

Singularidades presimples y simples de foliaciones de codimensión uno

P. Fernandez¹, H. Neciosup¹ y N. Saravia¹

Abril, 2017

Resumen

Tanto en dimensión dos como en dimensión tres la reducción de singularidades de foliaciones holomorfas de codimensión uno pasa por dos etapas: la primera es pasar de la singularidad dada a la singularidad presimple, la segunda de la singularidad presimple a la simple. En este artículo establecemos las formas normales de la singularidades presimples siguiendo los artículos [2], [4] y [3]. También caracterizamos las singularidades presimples con hojas cerradas.

MSC(2010): 34M35, 37F75.

Palabras clave: Foliaciones holomorfas, singularidades, resolución de singularidades.

¹ *Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias, PUCP.*

1. Introducción

Uno de los aspectos de la teoría de campos vectoriales holomorfos es entender su comportamiento en torno de sus *puntos singulares*, es decir, puntos donde el campo se anula. En un espacio ambiente de dimensión dos, el tipo más sencillo de singularidades queda definido por campos lineales.

Sea X es un campo vectorial sobre $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ con parte lineal, D_0X , no nula. Si D_0X satisface ciertas propiedades (por ejemplo, cuando los autovalores se encuentran en el dominio de Poincaré o Siegel [8]), entonces X es linealizable. Cuando el campo no tiene parte lineal, es posible aplicar un proceso de reducción de singularidades. Este proceso transforma sus singularidades en un número finito de ellas, cuyo campo, cerca de estas singularidades, admite parte lineal y su comportamiento es relativamente sencillo.

En dimensión dos una singularidad es llamada **simple** si la parte lineal del campo es no nula y tiene autovalores λ_1, λ_2 sujetos a la condición

- $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$ y $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}_+$ ó
- $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 \neq 0$ ó $\lambda_1 \neq 0$ y $\lambda_2 = 0$ (referido en adelante como **silla nodo**).

Por el teorema de Seidenberg [9], toda singularidad se puede reducir a singularidades simples mediante un número finito de explosiones. La singularidades simples fueron estudiadas muchos años antes de la publicación del teorema de Seidenberg, lográndose con ello formas normales (las llamadas formas normales de Poincaré, Dulac y Siegel).

Cuando el espacio ambiente es de dimensión tres, la existencia de una reducción de singularidades para foliaciones de codimensión uno fueron estudiadas por F. Cano y D. Cerveau [4] en el caso no-dicrítico y por F.Cano [3] en el caso dicrítico.

Cuando la dimensión es superior a tres, aún no se cuenta con un resultado análogo. En este artículo, describimos brevemente las singu-

laridades presimples y simples de una foliación de codimensión uno en un espacio ambiente de dimensión finita, objetos que generalizan las singularidades presimples y simples de dimensión dos. Propondremos los modelos formales para singularidades presimples y, a partir de estos, definiremos las singularidades simples. Los modelos formales son deducidos directamente de la “*jordanización*” formal [7] de álgebras conmutativas de campos de vectores [3], y de una forma normal formal de una 1-forma integrable. En la última sección caracterizamos las singularidades presimples con la propiedad de que todas sus hojas sean cerradas.

2. Foliaciones singulares adaptadas

Sea X una variedad analítica compleja de dimensión n . Fijemos la siguiente notación.

- El **haz de gérmenes de funciones holomorfas sobre X** será denotado \mathcal{O}_X . La fibra en cada punto $P \in X$ será denotado por $\mathcal{O}_{X,P}$.
- El **haz ideal maximal** del haz \mathcal{O}_X será denotado \mathfrak{m}_X . La **fibra** en cada punto $P \in X$ es el ideal maximal del anillo local $\mathcal{O}_{X,P}$ denotado por $\mathfrak{m}_{X,P}$.

Un subconjunto analítico de codimensión uno, $E \subset X$, es un **divisor con cruzamientos normales** si para todo punto $P \in X$ existe una vecindad coordenada $(U, (x_1, x_2, \dots, x_n))$, donde $P = (0, \dots, 0)$, tal que

$$E|_U : \prod_{i \in A} x_i = 0; \quad A \subset \{1, 2, \dots, n\}.$$

Si $E \subset X$ es un divisor con cruzamientos normales denotamos por $e = e(E, P)$ el número de componentes irreducibles de E que pasan por el punto P . Obsérvese que se satisface

$$e(E, P) \leq n, \quad \text{para } P \in X.$$

Denotemos por $\Omega_X[-E]$ el haz de gérmenes de 1-formas meromorfas con polos simples a lo largo del divisor E . Una sección ω alrededor de un punto $P \in X$ de este haz en las coordenadas $(U, (x_1, x_2, \dots, x_n))$, se expresa como

$$\omega = \sum_{i \in A} a_i \frac{dx_i}{x_i} + \sum_{i \notin A} a_i dx_i,$$

donde a_i son funciones holomorfas en U .

Una **foliación** \mathcal{F} en X de codimensión uno **adaptada** al divisor E es un par (\mathcal{F}, E) , donde \mathcal{F} es un \mathcal{O}_X -submódulo de $\Omega_X[-E]$ sujeto a las siguientes condiciones:

- a) \mathcal{F} es localmente libre de rango uno,
- b) \mathcal{F} es **integrable**, es decir satisface $\mathcal{F} \wedge d\mathcal{F} = 0$, con d el diferencial exterior y
- c) \mathcal{F} es **saturado**, es decir, el cociente $\frac{\Omega_X[-E]}{\mathcal{F}}$ es libre de torsión.

Observación 2.1. El \mathcal{O}_X -módulo de torsión del cociente $\frac{\Omega_X[-E]}{\mathcal{F}}$ es definido como

$$\text{Tor} \left(\frac{\Omega_X[-E]}{\mathcal{F}} \right) = \left\{ \bar{\eta} : \text{existe } g \in \mathcal{O}_X^* - \{0\} \text{ tal que } g \cdot \bar{\eta} = 0 \right\}. \quad (2.1)$$

Dado que $\frac{\Omega_X[-E]}{\mathcal{F}}$ es libre de torsión, se tiene

$$\text{Tor} \left(\frac{\Omega_X[-E]}{\mathcal{F}} \right) = \{0\},$$

es decir, dado $\eta \in \Omega_X[-E]$, existe $g \in \mathcal{O}_X^*$ tal que $g \cdot \eta \in \mathcal{F}$, en donde se tiene necesariamente $\eta \in \mathcal{F}$. Como \mathcal{F} tiene rango uno, existe una 1-forma $\omega \in \Omega_X[-E]$ que genera \mathcal{F} , esto es, se cumple $\mathcal{F} = \omega \cdot \mathcal{O}_X$. Localmente, en las coordenadas (x_1, \dots, x_n) , esta 1-forma se expresa cual

$$\omega = \sum_{i \in A} a_i \frac{dx_i}{x_i} + \sum_{i \notin A} a_i dx_i. \quad (2.2)$$

Observación 2.2. Si el cociente $\frac{\Omega_X[-E]}{\mathcal{F}}$ es libre de torsión entonces el máximo común divisor $\text{mcd}(a_1, \dots, a_n)$, vale 1. En efecto, supongamos que existen gérmenes g, b_1, \dots, b_n , no nulos ni unidades del anillo $\mathcal{O}_{X,P}$, tales que $gb_i = a_i$. De ser así, la 1-forma meromorfa

$$\eta = \sum_{i \in A} b_i \frac{dx_i}{x_i} + \sum_{i \notin A} b_i dx_i$$

satisface $g\eta = w \in \mathcal{F}$. Se tendrá así $\eta \notin \mathcal{F}$, pues caso contrario b sería una unidad. Luego la clase $\bar{\eta} \neq 0$ representaría un elemento del módulo cociente.

Sea (\mathcal{F}, E) una foliación adaptada. Definimos el **orden adaptado** de (\mathcal{F}, E) en $P \in X$ como el orden $\mathfrak{m}_{X,P}$ -ádico del submódulo \mathcal{F}_P de $\Omega_X[-E]$, esto es,

$$\nu(\mathcal{F}, E, P) = \max \left\{ k : \mathcal{F}_P \subset \mathfrak{m}_{X,P}^k \Omega_{X,P}[-E] \right\}.$$

Por definición el **lugar singular** $\text{Sing}(\mathcal{F}, E)$ de la foliación adaptada al divisor E es el conjunto de puntos $P \in X$ que cumplen $\nu(\mathcal{F}, E, P) \geq 1$.

Para ω como en (2.2), el generador de \mathcal{F} , se tiene

$$\nu(\mathcal{F}, E, P) = \min \left\{ \nu_P(a_i) : i = 1, \dots, n \right\}.$$

Si consideramos $A^* = \{i : x_i \text{ no divide a } a_i\}$, entonces la foliación

$$\mathcal{G} : \Omega = \left(\prod_{i \in A^*} x_i \right) \cdot \omega,$$

admite un conjunto singular de codimensión mayor o igual que 2.

Observación 2.3. De hecho A^* es el conjunto de índices correspondiente a las componentes irreducibles F de E en torno a P que obedecen $\Omega|_F = 0$, es decir, F resulta ser separatriz de Ω .

Si i está en A , mas no en A^* , diremos que $x_i = 0$ es una **componente dicrítica** de E para (\mathcal{F}, E) .

Un subespacio analítico Y de X se dice que tiene **cruzamientos normales** con E si en las coordenadas (2.2) existe $B \subset \{1, \dots, n\}$ tal que

$$I_{Y,P} = \sum_{i \in B} x_i \mathcal{O}_{X,P}.$$

Definimos los **órdenes adaptados** a (\mathcal{F}, E) en Y como

$$\mu(\mathcal{F}, E, Y) = \min(\{\nu_Y(a_i) : i \notin B - A\} \cup \{\nu_Y(a_i) + 1 : i \in B - A\}),$$

$$\rho(\mathcal{F}, E, Y, P) = \min(\{\nu_P(a_i) : i \notin B - A\} \cup \{\nu_P(a_i) + 1 : i \in B - A\}),$$

donde $\nu_Y(a_i) = \max\{n : a_i \in I_{Y,p}^n\}$ y $\nu_P(a_i) = \max\{n : a_i \in \mathfrak{m}_{X,P}^n\}$.

En el caso $Y = \{P\}$, diremos que $\mu(\mathcal{F}, E, \{P\})$ es la **multiplicidad adaptada** de (\mathcal{F}, E) en P .

