F}_s \boxtimes \mathcal{F}_t)$ como la única $1-$forma meromorfa que verifica las relaciones $\mathrm{d}(\delta_{st}\omega_r) = \eta_{rst} \wedge \delta_{st}\omega_r$, $\mathrm{d}(\delta_{tr}\omega_s) = \eta_{rst} \wedge \delta_{tr}\omega_s$ y $\mathrm{d}(\delta_{rs}\omega_t) = \eta_{rst} \wedge \delta_{rs}\omega_t$; donde la función δ_{ij} satisface la relación $\omega_i \wedge \omega_j = \delta_{ij}\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. Las $1-$formas η_{rst} están bien definidas módulo la suma de una $1-$forma holomorfa cerrada. La curvatura del web $\mathcal{W}$ es $K(\mathcal{W}) = \mathrm{d}\eta(\mathcal{W})$, donde $\eta(\mathcal{W}) = \displaystyle\sum_{1 \leq r < s < t \leq k} \eta_{rst}$; es decir, equivale a la suma de las curvaturas de todos los $3-$subwebs de $\mathcal{W}$. Se verifica que $K(\mathcal{W})$ es una $2-$forma meromorfa intrínsecamente asociada a $\mathcal{W}$; esto es, para cualquier aplicación holomorfa dominante φ se tiene $K(\varphi^*\mathcal{W}) = \varphi^*(K(\mathcal{W}))$.

2. Resultado principal

Uno de los asuntos discutidos en [7] es la posible relación entre la existencia de trivoluciones no triviales asociadas a una foliación $\mathcal{F}$ de grado 3 y la hexagonalidad del web Leg$\mathcal{F}$. En esta sección brindamos una respuesta parcial a esta pregunta.

Teorema 2.1. *Sea $\mathcal{F}$ una foliación de grado d sobre $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Si el web Leg$\mathcal{F}$ es hexagonal, entonces la foliación $\mathcal{F}$ admite una estructura transversalmente afín singular.*

Prueba. El hecho de que Leg$\mathcal{F}$ sea hexagonal es equivalente a que $\mathcal{G}^*_{\mathcal{F}}\mathrm{Leg}\mathcal{F} = \mathcal{F} \boxtimes \mathcal{W}^{\perp}$ sea hexagonal, donde $\boxtimes$ denota la superposición de una foliación con un $(d-1)-$web y $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ es la aplicación de Gauss asociada a la foliación $\mathcal{F}$. Al aplicar [1, teorema 18.2] al recubrimiento topológico asociado al núcleo de la monodromía del web $\mathcal{W}^{\perp}$ deducimos que existe una superficie algebraica normal $S^{\perp}$ irreducible y un recubrimiento ramificado $\rho : S^{\perp} \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tal que $\rho^*\mathcal{W}^{\perp}$ es totalmente descomponible. De esta manera se tendrá

$$\mathcal{W} = \rho^*(\mathcal{G}^*_{\mathcal{F}}\mathrm{Leg}\mathcal{F}) = \rho^*(\mathcal{F}) \boxtimes \rho^*(\mathcal{W}^{\perp}) = \mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2 \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{F}_d,$$

donde $\mathcal{F}_1 = \rho^*\mathcal{F}$. Asimismo, la curvatura de $\mathcal{W}$ queda definida por $K(\mathcal{W}) = \mathrm{d}\eta(\mathcal{W})$, donde

$$\eta(\mathcal{W}) = \eta(\mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2 \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{F}_d) = \sum_{1 \leq r < s < t \leq d} \eta_{rst}.$$

Supongamos ahora que ω_i sea una forma racional que define $\mathcal{F}_i$. Puesto que $\mathcal{W}$ es hexagonal, existe $f_i \in \mathbb{C}(S^{\perp})$ y una $1-$forma racional η sobre $S^{\perp}$ sujetas a

$$\sum_{i=1}^{2} f_i\omega_i = 0, \quad \mathrm{d}(f_i\omega_i) = f_i\omega_i \wedge \eta, \quad \mathrm{d}\eta = 0.$$

De esta manera la foliación $\mathcal{F}_1 = \rho^*\mathcal{F}$ admite una estructura transversalmente afín. De [6, Teorema 1.4] o [7, teorema 2.21] se concluye que la foliación $\mathcal{F}$ también admite una estructura transversalmente afín. □

El recíproco de la proposición no es cierto, aún en el caso Galois (ver [5]), como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2. La foliación dada por el campo vectorial

$$X(x,y) = x^3\frac{\partial}{\partial x} + (1 + x + \frac{x^2}{3})\frac{\partial}{\partial y}$$

admite una estructura transversalmente afín, puesto que posee una integral primera liouvilliana dada por $y - \frac{1}{3}\ln x + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}$.