Observación 2.4. Si $\mu(\mathcal{F}, E, Y) = r$, entonces se tiene

$$\rho(\mathcal{F}, E, Y, P) = r \quad \text{ó} \quad \rho(\mathcal{F}, E, Y, P) = r + 1,$$

es decir, siempre se cumple

$$\mu(\mathcal{F}, E, Y) \leq \rho(\mathcal{F}, E, Y, P).$$

Sea \mathcal{F} una foliación en X de codimensión uno, E un divisor con cruzamientos normales en X e $Y \subset X$ una subvariedad de X . Decimos que Y es **centro permitido** en un punto $P \in Y$ si se satisfacen las condiciones

- a) $Y \subset \text{Sing}(\mathcal{F})$,
- b) $Y \subset X$ tiene cruzamientos normales con E en P y
- c) $\mu(\mathcal{F}, E, Y) = \rho(\mathcal{F}, E, Y, P)$.

Decimos que Y es centro permitido para (\mathcal{F}, E) si todo punto de Y es un **centro permitido**.

Ejemplo 2.5. Consideremos $E : x_2x_3 = 0$, $Y : x_1 = x_3 = 0$ y

$$\omega = x_1x_2dx_1 + x_3\frac{dx_2}{x_2} + x_1^2x_2\frac{dx_3}{x_3};$$

acá se tendrá $A = \{2, 3\}$ y $B = \{1, 3\}$. Un cálculo simple conduce a

$$\begin{aligned}\mu(\mathcal{F}, E, Y) &= \min(\{\nu_Y(a_i) : i \notin B - A\} \cup \{\nu_Y(a_i) + 1 : i \in B - A\}) \\ &= \min(\{\nu_Y(a_2), \nu_Y(a_3)\} \cup \{\nu_Y(a_1) + 1\}) \\ &= \min(\{1, 2\} \cup \{2\}) = 1.\end{aligned}$$

Si $P = (0, 0, 0)$ tenemos

$$\begin{aligned}\rho(\mathcal{F}, E, Y, P) &= \min(\{\nu_P(a_i) : i \notin B - A\} \cup \{\nu_P(a_i) + 1 : i \in B - A\}) \\ &= \min(\{\nu_P(a_2), \nu_P(a_3)\} \cup \{\nu_P(a_1) + 1\}) \\ &= \min(\{1, 3\} \cup \{3\}) = 1.\end{aligned}$$

Si $Q = (0, y, 0)$, donde $y \neq 0$, tenemos

$$\begin{aligned}\rho(\mathcal{F}, E, Y, Q) &= \min(\{\nu_Q(a_i) : i \notin B - A\} \cup \{\nu_Q(a_i) + 1 : i \in B - A\}) \\ &= \min(\{\nu_Q(a_2), \nu_Q(a_3)\} \cup \{\nu_Q(a_1) + 1\}) \\ &= \min(\{1, 2\} \cup \{2\}) = 1.\end{aligned}$$

De este modo la curva Y es un centro permitido para la foliación adaptada (\mathcal{F}, E) .

Ejemplo 2.6. Para $E : x_2x_3 = 0$, $Y : x_1 = x_3 = 0$ y

$$\omega = x_1x_2dx_1 + x_3^3\frac{dx_2}{x_2} + x_1^2x_2\frac{dx_3}{x_3},$$

se tiene

$$\begin{aligned}\mu(\mathcal{F}, E, Y) &= \min(\{\nu_Y(a_2), \nu_Y(a_3)\} \cup \{\nu_Y(a_1) + 1\}) \\ &= \min(\{3, 2\} \cup \{2\}) = 2.\end{aligned}$$

Si $P = (0, 0, 0)$, tenemos

$$\begin{aligned}\rho(\mathcal{F}, E, Y, P) &= \min(\{\nu_P(a_2), \nu_P(a_3)\} \cup \{\nu_P(a_1) + 1\}) \\ &= \min(\{3, 3\} \cup \{3\}) = 3.\end{aligned}$$

Si $Q = (0, y, 0)$, donde $y \neq 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \rho(\mathcal{F}, E, Y, Q) &= \text{mín}(\{\nu_Q(a_2), \nu_Q(a_3)\} \cup \{\nu_Q(a_1) + 1\}) \\ &= \text{mín}(\{3, 2\} \cup \{2\}) = 2. \end{aligned}$$

Como se tiene $\mu(\mathcal{F}, E, Y) = \rho(\mathcal{F}, E, Y, Q)$ y $\mu(\mathcal{F}, E, Y) < \rho(\mathcal{F}, E, Y, P)$, resulta que Y no es centro permitido en P .

3. Explosión con centro permitido

Consideremos el divisor $E : \prod_{i \in A} x_i = 0$, con $A \subset \{1, \dots, n\}$, e $Y : x_i = 0$, donde $i \in B \subset \{1, \dots, n\}$, un conjunto analítico que tiene cruzamientos normales con E .

Una **explosión con centro en Y** está formada por una terna (X', E', π) , donde

$$X' = \left\{ (x, [l]) \in X \times \mathbb{P}^{k-1} : x_i l_j = x_j l_i, i, j \in B \right\},$$

con $x = (x_1, \dots, x_n)$, $l = (l_i : i \in B)$, k es el número de elementos de B y π es la restricción a la subvariedad X' de la proyección

$$pr_1 : X \times \mathbb{P}^{k-1} \rightarrow X,$$

llamada la **aplicación de explosión**. La **transformada** de E por π es un divisor con cruzamientos normales $E' = \pi^{-1}(E \cup Y)$. Obsérvese que X' es una variedad de la misma dimensión que X y π , localmente (en las coordenadas (x'_1, \dots, x'_n) de X'), queda descrita como sigue: para $t \in B$, con t fijo, tenemos

$$\pi = \begin{cases} x_i = x'_i, & \text{para todo } i \notin B \text{ o } i = t, \\ x_i = (x'_i + \zeta_i)x'_t, & \text{para todo } i \text{ distinto de } t, \end{cases} \quad (3.1)$$

donde $\zeta_i \in \mathbb{C}$ es la constante de traslación.

Consideremos $\omega \in \Omega_{X,p}[-E]$ como en (2.2). Los términos de $\pi^*\omega$ quedan descritos como sigue.

Si $i \in B - (A \cup \{t\})$, tenemos

$$\sum_{i \in B \setminus (A \cup \{t\})} (a_i \circ \pi) d((x'_i + \zeta_i)x'_t) = \sum_{i \in B \setminus (A \cup \{t\})} (a_i \circ \pi) (x'_t dx'_i + (x'_i + \zeta_i) dx'_t).$$

Si $i \in B \cap (A - \{t\})$, se tiene

$$\sum_{i \in B \cap (A \setminus \{t\})} (a_i \circ \pi) \frac{d((x'_i + \zeta_i)x'_t)}{(x'_i + \zeta_i)x'_t} = \sum_{i \in B \cap (A \setminus \{t\})} (a_i \circ \pi) \left(\frac{dx'_i}{x'_i + \zeta_i} + \frac{dx'_t}{x'_t} \right).$$

Si $i \notin B$, tenemos

$$\sum_{i \in A \setminus B} (a_i \circ \pi) \frac{dx'_i}{x'_i} + \sum_{i \notin (A \cup B)} (a_i \circ \pi) dx'_i.$$

Por otro lado, si $i = t \in B - A$, en uso de (2.2) aparecen términos de la forma $(a_t \circ \pi) dx'_t$. De manera similar, si $i = t \in B \cap A$, mediante (2.2) se obtienen términos de la forma $(a_t \circ \pi) \frac{dx'_t}{x'_t}$.

Al agrupar lo anterior, llegamos a

$$\begin{aligned} \pi^*\omega &= \left(\sum_{i \in B \cap A} (a_i \circ \pi) + \sum_{i \in B - A} \overbrace{(x'_t(x'_i + \zeta_i))}^{x_i} (a_i \circ \pi) \right) \frac{dx'_t}{x'_t} \\ &+ \sum_{\{i \in B \cap (A - \{t\}) : \zeta_i = 0\}} (a_i \circ \pi) \left(\frac{dx'_i}{x'_i} \right) \\ &+ \sum_{\{i \in B \cap (A - \{t\}) : \zeta_i \neq 0\}} (a_i \circ \pi) \left(\frac{dx'_i}{x'_i + \zeta_i} \right) \\ &+ \sum_{i \in B - (A \cup \{t\})} (x'_t a_i \circ \pi) dx'_i + \sum_{i \notin (A \cup B)} (a_i \circ \pi) dx'_i \\ &+ \sum_{i \in (A - B)} (a_i \circ \pi) \frac{dx'_i}{x'_i}. \end{aligned}$$

Observación 3.1. Sea $\mu(\mathcal{F}, E, Y)$ la máxima potencia de x'_t que divide a $\pi^*\omega$ en $\Omega[-E']$, donde E' es el transformado de E , es decir

$$\mu(\mathcal{F}, E, Y) = \text{máx} \left\{ k : \frac{\pi^*\omega}{(x'_t)^k} \in \Omega[-E'] \right\}.$$

Con esta notación, la forma que define la transformada estricta (\mathcal{F}', E') de (\mathcal{F}, E) queda definida por la 1-forma

$$(\mathcal{F}', E') = \frac{\pi^*\omega}{(x'_t)^{\mu(\mathcal{F}, E, Y)}}.$$

El siguiente teorema se usa en la primera etapa del proceso de reducción de singularidades, etapa que no discutiremos en este trabajo y que consiste en pasar de una singularidad arbitraria a una singularidad presimple.

Teorema 3.2. [3, Theorem 2.7] *Sea Y un centro permitido para (\mathcal{F}, E) , $\pi : X' \rightarrow X$ una explosión con centro en Y con $P' \in X'$ y $P = \pi(P')$. Entonces se cumple*

$$\nu(\mathcal{F}', E', P') \leq \nu(\mathcal{F}, E, P).$$

□

4. Singularidades dicríticas y no-dicríticas

En esta sección se enunciarán resultados sobre la primera etapa de la reducción de singularidades, la cual consiste en pasar de una singularidad arbitraria a una singularidad presimple.

Sea (\mathcal{F}, E) una foliación adaptada sobre X . Decimos que una componente irreducible F de E es una **componente dicrítica** de E para (\mathcal{F}, E) si F no es una separatriz del saturado de (\mathcal{F}, E) .

Diremos que la foliación adaptada (\mathcal{F}, E) es **dicrítica** si existe una sucesión finita

$$\left\{ X(i), \mathcal{F}(i), E(i), Y(i), \pi(i+1) \right\}_{i=0}^{N-1}, \quad \text{con } N \geq 1,$$

que obedece

- a) $X(0) = X, (\mathcal{F}(0), E(0)) = (\mathcal{F}, E)$,
- b) $\pi_{(i+1)} : X(i+1) \rightarrow X(i)$ es la aplicación de explosión con centro $Y(i) \subset (\mathcal{F}(i), E(i))$, para $i = 0, \dots, N-1$,
- d) $(\mathcal{F}(i+1), E(i+1))$ es la transformada estricta de $(\mathcal{F}(i), E(i))$ por $\pi(i+1)$ y
- e) existe al menos una componente dicrítica de $E(N)$ para la foliación adaptada $(\mathcal{F}(N), E(N))$.