Por otro lado, de la relación (1.1) deducimos

$$\check{F}(p,q,x) = pA(a, px + q) - B(x, px + q),$$

donde $x = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}$, $A(x,y) = x^3$ y $B(x,y) = 1 + x + \frac{x^3}{3}$. De esta manera, el web $\mathrm{Leg}\mathcal{F}$ está dado por

$$\omega = p\mathrm{d}q^3 + \frac{1}{3}\mathrm{d}q^2\mathrm{d}p - \mathrm{d}q\mathrm{d}p^2 + \mathrm{d}p^3 = 0;$$

ver apéndice 3. Obsérvese que este web no es hexagonal, ya que su curvatura $K(\mathrm{Leg}\mathcal{F}) = \frac{81}{1+27p}\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q$ es no nula. Además, se tiene que el grupo de transformaciones birracionales $D_{\mathcal{F}} = \{\tau \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2) : \mathcal{G}_{\mathcal{F}} = \mathcal{G}_{\mathcal{F}} \circ \tau\} = \langle \tau \rangle$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_3$, donde $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ es la aplicación de Gauss asociada a $\mathcal{F}$ y se cumple

$$\tau(x,y) = \left(x + \frac{x(x+3)(-2x-3+\sqrt{3}i)}{2(x^2+3x+3)}, \right.$$
$$\left. y + \frac{(x+3)(1+x+\frac{x^2}{3})(-2x-3+\sqrt{3}i)}{x^2(x^2+3x+3)} \right);$$

es decir $\mathcal{F}$ es Galois.

El resultado principal de Cousin y Pereira [8, Theorem A] conduce a una dicotomía para cada foliación transversalmente afín sobre una variedad compleja proyectiva cuyo primer número de Betti es cero.

Teorema 2.3 (Cousin-Pereira)**.** *Sea X una variedad compleja proyectiva tal que $H^1(X, \mathbb{C}) = 0$, y $\mathcal{F}$ una foliación singular transversalmente afín sobre X. Entonces al menos una de las siguientes afirmaciones se verifica:*

1. *existe un morfismo Galois finito $\rho : Y \longrightarrow X$ tal que $\rho^*\mathcal{F}$ queda definida por una $1-$forma racional cerrada; o*

2. *existe una foliación Ricatti $\mathcal{R}$ transversalmente afín sobre una superficie reglada S y una aplicación racional $q : X \dashrightarrow S$ tal que $\mathcal{F} = q^*\mathcal{R}$.*

Si particularizamos este resultado al caso $X = \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ obtenemos una descripción bastante precisa de las foliaciones $\mathcal{F}$ transversalmente afines en el plano proyectivo complejo que, por la proposición 2.1, son las únicas candidatas a verificar la condición que Leg$\mathcal{F}$ sea hexagonal.

Corolario 2.4. *Sea $\mathcal{F}$ una foliación sobre $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ cuyo web dual Leg$\mathcal{F}$ es hexagonal. Entonces o existe un morfismo Galois genéricamente finito $p : S \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tal que $p^*\mathcal{F}$ es definida por una $1-$forma racional cerrada o bien existe una foliación Ricatti $\mathcal{R} : \mathrm{d}y + (a(x) + yb(x))\mathrm{d}x = 0$ transversalmente afín y una aplicación racional $q : \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \dashrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ tal que $\mathcal{F} = q^*\mathcal{R}$, donde $a(x)$, $b(x) \in \mathbb{C}(x)$.* $\square$

3. Apéndice

Presentamos un algoritmo realizado en Maple por O. Ripoll (17) para calcular la curvatura de un $3-$web $\mathcal{W}$ conociendo los coeficientes de la función que lo define.

```
restart:with(LinearAlgebra):
kw:=proc(F) local a0,a1,a2,a3,R,alpha0,alpha1,alpha2,k:
a3:=coeff(F,p,0):a2:=coeff(F,p,1):a1:=coeff(F,p,2):a0:=coeff(F,p,3):
R:=Determinant(Matrix([[a0,a1,a2,a3,0],[0,a0,a1,a2,a3],
    [3*a0,2*a1,a2,0,0],[0,3*a0,2*a1,a2,0],[0,0,3*a0,2*a1,a2]]));
alpha0:=[diff(a0,y),diff(a0,x)+diff(a1,y),diff(a1,x)+diff(a2,y),
```

```
    diff(a2,x)+diff(a3,y),diff(a3,x)];
alpha1:=Determinant(Matrix([alpha0,[a0,a1,a2,a3,0],[-a0,0,a2,2*a3,0],
    [0,-2*a0,-a1,0,a3],[0,0,-3*a0,-2*a1,-a2]]));
alpha2:=Determinant(Matrix([alpha0,[0,a0,a1,a2,a3],[-a0,0,a2,2*a3,0],
        [0,-2*a0,-a1,0,a3],[0,0,-3*a0,-2*a1,-a2]]));
k:=simplify(diff(alpha2/R,x)+diff(alpha1/R,y)):
end proc:
```