Caso contrario diremos que (\mathcal{F}, E) es **no dicrítica**.

Observación 4.1. Si E no tiene componente dicrítica para (\mathcal{F}, E) , entonces \mathcal{F} está generada por

$$\omega = \sum_{i \in A} a_i \frac{dx_i}{x_i} + \sum_{i \notin A} a_i dx_i, \quad a_i \in \mathcal{O}_{(\mathbb{C}^n, 0)},$$

donde se tiene $A = A^* = \{i : x_i \text{ no divide } a_i\}$. Así, el saturado resulta ser

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = \left(\prod_{j \in A} x_j \right) \omega &= \sum_{i \in A} \left(\prod_{j \in A} x_j \right) a_i \frac{dx_i}{x_i} + \sum_{i \notin A} \left(\prod_{j \in A} x_j \right) a_i dx_i \\ &= \sum_{\substack{i \in A \\ j \neq i}} a_i dx_i + \sum_{i \notin A} \left(\prod_{j \in A} x_j \right) a_i dx_i \\ &= \sum_{i \in A} b_i dx_i + \sum_{i \notin A} b_i dx_i \\ &= \sum_{i=1}^n b_i dx_i. \end{aligned}$$

Obsérvese que con ello obtenemos

$$\begin{aligned} \nu(\mathcal{F}, E, P) &= \min\{\nu_P(b_i) : i = 1, \dots, n\} \\ &= \min(\{\nu_P(a_i) + e - 1 : i \in A\} \cup \{\nu_P(a_i) + e : i \notin A\}) \\ &= \mu(\mathcal{F}, E, P) + e(E, P) - 1. \end{aligned}$$

En general escribiremos $b_i = b_\nu^i + b_{\nu+1}^i + \dots$, donde b_k^i es polinomio homogéneo de grado k . También, para simplificar la notación usaremos $B_i = b_\nu^i$.

Lema 4.2. *Si $\sum_{i=1}^n x_i B_i = 0$, entonces (\mathcal{F}, E) es dicrítico.*

Demostración. Sea π una explosión con centro en $P = (0, \dots, 0)$ y fijemos $t = 1 \in B = \{1, \dots, n\}$, para tener

$$\pi = \begin{cases} x_1 &= x'_1 \\ x_2 &= x'_1 x'_2 \\ x_3 &= x'_1 x'_3 \\ &\vdots \\ x_n &= x'_1 x'_n. \end{cases}$$

Si ponemos

$$\Omega = \sum_{i \in A} b_i dx_i + \sum_{i \notin A} b_i dx_i = \sum_{i=1}^n b_i dx_i,$$

tendremos

$$\begin{aligned} \pi^* \Omega &= \sum_{i=1}^n (b_i \circ \pi) dx_i \\ &= (b_1 \circ \pi) dx'_1 + \sum_{i=2}^n (b_i \circ \pi) (x'_i dx'_1 + x'_1 dx'_i) \\ &= \left((b_1 \circ \pi) + \sum_{i=2}^n (b_i \circ \pi) x'_i \right) dx'_1 + x'_1 \sum_{i=2}^n (b_i \circ \pi) dx'_i \\ &= \left((x'_1)^\nu [(B_1(1, x'_2, \dots, x'_n) + x'_1 b_{\nu+1}^1(1, x'_2, \dots, x'_n) + \dots) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=2}^n (B_i(1, x'_2, \dots, x'_n) + x'_1 b_{\nu+1}^i(1, x'_2, \dots, x'_n) + \dots) x'_i] \right) dx'_1 \\ &\quad + (x'_1)^{\nu+1} \sum_{i=2}^n (B_i(1, x'_2, \dots, x'_n) + x'_1 b_{\nu+1}^i(1, x'_2, \dots, x'_n) + \dots) dx'_i. \end{aligned}$$

Lo anterior nos lleva a

$$\begin{aligned} \frac{\pi^*\Omega}{(x'_1)^\nu} &= \left([(B_1(1, x'_2, \dots, x'_n) + x'_1 b_{\nu+1}^1(1, x'_2, \dots, x'_n) + \dots) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=2}^n (B_i(1, x'_2, \dots, x'_n) + x'_1 b_{\nu+1}^i(1, x'_2, \dots, x'_n) + \dots) x'_i] \right) dx'_1 \\ &\quad + x'_1 \sum_{i=2}^n (B_i(1, x'_2, \dots, x'_n) + x'_1 b_{\nu+1}^i(1, x'_2, \dots, x'_n) + \dots) dx'_i. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Por hipótesis se tiene $\sum_{i=1}^n x_i B_i = 0$, lo que conduce a

$$B_1(1, x'_2, \dots, x'_n) + \sum_{i=2}^n B_i(1, x'_2, \dots, x'_n) x'_i = 0.$$

Al reemplazar (4.1) resulta

$$\begin{aligned} \frac{\pi^*\Omega}{(x'_1)^\nu} &= \left((x'_1 b_{\nu+1}^1(1, x'_2, \dots, x'_n) + \dots) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=2}^n (x'_1 b_{\nu+1}^i(1, x'_2, \dots, x'_n) + \dots) x'_i \right) dx'_1 \\ &\quad + x'_1 \sum_{i=2}^n (B_i(1, x'_2, \dots, x'_n) + x'_1 b_{\nu+1}^i(1, x'_2, \dots, x'_n) + \dots) dx'_i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi^*\Omega}{(x'_1)^{\nu+1}} &= \left((b_{\nu+1}^1(1, x'_2, \dots, x'_n) + \dots) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=2}^n (b_{\nu+1}^i(1, x'_2, \dots, x'_n) + \dots) x'_i \right) dx'_1 \\ &\quad + \sum_{i=2}^n (B_i(1, x'_2, \dots, x'_n) + b_{\nu+1}^i(1, x'_2, \dots, x'_n) + \dots) dx'_i. \end{aligned}$$

Al hacer $x'_1 = 0$ se tiene $\pi^*\Omega \neq 0$, de donde se deduce que $x'_1 = 0$ no es invariante por \mathcal{F}' (es decir, no es separatriz de \mathcal{F}'), acá \mathcal{F}' es

el transformado estricto del saturado (\mathcal{F}, E) . Concluimos que (\mathcal{F}, E) es dicrítico. \square

Ejemplo 4.3. Consideremos $E : x_1x_3 = 0$, $Y : x_1 = x_3 = 0$ y

$$\mathcal{F} : \omega = (x_2x_3^2 + x_1^3) \frac{dx_1}{x_1} - x_3^2 dx_2 - x_1^3 \frac{dx_3}{x_3}.$$

Observamos que la foliación (\mathcal{F}, E) es dicrítica en uso del lema 1, pues el saturado es

$$\Omega = (x_2x_3^3 + x_1^3x_3)dx_1 - x_1x_3^3dx_2 - x_1^4dx_3.$$

De esto deducimos la igualdad

$$x_1(x_2x_3^3 + x_1^3x_3) + x_2(-x_1x_3^3) + x_3(-x_1^4) = 0.$$

El siguiente teorema es otro resultado estructural que se usa en la primera etapa del proceso de reducción de singularidades.

Teorema 4.4. [3, Theorem 3.3] *Sea (\mathcal{F}, E) una foliación adaptada en X no dicrítica, $Y \subset X$ una subvariedad de X , y $\pi : X' \rightarrow X$ una explosión con centro permitido en Y . Si (\mathcal{F}', E') es la transformada estricta de (\mathcal{F}, E) por π , entonces se tiene*

$$\mu(\mathcal{F}', E', P') \leq \mu(\mathcal{F}, E, P)$$

para todo $P' \in X'$, donde $P = \pi(P')$. \square

5. Singularidades presimples y simples

En esta sección se describen las formas normales de aquellas singularidades que aparecen tras de un número finito de explosiones. Estas singularidades son llamadas **singularidades simples** y generalizan las singularidades simples de dimensión dos.

Sea X una variedad compleja. Denotamos por $\Theta_{X,P}$ (respectivamente $\widehat{\Theta}_{X,P}$) el anillo de gérmenes de campos holomorfos (respectivamente

de campos formales) sobre la variedad X en torno del punto P . Dado un campo vectorial formal $D \in \widehat{\mathfrak{m}}\widehat{\Theta}_{X,P}$ y un entero $k \geq 1$, queda inducida una derivación vía

$$\begin{aligned} D^k : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{k+1} &\rightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{k+1} \\ f + \mathfrak{m}^{k+1} &\mapsto D(f) + \mathfrak{m}^{k+1}. \end{aligned}$$

Debido a la identificación $\widehat{\mathfrak{m}}/\widehat{\mathfrak{m}}^{k+1} = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{k+1}$, no hay inconveniente en sustituir \mathfrak{m} por $\widehat{\mathfrak{m}}$ en la definición de D^k . Diremos que D es **semisimple** si D^k es semisimple para todo $k \geq 1$, además será **nilpotente** si D^k es nilpotente para todo $k \geq 1$.

Sea $D \in \widehat{\mathfrak{m}}\widehat{\Theta}_{X,P}$ un campo formal que se anula en el punto P y (x_1, \dots, x_n) un sistema formal linealizable para D_S con autovalores $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Adoptaremos la siguiente notación:

$$I = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n, \quad x^I = x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$$

junto con

$$\langle \lambda, I \rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j i_j, \quad |I| = \sum_{j=1}^n i_j.$$

Proposición 5.1. *Un campo vectorial $D \in \widehat{\mathfrak{m}}\widehat{\Theta}_{X,P}$ es semisimple si y solo si existe un sistema de coordenadas formales (x_1, \dots, x_n) y números complejos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ con los cuales se tiene*

$$D = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Demostración. Si existen coordenadas formales (x_1, \dots, x_n) y escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ sujetos a

$$D = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

entonces una base de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{k+1}$ está dada por los monomios x^I , con $|I| \leq n$. En tal caso tendremos

$$D(x^I) = \langle \lambda, I \rangle x^I,$$

esto es, una base de autovectores para D .