Para ser precisos, si el 3−web está dado por la condición

$$\mathcal{W}: \; F(x,y,p) = a_0(x,y)p^3 + a_1(x,y)p^2 + a_2(x,y)p + a_3(x,y) = 0,$$

donde $p = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, en [17] se prueba que la curvatura de tal web está dada por la 2−forma

$$K(\mathcal{W}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}(A_2) - \frac{\partial}{\partial y}(A_1)\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

donde las expresions A_1 y A_2 están definidas por

$$A_1 = \frac{\alpha_1}{R}, \qquad A_2 = \frac{\alpha_2}{R},$$

donde $R = \mathrm{Res}(F, \partial_p(F))$ es la $p-$resultante de F y las funciones α_1 y α_2 son determinantes en términos de los coeficientes a_i, una vez omitida la dependencia de x, y:

$$\alpha_1 = \begin{vmatrix} \partial_y(a_0) & \partial_x(a_0)+\partial_y(a_1) & \partial_x(a_1)+\partial_y(a_2) & \partial_x(a_2)+\partial_y(a_3) & \partial_y(a_3) \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ -a_0 & 0 & a_2 & 2a_3 & 0 \\ 0 & -2a_0 & -a_1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & -3a_0 & -2a_1 & -a_2 \end{vmatrix}$$

$$\alpha_2 = \begin{vmatrix} \partial_y(a_0) & \partial_x(a_0)+\partial_y(a_1) & \partial_x(a_1)+\partial_y(a_2) & \partial_x(a_2)+\partial_y(a_3) & \partial_y(a_3) \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_0 & 0 & a_2 & 2a_3 & 0 \\ 0 & -2a_0 & -a_1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & -3a_0 & -2a_1 & -a_2 \end{vmatrix}.$$

Referencias

[1] W. Barth, C. Peters, A. Van de Ven, *Compact Complex Surfaces*, Ergebnise der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)**4**. Springer-Verlag, Berlin (1984).

[2] W. Blaschke, J. Dubourdieu, *Invarianten von Kurvengeweben*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar des Universitat Hamburgh 6 (1928): 199-215.

[3] E. Bertini, *Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano*. Annali di Mat., 8 :244-286, 1877.

[4] A. Beltrán, M. Falla, D. Marín, *Flat 3-webs of degree one on the projective plane*, Annales de la Faculté des Sciencies de Toulouse XXIII (4), 2014, pp. 779-796.

[5] A. Beltrán, M. Falla, D. Marín, M. Nicolau, *Foliations and Webs Inducing Galois Coverings*, IMRN, 2016 (12), pp.1-60.

[6] G. Casale, *Suites de Godbillon-Vey et intégrales premières*, C.R. Math Acad. Sci. Paris **335** (2002), 1003-1006.

[7] D. Cerveau and J. Deserti, *Feuilletages et transformations periódiques*, Experiments. Math. **19** (2010), 447-464.

[8] G. Cousin and J. V. Pereira, *Transversaly affine foliations on projective manifolds*, Math Research Letters (2014) 21 (5), pp. 985-1014.

[9] E. Ince, *Ordinary Differential Equations*, Dover Publications, 1944.

[10] S.L. Krushkal', B.N. Apanasov and Gusevskii, *Kleinian Groups and Uniformization in Examples and Problems*, Translations of Mathematical Monographs **62**, AMS (1986).

[11] D. Marín and J.V. Pereira, *Rigid flat webs on the projective plane*. Asian Journal of Mathematics, 17 (2013), no. 1, 163-192.

[12] B. Maskit, *Kleinian groups*. Springer-Verlag (1988).

[13] M. Namba, *Branched coverings and algebraic functions*, Pitman Research Notes in Mathematics Series **161** (1987).

[14] J. V. Pereira, *Vector fields, invariant varieties and linear systems*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 51 (2001), no. 5, 1385–1405.

[15] J. V. Pereira, *Integrabilidad de Folheacoes holomorfas*, 24 Colóquio Brasileiro de Matemática, Publicações Matemáticas, IMPA, 2009.

[16] J. V. Pereira and L. Pirio, *An invitation to web geometry*, Publiçacões Matemáticas, IMPA, 2009.

[17] O. Ripoll, *Géométrie des tissus du plan et équations différentielles*, Thèse de Doctorat de l'Université Bordeaux 1, 2005.

Abstract

In this work we prove that the hexagonality of web $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$, the direct image of a foliation $\mathcal{F}$ by Gauss map $\mathcal{G}_{\mathcal{F}} : \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \dashrightarrow \check{\mathbb{P}}^2_{\mathbb{C}}$, implies that $\mathcal{F}$ is transversally affine.

Keywords: Foliations, webs

Andrés Beltrán
Sección Matemáticas
Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú
abeltra@pucp.edu.pe