Recíprocamente, construiremos por inducción un sistema de coordenadas formales (x_1, \dots, x_n) , sujeto a $D(x_i) = \lambda_i x_i$. Comencemos considerando una base $\{v_1^k, \dots, v_{r_k}^k\}$ de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{k+1}$, para cada k , cuyos elementos son autovectores de D^k . Esta base satisface

$$\pi_k(v_i^{k+1}) = v_i^k, \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, r_k,$$

donde π_k es el homomorfismo natural $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{k+2} \rightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{k+1}$. Estas bases pueden ser escogidas de la siguiente manera. Fijemos $\{v_1^k, \dots, v_{r_k}^k\}$ una base cuyos elementos son autovectores de D^k . Buscaremos $v_1^{k+1}, \dots, v_{r_{k+1}}^{k+1}$, autovectores de D^{k+1} . Para ello escojamos una base $\{u_1^{k+1}, \dots, u_{r_{k+1}}^{k+1}\}$ cuyos elementos son autovectores de D^{k+1} . Si reordenamos los índices podemos suponer que $\{\pi_k(u_1^{k+1}), \dots, \pi_k(u_{r_k}^{k+1})\}$ es una base de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{k+1}$ de vectores propios D^k . En la práctica tenemos una matriz cambio de base A_k para la que se tiene

$$(v_1^k, \dots, v_{r_k}^k) = (\pi_k(u_1^{k+1}), \dots, \pi_k(u_{r_k}^{k+1})) \cdot A_k.$$

Sea $v_i^{k+1} = u_i^{k+1}$ para $i > r_k$ y

$$(v_1^{k+1}, \dots, v_{r_k}^{k+1}) = (u_1^{k+1}, \dots, u_{r_k}^{k+1}) \cdot A_k.$$

Al cumplirse $x_i = \lim_k v_i^k$ en la topología de Krull para $i = 1, \dots, n$, tenemos $D^k(x_i) = \lambda_i x_i$, $i = 1, \dots, n$. □

Aprovechamos la construcción efectuada en la proposición 5.1 para destacar el siguiente corolario.

Corolario 5.2. *Sea $D \in \widehat{\mathfrak{m}}_{X,P}$ un campo semisimple y (x'_1, \dots, x'_s) coordenadas formales con $1 \leq s \leq n$ tales que*

$$D(x'_i) = \lambda'_i x'_i, \quad \lambda'_i \in \mathbb{C}, \quad i = 1, \dots, s.$$

Entonces existe un sistema de coordenadas formales (x_1, \dots, x_n) de $\widehat{\mathcal{O}}_{X,P}$ en donde se tiene

$$D = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

con $x_i = x'_i$ y $\lambda_i = \lambda'_i$ para $i = 1, \dots, s$.

Demostración. Las coordenadas x'_1, \dots, x'_s proporcionan una base parcial cuyos elementos son autovectores de los D^k . Basta entonces completar esta base y hacer tender k a infinito. \square

Proposición 5.3. *Un campo formal $D \in \widehat{\mathfrak{m}}_{X,P}$ es nilpotente si y solo si su parte lineal D^1 es nilpotente.*

Demostración. Por definición, si D es nilpotente resulta que D^1 es nilpotente.

Recíprocamente, si D^1 es nilpotente existe un entero $n \geq 1$ tal que el n -ésimo iterado $(D^1)^n$ de D^1 es nulo, es decir, cumple

$$D^n(f) \in \mathfrak{m}^2, \text{ para todo } f \in \mathfrak{m}.$$

Para mostrar que D^k es nilpotente hay que determinar $n_k \geq 1$ tal que el n_k -ésimo iterado $(D^k)^{n_k}$ es nulo, lo cual equivale a mostrar

$$D^{n_k}(f) \in \mathfrak{m}^{k+1}, \text{ para todo } f \in \mathfrak{m}.$$

En efecto, por inducción, para $k \geq 2$ asumamos que existe n_{k-1} tal que

$$D^{n_{k-1}}(g) \in \mathfrak{m}^k, \text{ para todo } g \in \mathfrak{m}. \quad (5.1)$$

Si ponemos $n_k = 3n_{k-1}$, entonces para todo $f \in \mathfrak{m}$ tendremos

$$D^{n_k}(f) = D^{2n_{k-1}}(D^{n_{k-1}}(f)) = D^{2n_{k-1}}(g),$$

donde $g = D^{n_{k-1}}(f)$. Al satisfacerse $g \in \mathfrak{m}^k \subset \mathfrak{m}^2$ podemos escribir

$$g = \sum_{i=1}^r a_i b_i, \text{ con } a_i, b_i \in \mathfrak{m},$$

obteniéndose así

$$D^{2n_{k-1}}(g) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{2n_{k-1}} \binom{2n_{k-1}}{j} D^{2n_{k-1}-j}(a_i) D^j(b_i). \quad (5.2)$$

Como se cumple $D \in \widehat{\mathfrak{m}}_{X,P}$, tenemos $D^s(f) \in \mathfrak{m}^{k+s}$ para todo $f \in \mathfrak{m}^k$ y con ello

$$D^{2n_{k-1}-j}(a_i) D^j(b_i) \in \mathfrak{m}^{k+1}.$$

Puesto que se satisface $2n_{k-1} - j \geq n_{k-1}$, es decir $j \geq n_{k-1}$, para todo $0 \leq j \leq 2n_{k-1}$, cada término de (5.2) pertenece a \mathfrak{m}^{k+1} por (5.1). Por lo expuesto D^k es nilpotente. \square

Teorema 5.4 (Martinet). *Para todo campo formal $D \in \widehat{\mathfrak{m}}_{X,P}$ existe un campo semisimple D_S y un campo nilpotente D_N tal que se tiene*

a) $D = D_S + D_N,$

b) $[D_S, D_N] = 0.$ Además, D_S y D_N son los únicos con dichas propiedades.

Demostración. La unicidad es consecuencia de la unicidad de una descomposición de Jordan, $D^k = D_S^k + D_N^k$, con $[D_S^k, D_N^k] = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Para la existencia, exhibiremos coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$ en donde $D_S = L_{\lambda,x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, así $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Comencemos considerando una base $x^1 = (x_1^1, \dots, x_n^1)$ tal que D^1 se exprese en forma canónica de Jordan cual

$$D^1 = L_{\lambda,x^1} + N^1 = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^1 \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + \left(\sum_{j=1}^n \sum_{|I| \geq 1} b_{j,I}^1 [x^1]^I \frac{\partial}{\partial x_j^1} \right).$$

Como L_{λ,x^1} y N^1 conmutan hasta orden uno, se obtiene siempre $|I| \leq 1$; así $b_{j,I}^1 \neq 0$ implica $\langle \lambda, I \rangle = \lambda_j$.

Supongamos por inducción que ya tenemos elegido un sistema de coordenadas a doble índice $x^{k,s} = (x_1^{k,s}, \dots, x_n^{k,s})$, $k \geq 1$, $s \in \{1, \dots, n\}$, que satisface las siguientes propiedades:

- $x^{k,s} - x^{k-1,n} \in \mathfrak{m}^k \times \dots \times \mathfrak{m}^k$,
- Para $|I| < k$ ó para $|I| = k$ con $j \leq s$ se tiene que $b_{j,I}^{k,s} \neq 0$ implica $\langle \lambda, I \rangle = \lambda_j$.

Luego, en estas coordenadas, el campo se expresa cual $D = L_{\lambda, x^{k,s}} + N^{k,s}$, donde

$$N^{k,s} = \sum_{j=2}^n \epsilon_j x_j^{k,s} \frac{\partial}{\partial x_j^{k,s}} + \sum_{j=1}^n \sum_{|I| \geq 1} b_{j,I}^{k,s} [x^{k,s}]^I \frac{\partial}{\partial x_j^{k,s}}.$$

Para hallar las coordenadas, consideramos dos casos $s < n$ y $s = n$. Si $s < n$, definimos el cambio de coordenadas

$$x_j^{k,s} = \begin{cases} x_j^{k,s}, & j \neq s+1. \\ x_{k,s+1}^{k,s} + Q_{s+1}^{k,s}(x^{k,s}), & j = s+1, \end{cases}$$

donde $Q_{s+1}^{k,s}$ es un polinomio homogéneo de grado k dado por

$$Q_{s+1}^{k,s}(x^{k,s}) = \sum_{|I|=k} q_I(x^{k,s})^I.$$

Expresamos D en estas coordenadas para obtener

$$D(x_j^{k,s+1}) = \sum_{|I| \geq 1} b_{j,I}^{k,s+1} (x^{k,s+1})^I. \quad (5.3)$$

Por otro lado, el cambio de coordenadas

$$D(x_j^{k,s+1}) = \begin{cases} D(x_j^{k,s}) & j \neq s+1, \\ D(x_{k,s+1}^{k,s}) + Q(x_{s+1}^{k,s}) & j = s+1, \end{cases}$$

conduce a

$$D(x_j^{k,s+1}) = \sum_{|I| < k} b_{j,I}^{k,s} (x^{k,s+1})^I + \sum_{|I| \geq k} b_{j,I}^{k,s+1} (x^{k,s+1})^I. \quad (5.4)$$

Comparamos las identidades (5.3) y (5.4) y obtenemos

$$b_{j,I}^{k,s+1} = b_{j,I}^{k,s}, \text{ para } |I| < k, \text{ y } j \in \{1, \dots, n\}.$$

Si $j \leq s$, se tiene $D(x_j^{k,s+1}) = D(x_j^{k,s})$, es decir, si

$$\begin{aligned} \lambda_j x_j^{k,s} + \epsilon_j z_{j-1}^{k,s} + \sum_{|I| \leq 2} b_{j,I}^{k,s} (x^{k,s})^I &= \lambda_j x_j^{k,s+1} + \epsilon_j z_{j-1}^{k,s+1} \\ &+ \sum_{|I| \leq k} b_{j,I}^{k,s} (x^{k,s+1})^I + \sum_{|I| > k} b_{j,I}^{k,s+1} (x^{k,s+1})^I \end{aligned}$$

se tiene $b_{j,I}^{k,s+1} = b_{j,I}^{k,s}$, cuando $|I| = k$ y $j \leq s$. Finalmente, para $j = s+1$ se obtendrá

$$\begin{aligned} D(x_{s+1}^{k,s+1}) &= D(x_{s+1}^{k,s} + Q) = D(x_{s+1}^{k,s}) + D(Q) \\ &= \lambda_{s+1} (x_{s+1}^{k,s+1} - Q) + \epsilon_{s+1} z_s^{k,s+1} + D(Q_{s+1}) \\ &+ \sum_{|I| \geq 2} b_{s+1,I}^{k,s} (x^{k,s})^I. \end{aligned}$$

Si escribimos $D(Q) = \sum_{|J| \geq 1} c_J (x^{k,s+1})^J$, la expresión anterior implica, cuando $|I| = k$, la igualdad

$$b_{s+1,I}^{k,s+1} = -\lambda_{s+1} q_I + c_I.$$

Luego tenemos

$$c_I = \langle \lambda, I \rangle q_I + \sum_{j=2}^n q_{I'_j} \epsilon_j (i_j + 1),$$

donde $I = (i_1, \dots, i_n)$ y $I'_j = I - e_j + e_{j-1}$. En otras palabras se cumple

$$b_{s+1,I}^{k,s+1} = (\langle \lambda, I \rangle - \lambda_{s+1}) q_I + \sum_{j=2}^n q_{I'_j} \epsilon_j (i_j + 1).$$

Por inducción sobre el multiíndice I , con $|I| = k$, ordenados lexicográficamente, podemos fijar los q_I de modo que se tenga $b_{s+1,J}^{k,s+1} = 0$ cuando $\langle \lambda, I \rangle - \lambda_{s+1} \neq 0$. Para $s = n$ el tratamiento es análogo y se deja como ejercicio para el lector.

Por la inducción establecida, consideramos el sistema de coordenadas límite $x = \lim_k x^{k,n}$. De aquí se obtiene $D = L_{\lambda,x} + N$, con $N =$

$\sum_{j,I} b_{j,I} x^I \frac{\partial}{\partial x_j}$ nilpotente. Por construcción de la coordenada x , la relación $\langle \lambda, I \rangle - \lambda_j \neq 0$ implica $b_{j,I} = 0$, lo cual equivale a $[L_{\lambda,x}, N] = 0$. \square

Dado un campo $D \in \widehat{\mathfrak{m}}_{X,P}$, el teorema de Martinet (ver Teorema 5.4) asegura una descomposición $D = D_S + D_N$, con D_S semisimple y D_N nilpotente, términos que además conmutan (esto es, $[D_S, D_N] = 0$). Por la proposición 5.1, existen coordenadas (x_1, \dots, x_n) en donde $D_S = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$. De este modo se tiene

$$\left[D_S, x^I \frac{\partial}{\partial x_i} \right] (f) = D_S \left(x^I \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) - x^I \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right). \quad (5.5)$$

Al reemplazar las identidades

$$D_S \left(x^I \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = x^I \langle \lambda, I \rangle \frac{\partial f}{\partial x_i} + x^I \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

y

$$x^I \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = x^I \lambda_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + x^I \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$

en (5.5), obtenemos

$$\left[D_S, x^I \frac{\partial}{\partial x_i} \right] (f) = (\langle \lambda, I \rangle - \lambda_i) x^I \frac{\partial f}{\partial x_i}. \quad (5.6)$$

De ello se desprende que los $x^I \frac{\partial}{\partial x_i}$ representan los autovectores de D_S asociados con los autovalores $\langle \lambda, I \rangle - \lambda_i$. Al escribir D_N como una serie formal

$$D_N = \sum_{j=1}^n \sum_{|I| \geq 1} a_{I,j} x^I \frac{\partial}{\partial x_j},$$

de la condición $[D_S, D_N] = 0$ y de (5.6) se recupera

$$0 = [D_S, D_N] = \sum_{j=1}^n \sum_{|I| \geq 1} a_{I,j} \left[D_S, x^I \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = \sum_{j=1}^n \sum_{|I| \geq 1} a_{I,j} (\langle \lambda, I \rangle - \lambda_j) x^I \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Así, obtenemos $a_{I,j} (\langle \lambda, I \rangle - \lambda_j) = 0$ para $j = 1, \dots, n$ y $|I| \geq 1$. De este modo la condición $(\langle \lambda, I \rangle - \lambda_j) \neq 0$ implica $a_{I,j} = 0$. En resumen, se tiene

$$D = D_S + D_N = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{|I| \geq 1 \\ \langle \lambda, I \rangle = \lambda_j}} a_{I,j} x^I \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad (5.7)$$

donde D_N tiene, por la proposición 5.3, parte lineal nilpotente.

Sea $(\mathcal{F}, E) : \omega = \sum_{i \in A} a_i \frac{dx_i}{x_i} + \sum_{i \notin A} a_i dx_i$ una foliación adaptada, con $E : \pi_{i \in A} x_i = 0$. El punto $P = (x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0) \in \text{Sing}(\mathcal{F})$ es llamado punto singular **presimple** si se cumple una de las siguientes condiciones:

- a) $\nu(\mathcal{F}, E, P) = 0$,
- b) $\nu(\mathcal{F}, E, P) = \mu(\mathcal{F}, E, P) = 1$ y existe i tal que a_i^1 (la parte lineal de a_i) no depende de las coordenadas x_i para todo $i \in A$.

Consideramos el subespacio

$$\mathcal{D}(\omega)(P) = \left\{ D(P) : D \in \Theta_{X,P} \text{ y } \omega(D) = 0 \right\}$$

de $T_P X$. La codimensión de $\mathcal{D}(\omega)(P)$ en $T_P X$ es llamada el **tipo dimensional** de (\mathcal{F}, E) , y denotada en adelante por $\tau = \tau(\mathcal{F}, P)$.

Lema 5.5. *Supongamos que P es una singularidad presimple para (\mathcal{F}, E) con $\nu_P(\mathcal{F}) = n - 1$. Entonces se tiene $n - 1 \leq e(E, P) \leq n$ y existen coordenadas formales (x_1, \dots, x_n) que cumplen lo siguiente.*

- Si $e(E, P) = n - 1$, (\mathcal{F}, E) está generada por $\omega = dx_1 + \sum_{i=2}^n a_i \frac{dx_i}{x_i}$.
- Si $e(E, P) = n$, (\mathcal{F}, E) está generada por $\omega = \frac{dx_1}{x_1} + \sum_{i=2}^n a_i \frac{dx_i}{x_i}$.

Además, existen $n - 1$ campos conmutativos tangentes a (\mathcal{F}, E) , los cuales son:

- $a_i \frac{\partial}{\partial x_1} - x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 2, \dots, n$; cuando $e(E, P) = n - 1$ y
- $x_1 a_i \frac{\partial}{\partial x_1} - x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 2, \dots, n$; cuando $e(E, P) = n$.

donde $\nu_P(a_i) \geq 1$, para todo i .

Demostración. Supongamos que $e = e(E, P)$ no valga $n - 1$ ni n . Entonces, al reordenar las variables si fuese necesario, podemos suponer

$$(\mathcal{F}, E) : \omega = a_1 \frac{dx_1}{x_1} + \dots + a_e \frac{dx_e}{x_e} + a_{e+1} dx_{e+1} + \dots + a_n dx_n,$$

donde $\text{mcd}(a_1, \dots, a_n) = 1$. De este modo, se obtiene

$$\mathcal{F} : \omega = x_2 \cdots x_e a_1 dx_1 + \dots + x_1 \cdots x_{e-1} a_e dx_e + x_1 \cdots x_e a_{e+1} dx_{e+1} + \dots + x_1 \cdots x_e a_n dx_n.$$

Por hipótesis se tiene $\nu_P(\mathcal{F}) = n - 1$, y se cumple

$$\begin{cases} e - 1 + \nu_P(a_i) \geq n - 1, & \text{para } i = 1, \dots, e \\ e + \nu_P(a_i) \geq n - 1, & \text{para } i = e + 1, \dots, n. \end{cases}$$

Dado que $e \neq n - 1, e \neq n$ y además $e \leq n$ se sigue $e \leq n - 2$, luego

$$\begin{cases} \nu_P(a_i) \geq n - e \geq 2, & i = 1, \dots, e \\ \nu_P(a_i) + 1 \geq n - e \geq 2, & i = e + 1, \dots, n. \end{cases}$$

Esto implica

$$\mu(\mathcal{F}, E, P) = \min \left\{ \nu_P(a_1), \dots, \nu_P(a_e), \nu_P(a_{e+1}) + 1, \dots, \nu_P(a_n) + 1 \right\} \geq 2,$$

lo que contradice el hecho de que P sea una singularidad presimple.

Por otro lado, si $e(E, P) = n - 1$, tendremos

$$(\mathcal{F}, E) : \omega = a_1 \frac{dx_1}{x_1} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx_{n-1}}{x_{n-1}} + a_n dx_n,$$

donde $\text{mcd}(a_1, \dots, a_n) = 1$. En consecuencia, el saturado está generado por la 1-forma

$$\mathcal{F} : \Omega = x_2 \cdots x_{n-1} a_1 dx_1 + \cdots + x_1 \cdots x_{n-2} a_{n-1} dx_{n-1} + x_1 \cdots x_{n-1} a_n dx_n.$$

De esta expresión y de la hipótesis $\nu_P(\mathcal{F}) = n - 1$, se sigue $\nu_P(a_i) \geq 1$, para $i = 1, \dots, n - 1$, y $\nu_P(a_n) \geq 0$. Como la singularidad P es presimple, tenemos las siguientes opciones.

- Si $\nu_P(\mathcal{F}, E, P) = 0$, tan solo $\nu_P(a_n) = 0$ es posible, es decir, a_n es unidad y podemos considerar $a_n = 1$. En consecuencia, los $n - 1$ campos tangentes a (\mathcal{F}, E) están dados por $x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - a_i \frac{\partial}{\partial x_n}$, con $i = 1, \dots, n - 1$.

- Si $\nu(\mathcal{F}, E, P) = 1 = \mu(\mathcal{F}, E, P)$, podemos considerar varias opciones. Si $\nu_P(a_n) = 0$, resulta que a_n es unidad y el problema se reduce al caso anterior. Si $\nu_P(a_i) = 1$, para algún $i = 1, \dots, n - 1$, digamos $i = 1$, un cambio lineal de coordenadas lleva a $\frac{\partial a_1}{\partial x_n}(0) = 1$, y así se logra

$$a_1 = x_n + \sum_{|I| \geq 2} a_I x^I + x_n a',$$

con $\nu(a') \geq 1$, donde el segundo término no contiene x_n . Sea $I_0 = (i_1^0, \dots, i_{n-1}^0) = \min \{I : a_I \neq 0\}$, el mínimo con el orden lexicográfico graduado. Si $I_0 = \infty$ se tiene $a_I = 0$, para todo I , y en consecuencia x_n divide a a_1 . Mientras que de satisfacerse $I_0 < \infty$, mediante el cambio de coordenadas $x_n = x_n - a_{I_0} x^{I_0}$, reducimos la expresión a

$$a_1 = x_n - a_{I_0} x^{I_0} + \sum_{I \geq I_0} a_I x^I + (x_n - a_{I_0} x^{I_0}) a'.$$

Nuevamente en a' agrupamos los términos que contienen a x_n y los que no contienen a x_n para expresar $a' = \sum_{I>I_1} a'_I x^I + x_n a''$; obteniéndose

$$a_1 = x_n + \sum_{I>I_0} a_I x^I + x_n a'''.$$

Al continuar con este proceso, podremos suponer que x_n divide a a_1 , es decir,

$$a_1 = x_n \tilde{a}_1, \text{ con } \nu(\tilde{a}_1) = 0.$$

De $\omega \wedge d\omega = 0$ se deriva que x_n divide a a_i para $i < n$, es decir, $a_i = x_n \tilde{a}_i$. La foliación adaptada (\mathcal{F}, E) está generada por

$$\omega = x_n \tilde{a}_1 \frac{dx_1}{x_1} + \cdots + x_n \tilde{a}_{n-1} \frac{dx_{n-1}}{x_{n-1}} + a_n dx_n.$$

Como \tilde{a}_1 es una unidad, nuevamente podemos suponer $\tilde{a}_1 = 1$. Luego (\mathcal{F}, E) está igualmente generada por la 1-forma

$$(\mathcal{F}, E) : \omega = \frac{dx_1}{x_1} + \tilde{a}_2 \frac{dx_2}{x_2} + \cdots + \tilde{a}_{n-1} \frac{dx_{n-1}}{x_{n-1}} + a_n \frac{dx_n}{x_n}.$$

Por lo tanto, (\mathcal{F}, E) tiene $n - 1$ campos tangentes dados por

$$x_1 a_i \frac{\partial}{\partial x_1} - x_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

con $i = 2, \dots, n$, donde $a_i = \tilde{a}_j$, $j = 1, \dots, n - 1$. Observemos que en este último caso formalmente se tiene $e(E, P) = n$.

Finalmente, si $e(E, P) = n$, la foliación adaptada (\mathcal{F}, E) está generada por la 1-forma

$$(\mathcal{F}, E) : \omega = a_1 \frac{dx_1}{x_1} + \cdots + a_n \frac{dx_n}{x_n},$$

donde $\text{mcd}(a_1, \dots, a_n) = 1$. Luego, el saturado \mathcal{F} está generado por la 1-forma

$$\mathcal{F} : \Omega = x_2 \cdots x_n a_1 dx_1 + \cdots + x_1 \cdots x_{n-1} a_n dx_n.$$

Como se tiene $\nu_P(\mathcal{F}) = n - 1$ para algún i , la serie a_i es una unidad. Si suponemos que esta es a_1 , pondremos, por supuesto, directamente $a_1 = 1$. Por lo tanto, podemos expresar

$$(\mathcal{F}, E) : \omega = \frac{dx_1}{x_1} + a_2 \frac{dx_2}{x_2} + \cdots + a_n \frac{dx_n}{x_n}.$$

En conclusión los campos tangentes a (\mathcal{F}, E) resultan ser

$$x_1 a_i \frac{\partial}{\partial x_1} - x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 2, \dots, n.$$

□

Teorema 5.6 (Cano-Cerveau). *Si P es una singularidad presimple para la foliación adaptada (\mathcal{F}, E) en dimensión dos con $\nu_P(\mathcal{F}) = 1$, entonces existen coordenadas formales (x_1, x_2) en $\widehat{\mathcal{O}}_{X,P}$ tales que (\mathcal{F}, E) está generada por alguna de las siguientes 1-formas:*

- A.** $\omega = \lambda_1 \frac{dx_1}{x_1} + \lambda_2 \frac{dx_2}{x_2}$, donde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^*$;
- B.** $\omega = p_1 \frac{dx_1}{x_1} + p_2 \frac{dx_2}{x_2} + \varphi(x_1^{p_1} x_2^{p_2}) \frac{dx_2}{x_2}$, donde $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}_{>0}$;
- C.** $\omega = dx_1 + (-p_1 x_1 + x_1^{p_1}) \frac{dx_2}{x_2}$, donde $p_1 \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Demostración. Por el lema 5.5, el valor $e = e(\mathcal{F}, E)$ es 1 ó 2 y la foliación adaptada (\mathcal{F}, E) está generada, dependiendo de e , por la 1-forma

$$\omega = dx_1 + a_2 \frac{dx_2}{x_2} \quad \text{ó} \quad \omega = \frac{dx_1}{x_1} + a_2 \frac{dx_2}{x_2}.$$

De este modo, existe un campo tangente a (\mathcal{F}, E) dado

$$\begin{aligned} D_2 &= a_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, & \text{en el primer caso y por} \\ D_2 &= x_1 a_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, & \text{en el segundo.} \end{aligned}$$

Evidentemente, del campo D_2 se puede recuperar la foliación adaptada. Vía el teorema 5.4 existen coordenadas, que seguimos denotando por (x_1, x_2) , en las que D_2 se descompone como suma de su parte semi-simple y nilpotente, es decir,

$$D_2 = \lambda_2 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \left(\sum_{\substack{m_1+m_2 \geq 1 \\ \lambda_2 m_1 - m_2 = \lambda_2}} a_{m_1 m_2} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \right) \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Para determinar D_2 , debemos hallar las soluciones del sistema

$$\lambda_2(m_1 - 1) = m_2, \quad \text{donde } m_1 + m_2 \geq 1. \quad (5.8)$$

Consideramos los siguientes casos.

Si $m_1 = 0$, se tiene $\lambda_2 = -m_2 \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$. Con ello el sistema (5.8) arroja como única solución el par $(m_1, m_2) = (0, -\lambda_2)$. En consecuencia el campo vectorial resulta ser

$$D_2 = \lambda_2 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + a_{(0, -\lambda_2)} x_2^{-\lambda_2} \frac{\partial}{\partial x_1};$$

así (\mathcal{F}, E) es de tipo **C** generada por

$$dx_1 - (\lambda_2 x_1 + a_{(0, -\lambda_2)} x_2^{-\lambda_2}) \frac{dx_2}{x_2}.$$

Si $m_1 = 1$, se tiene $m_2 = 0$, con λ_2 es arbitrario. Por la proposición 5.3, el par $(1, 0)$ no es solución del sistema (5.8). Luego, el campo es lineal, es decir, se tiene

$$D_2 = \lambda_2 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2},$$

y la 1-forma que genera la foliación adaptada es de tipo **A**.

Si $m_1 \geq 2$, el número λ_2 ha de ser racional positivo:

$$\lambda_2 = \frac{p_2}{q} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}.$$

Además, el campo se podrá escribir

$$D_2 = \lambda_2 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \varphi(x_1^q x_2^{p_2}) \frac{\partial}{\partial x_2},$$

con $\nu_0(\varphi) \geq 1$. Luego, la forma que genera la foliación adaptada es de tipo **B**. \square

Teorema 5.7. *Supongamos que $\mathcal{G} \subset \widehat{\mathfrak{m}}\widehat{\Theta}_{X,P}$ sea una álgebra de Lie abeliana de dimensión finita. Entonces existen dos álgebras \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 de dimensión finita en $\widehat{\mathfrak{m}}\widehat{\Theta}_{X,P}$ tales que se satisface*

- $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2$,
- si $D \in \mathcal{G}_1$ (respectivamente $D \in \mathcal{G}_2$), entonces D es semisimple (respectivamente nilpotente),
- $[\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2] = 0$.

Demostración. Tomemos la parte semisimple D_S y nilpotente D_N de cada elemento $D \in \mathcal{G}$ para obtener las álgebras

$$\mathcal{G}_1 = \{D_S : D \in \mathcal{G}\} \quad \text{y} \quad \mathcal{G}_2 = \{D_N : D \in \mathcal{G}\};$$

con esto quedan constatadas las dos primeras propiedades.

Para demostrar el tercer ítem, consideremos la adjunta del operador $D \in \widehat{\mathfrak{m}}\widehat{\Theta}_{X,P}$ dado por

$$\begin{array}{ccc} \text{ad}_D : \widehat{\mathfrak{m}}\widehat{\Theta}_{X,P} & \longrightarrow & \widehat{\mathfrak{m}}\widehat{\Theta}_{X,P} \\ & F & \longmapsto [D, F]. \end{array}$$

Este operador lineal se descompone en su parte semisimple y nilpotente de manera única:

$$\text{ad}_D = \text{ad}_D^S + \text{ad}_D^N,$$

donde $[\text{ad}_D^S, \text{ad}_D^N] = [\text{ad}_D^N, \text{ad}_D^S]$. Más aún, tenemos que se cumple

$$\text{ad}_D^S = \text{ad}_{D_S} \quad \text{y} \quad \text{ad}_D^N = \text{ad}_{D_N}.$$

Como \mathcal{G} es una álgebra conmutativa, para $D, D' \in \mathcal{G}$ tenemos

$$\text{ad}_D(D') = [D, D'] = 0,$$

lo cual significa que D' es un autovector de ad_D con autovalor nulo. Por lo expuesto, tenemos la misma situación para $\text{ad}_D^S = \text{ad}_{D_S}$. Así tendremos

$$\text{ad}_{D'}(D_S) = [D', D_S] = -[D_S, D'] = -\text{ad}_{D_S}(D') = 0,$$

es decir, D_S será un autovector de $\text{ad}_{D'}$. Luego, también es un autovector para $\text{ad}_{D'}^S = \text{ad}_{D'_S}$ y cumplirá

$$[D'_S, D_S] = \text{ad}_{D'_S}(D_S) = 0.$$

Esto prueba que \mathcal{G}_1 es una álgebra de Lie abeliana.

Por último, de las tres últimas identidades se tiene directamente

$$[D_S, D'_N] = 0 \quad \text{y} \quad [D_N, D'_N] = 0,$$

y \mathcal{G}_2 resulta una algebra de Lie abeliana. \square

El siguiente resultado es consecuencia de la proposición 5.1.

Proposición 5.8. *Sea $\mathcal{G} \subset \widehat{\mathfrak{m}}\widehat{\Theta}_{X,P}$ una álgebra de Lie abeliana de dimensión finita y (x'_1, \dots, x'_s) , con $1 \leq s \leq n$, coordenadas formales tales que $D(x'_i) = \lambda'_i(D)x'_i$, con $\lambda'_i(D) \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, s$, para todo $D \in \mathcal{G}$. Entonces existe un sistema de coordenadas formales (x_1, \dots, x_n) de $\widehat{\mathcal{O}}_{X,P}$ tal que*

$$D = \sum_{i=1}^n \lambda_i(D)x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \text{para todo } D \in \mathcal{G},$$

donde $x_i = x'_i$ y $\lambda_i(D) = \lambda'_i(D)$ para $i = 1, \dots, s$ y $D \in \mathcal{G}$.

Demostración. En cada paso de la recurrencia definida en la proposición 5.1 hay que aplicar un hecho conocido: una familia de operadores que conmutan entre sí se puede diagonalizar simultáneamente en una base donde cada una de ellas es diagonalizada. A partir de allí, la prueba sigue el rumbo de la proposición 5.1. \square

Sea $\mathcal{G} \subset \widehat{\mathcal{M}}\widehat{\Theta}_{X,P}$ un álgebra de Lie abeliana de dimensión finita. Por la proposición anterior, existen coordenadas formales (x_1, \dots, x_n) que linealizan simultáneamente los D_S para todo $D \in \mathcal{G}$.

Dada $D \in \mathcal{G}$ una derivación, denotemos por

$$\lambda(D) = (\lambda_1(D), \dots, \lambda_n(D))$$

los correspondientes autovalores. Por el teorema 5.7 tenemos

$$[D_S, D'_N] = 0, \text{ para todo } D, D' \in \mathcal{G}.$$

Esto significa que $D = D_S + D_N$ puede ser reescrito como

$$D = \sum_{j=1}^n \lambda_j(D) x_j \frac{\partial}{x_j} + \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{|I| \geq 1 \\ \langle \lambda(D), I \rangle = \lambda_j(D), \forall D \in \mathcal{G}}} a_{I,j}(D) x^I \frac{\partial}{x_j}. \quad (5.9)$$

Teorema 5.9 (Cano). *Sea P una singularidad presimple para la foliación adaptada (\mathcal{F}, E) y tal que $\nu_P(\mathcal{F}) = n - 1$, con tipo dimensional $\tau = \tau_P(\mathcal{F}, E)$. Entonces existen coordenadas formales (x_1, \dots, x_n) tales que las componentes no dicríticas E_{nd} de E están contenidas en $\cup_{i=1}^{\tau} (x_i = 0)$ y (\mathcal{F}, E) es generado por $\omega = 0$; acá ω resulta de uno de los siguientes tres tipos.*

A. *Existen $\lambda_i \in \mathbb{C}^*$, $i = 1, \dots, \tau$, tales que*

$$\omega = \sum_{i=1}^{\tau} \lambda_i \frac{dx_i}{x_i}.$$

B. *Existen $1 \leq k \leq \tau$, $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{Z}_{>0}$, $(\alpha_2, \dots, \alpha_{\tau}) \in \mathbb{C}^{\tau-1} - \{0\}$, $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{\tau} \in \mathbb{C}^*$, $\varphi \in \mathbb{C}[[t]]$, $\varphi(0) = 0$ tales que*

$$\omega = p_1 \frac{dx_1}{x_1} + \dots + p_k \frac{dx_k}{x_k} + \varphi(x_1^{p_1} \dots x_k^{p_k}) \left(\sum_{i=2}^{\tau} \alpha_i \frac{dx_i}{x_i} \right).$$

C. *Existen $2 \leq k \leq \tau$, $p_2, \dots, p_k \in \mathbb{Z}_{>0}$, $(\alpha_2, \dots, \alpha_{\tau}) \in \mathbb{C}^{\tau-1} - \{0\}$, $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{\tau} \in \mathbb{C}^*$ tales que*

$$\omega = dx_1 - x_1 \left(p_2 \frac{dx_2}{x_2} + \dots + p_k \frac{dx_k}{x_k} \right) + (x_2^{p_2} \dots x_k^{p_k}) \left(\sum_{i=2}^{\tau} \alpha_i \frac{dx_i}{x_i} \right).$$

Demostración. Trabajamos por inducción sobre n .

Para $n = 2$, se tiene necesariamente $\tau = 2$ y el resultado es el teorema 5.6.

Supongamos entonces que el resultado se cumple para $n - 1$. Si la dimensión es n , podemos suponer $\tau = n$, caso contrario tenemos un campo regular D tangente a \mathcal{F} , y al rectificar D se tendrá $\tau \leq n - 1$ con lo que por la hipótesis inductiva obtenemos el resultado deseado. Por otro lado, la multiplicidad de \mathcal{F} en el punto P es $\nu_P(\mathcal{F}) = n - 1$. Del lema 5.5 tenemos $n - 1 \leq e(E, P) \leq n$. Dependiente del valor de $e(E, P)$ se tienen las 1-formas

$$\text{I. } \omega = dx_1 + \sum_{i=2}^n a_i \frac{dx_i}{x_i},$$

$$\text{II. } \omega = \frac{dx_1}{x_1} + \sum_{i=2}^n a_i \frac{dx_i}{x_i}$$

que generan la foliación adaptada (\mathcal{F}, E) . Luego, existen $n - 1$ campos tangentes a (\mathcal{F}, E) dados por:

$$D_j = a_j \frac{\partial}{\partial x_1} - x_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 2, \dots, n \quad \text{en el caso I y}$$

$$D_j = x_1 a_i \frac{\partial}{\partial x_1} - x_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 2, \dots, n \quad \text{en el caso II.}$$

Evidentemente, estos campos permiten recuperar la foliación adaptada. Al aplicar el teorema 5.7 al álgebra conmutativa de dimensión finita definida por

$$\mathcal{G} = \mathbb{C}D_2 + \dots + \mathbb{C}D_n,$$

aparecen coordenadas formales donde cada D_i se expresa como la suma de su parte semisimple y nilpotente, con la parte semisimple lineal en estas coordenadas. Así, en estas nuevas coordenadas (que seguimos denotando por (x_1, \dots, x_n)), se tendrá

$$D_j = \lambda_j x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \left(\sum_{\substack{m_1 + \dots + m_n \geq 1 \\ \lambda_i m_i = \lambda_j \text{ para } i=2, \dots, n}} a_{m_1 \dots m_n}^j x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} \right) \frac{\partial}{\partial x_1},$$

para $j = 2, \dots, n$; obsérvese que el tercer término es nilpotente por la proposición 5.3. Para determinar estos campos debemos hallar soluciones del sistema

$$\lambda_i(m_1 - 1) = m_i, \quad i = 2, \dots, n; \text{ sujeto a } m_1 + \dots + m_n \geq 1. \quad (5.10)$$

Con m_1 en mente tenemos tres situaciones a considerar.

Si $m_1 = 1$, entonces el sistema (5.10) no tiene solución; es decir, los campos

$$D_j = \lambda_j x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 2, \dots, n,$$

son lineales. Por lo tanto, la 1-forma que genera la foliación adaptada (\mathcal{F}, E) es de tipo **A**.

Si $m_1 \geq 2$, los $\lambda_i = \frac{p_i}{q} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$, para $i = 2, \dots, n$, son racionales positivos. En este caso, los campos se escriben

$$D_j = \lambda_j x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + x_1 \varphi_i (x_1^q x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n}) \frac{\partial}{\partial x_1},$$

con $\nu_0(\varphi) \geq 1$. Por la condición de integrabilidad $\varphi_i = \alpha_i \varphi$, resulta que (\mathcal{F}, E) es de tipo **B**.

Si $m_1 = 0$, se tendrá $\lambda_i = -m_i \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$, $i = 2, \dots, n$. El sistema (5.10) tendrá así una única solución $(m_1, m_2, \dots, m_n) = (0, -\lambda_2, \dots, -\lambda_n)$. Los campos vectoriales quedan presentados cual

$$D_j = -m_i x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \left(a_{(0, -\lambda_2, \dots, -\lambda_n)}^i x_2^{-\lambda_2} \dots x_n^{-\lambda_n} \right) \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

En consecuencia (\mathcal{F}, E) es de tipo **C** y

$$dx_1 + x_1 \left(p_2 \frac{dx_2}{x_2} + \dots + p_k \frac{dx_k}{x_k} \right) + x_2^{p_2} \dots x_k^{p_k} \left(\alpha_2 \frac{dx_2}{x_2} + \dots + \alpha_n \frac{dx_n}{x_n} \right)$$

es la 1-forma que genera la foliación adaptada (\mathcal{F}, E) . \square

Sean las foliaciones generadas por las formas ω de tipo **A** y **B** como en el teorema 5.9. Un vector v definido por

$$v = \begin{cases} (\lambda_1, \dots, \lambda_\tau); & \text{en el caso } \mathbf{A}. \\ (\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_\tau); & \text{en el caso } \mathbf{B}, \end{cases}$$

es llamado **vector residual** de la forma normal ω .

Sea $v = (v_1, \dots, v_s)$ un vector de \mathbb{C}^s . Una s -upla $n = (n_1, \dots, n_s) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^s$ es una **resonancia** de v si $\langle n, v \rangle = \sum_{i=1}^s n_i v_i = 0$. El vector v es **no resonante** si la única resonancia es $n = 0$.

Una singularidad presimple P de (\mathcal{F}, E) es llamada **simple** cuando (\mathcal{F}, E) es generada por una 1-forma normal de tipo **A** o **B** y el vector residual es no resonante.

6. Singularidades presimples con hojas cerradas

En esta última sección estudiaremos las foliaciones definidas en un entorno de una singularidad presimple donde todas las hojas son cerradas. Un tipo especial de estas foliaciones son las foliaciones con integral primera meromorfa alrededor de una singularidad presimple. Para este estudio revisaremos el paso de las singularidades presimples a las simples estudiadas por F. Cano [3] y por M. Fernández [5].

6.1. Singularidades de tipo C

En este apartado estudiaremos las singularidades presimples de tipo **C** de tipo dimensional τ , con $k \in \mathbb{N}$ tal que $2 \leq k \leq \tau$, como en el teorema 5.9. Por simplicidad, solo trataremos el caso de tipo dimensional $\tau = 3$, lo que implica analizar los casos $k = 2$ y $k = 3$. Cuando la dimensión es mayor el estudio es análogo (ver [5]).

Si $k = 2$, la foliación adaptada (\mathcal{F}, E) está definida por

$$\omega = dx_1 - p_2 x_1 \frac{dx_2}{x_2} + x_2^{p_2} \left(\alpha_2 \frac{dx_2}{x_2} + \alpha_3 \frac{dx_3}{x_3} \right). \quad (6.1)$$

Las singularidades y las separatrices de la foliación \mathcal{F} son

$$\text{Sing}(\mathcal{F}) = (x_1 = x_2 = 0) \cup (x_2 = x_3 = 0) \text{ y}$$

$$\text{Sep}(\mathcal{F}) = (x_2 = 0) \cup (x_3 = 0).$$

Realicemos una explosión con centro en la recta $Y_1 : x_1 = x_2 = 0$. La variedad $(X^{(1)}, E^{(1)}, \pi^{(1)})$, donde $E^{(1)} = (\pi^{(1)})^{-1}(Y_1)$, así obtenida es cubierta por dos sistemas coordenadas, ver figura 1. Analicemos la transformada de la foliación en cada una de ellas

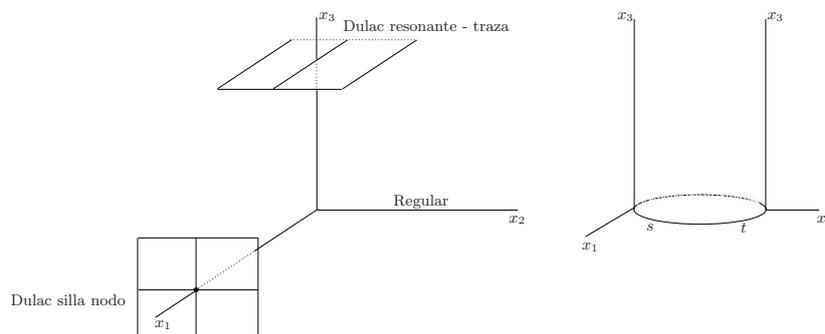


Figura 1: Cortes transversales a los ejes coordenados en torno de una singularidad de tipo \mathbf{C} y explosión con centro Y_1 .

En las coordenadas (t, x_2, x_3) de $X^{(1)}$, donde la explosión $\pi^{(1)}$ es determinada por la relación $x_1 = tx_2$, la transformada de la foliación (\mathcal{F}, E) queda implícita por la 1-forma

$$\frac{(\pi^{(1)})^*\omega}{x_2} = dt - (p_2 - 1)t \frac{dx_2}{x_2} + x_2^{p_2-1} \left(\alpha_2 \frac{dx_2}{x_2} + \alpha_3 \frac{dx_3}{x_3} \right),$$

y su tipo de singularidad coincide con en de la foliación (6.1), al cambiar $p_2 - 1$ por p_2 .

En las coordenadas (x_1, s, x_3) de $X^{(1)}$, donde $\pi^{(1)}$ es determinada por la relación $x_2 = sx_1$, la transformada de la foliación adaptada queda definida por la 1-forma

$$-\frac{(\pi^{(1)})^*\omega}{x_1} = (p_2 - 1) \frac{dx_1}{x_1} + p_2 \frac{ds}{s} + s^{p_2} x_1^{p_2-1} \left(-\alpha_2 \frac{dx_1}{x_1} - \alpha_2 \frac{ds}{s} - \alpha_3 \frac{dx_3}{x_3} \right).$$

Si suponemos $p_2 > 1$ (el caso $p_2 = 1$ será tratado a continuación), entonces esta singularidad es presimple de tipo **B** con vector de resonancia $-\alpha_3 \neq 0$. Por definición, la singularidad es no resonante y, por consiguiente, es simple.

Supongamos que hemos realizado $p - 1$ explosiones a partir de (6.1) con centro los ejes coordenados que aún no son simples. La transformada de la foliación está descrita por la 1-forma

$$\omega = dx_1 - x_1 \frac{dx_2}{x_2} + x_2 \left(\alpha_2 \frac{dx_2}{x_2} + \alpha_3 \frac{dx_3}{x_3} \right).$$

Realicemos una explosión adicional con centro la recta $Y_2 : x_1 = x_2 = 0$ y determinemos cómo es la transformada de la foliación sobre la variedad $(X^{(2)}, E^{(2)}, \pi^{(2)})$, donde $E^{(2)} = (\pi^{(2)})^{-1}(Y_2)$. En las coordenadas (t, x_2, x_3) , donde $\pi^{(2)}$ localmente está dada por la relación $x_1 = tx_2$, se tiene

$$\frac{(\pi^{(2)})^*\omega}{x_2} = dt + \alpha_2 \frac{dx_2}{x_2} + \alpha_3 \frac{dx_3}{x_3},$$

de tipo dimensional 2; esto equivale a que $\alpha_2 \frac{dx_2}{x_2} + \alpha_3 \frac{dx_3}{x_3}$ sea simple en $(\mathbb{C}^2, 0)$.

En las coordenadas (x_1, s, x_3) , donde $\pi^{(2)}$ localmente está dada por la relación $x_2 = sx_1$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{(\pi^{(2)})^*\omega}{x_1} &= \alpha_2 s \frac{dx_1}{x_1} + (-1 + \alpha_2 s) \frac{ds}{s} + \alpha_3 s \frac{dx_3}{x_3} \\ &= (-1 + \alpha_2 s) \frac{ds}{s} + s \left(\alpha_2 \frac{dx_1}{x_1} + \alpha_3 \frac{dx_3}{x_3} \right) \\ &= \frac{ds}{s} + s(-1 + \alpha_2 s)^{-1} \left(\alpha_2 \frac{dx_1}{x_1} + \alpha_3 \frac{dx_3}{x_3} \right) \\ &= \frac{ds}{s} + \varphi(s) \left(\alpha_2 \frac{dx_1}{x_1} + \alpha_3 \frac{dx_3}{x_3} \right), \quad \text{con } \varphi(0) = 0. \end{aligned}$$

Ahora debemos eliminar la resonancia $\frac{-n}{m} = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \in \mathbb{Q}_-$, con n, m enteros positivos. Para ello se toma $\alpha_3 = -n$ y $\alpha_2 = m$ con $m > n$. De todo esto

logramos

$$\omega_1 = \frac{ds}{s} + \varphi(s) \left(m \frac{dx_1}{x_1} - n \frac{dx_3}{x_3} \right). \tag{6.2}$$

En adelante realizaremos explosiones con centro en líneas proyectivas (curvas compactas). Comenzamos con la línea proyectiva Y_3 , dada localmente por las ecuaciones $x_1 = x_3 = 0$. La variedad $(X^{(3)}, E^{(3)}, \pi^{(3)})$, donde $E^3 = (\pi^{(3)})^{-1}(Y_3)$, obtenida por esta explosión es cubierta nuevamente por dos sistemas de coordenadas, ver figura 2. En las coordenadas (x_1, x_2, u) , donde $\pi^{(3)}$ está dada por la relación $x_3 = ux_1$, se tiene

$$(\pi^{(3)})^* \omega_1 = \frac{ds}{s} + \varphi(s) \left((m - n) \frac{dx_1}{x_1} - n \frac{du}{u} \right),$$

la cual resulta resonante. Y en las coordenadas (v, x_2, x_3) , donde $\pi^{(3)}$ está dada por la relación $x_1 = vx_3$, se tiene

$$(\pi^{(3)})^* \omega_1 = \frac{ds}{s} + \varphi(s) \left((m - n) \frac{dx_3}{x_3} + m \frac{dv}{v} \right),$$

la cual resulta no resonante.

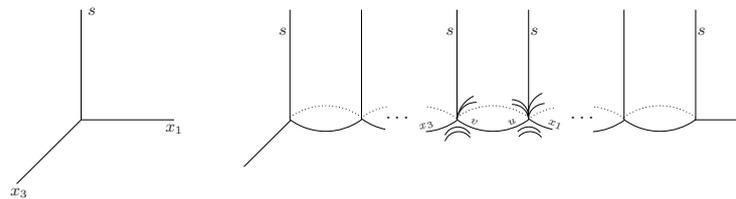


Figura 2: *Proceso de reducción de singularidades de (6.2).*

Continuando con este proceso, determinado por el algoritmo de la división de m y n , la foliación dada por (6.2) es transformada en la foliación definida por la 1-forma

$$\omega_2 = \frac{ds}{s} + \varphi(s) \left(\frac{dx_1}{x_1} - \frac{dx_3}{x_3} \right). \tag{6.3}$$

Realicemos una explosión más con centro en la línea proyectiva Y_4 , que en estas coordenadas está dada, localmente, por las ecuaciones $x_1 = x_3 = 0$, como en los casos anteriores. La variedad obtenida $(X^{(4)}, E^{(4)}, \pi^{(4)})$ necesita dos sistemas de coordenadas para ser descrita.

En las coordenadas (x_1, s, u) , en donde $\pi^{(4)}$ es dada por la relación $x_3 = ux_1$, se tiene

$$(\pi^{(4)})^* \omega_2 = \frac{ds}{s} - \varphi(s) \frac{du}{u}.$$

Esta foliación es dicrítica de tipo dimensional 2 con una silla nodo sobre el divisor de ecuación $x_1 = 0$.

En las coordenadas (v, s, x_3) , donde $\pi^{(4)}$ es definida por la relación $x_1 = vx_3$, se tiene

$$(\pi^{(4)})^* \omega_2 = \frac{ds}{s} + \varphi(s) \frac{dv}{v}.$$

Nuevamente, la foliación es dicrítica de tipo dimensional 2, que es una silla nodo sobre el divisor de ecuación $x_3 = 0$.

En resumen, el tipo de singularidad (6.1) no tiene todas sus hojas cerradas puesto que tiene una silla nodo (ver [1]).

Si $k = 3$, la foliación (\mathcal{F}, E) está definida por

$$\omega = dx_1 - x_1 \left(p_2 \frac{dx_2}{x_2} + p_3 \frac{dx_3}{x_3} \right) + x_2^{p_2} x_3^{p_3} \sum_{i=2}^3 \alpha_i \frac{dx_i}{x_i}. \quad (6.4)$$

La singularidad de \mathcal{F} está formada por tres rectas

$$\text{Sing}(\mathcal{F}) = (x_2 = x_3 = 0) \cup (x_1 = x_3 = 0) \cup (x_1 = x_2 = 0).$$

Las rectas $(x_1 = x_3 = 0)$ y $(x_1 = x_2 = 0)$ son singularidades de tipo traza (ver [4]), donde se tiene

$$\text{Sep}(\mathcal{F}) = (x_2 = 0) \cup (x_3 = 0).$$

Realizamos una explosión con centro en $Y_1 : x_1 = x_2 = 0$ y analizamos la transformada de la foliación sobre la variedad inducida por esta explosión $(X^{(1)}, E^{(1)}, \pi^{(1)})$, donde $E^{(1)} = (\pi^{(1)})^{-1}(Y_1)$. Esta variedad queda

descrita por dos sistemas de coordenadas. En las coordenadas (x_3, x_2, t) , donde $\pi^{(1)}$ es determinada por la relación $x_1 = tx_2$, se tiene

$$\frac{(\pi^{(1)})^*\omega}{x_2} = dt - t \left((p_2 - 1) \frac{dx_2}{x_2} + p_3 \frac{dx_3}{x_3} \right) + x_2^{p_2-1} x_3^{p_3} \left(\alpha_2 \frac{dx_2}{x_2} + \alpha_3 \frac{dx_3}{x_3} \right),$$

foliación que resulta del mismo tipo que la dada por (6.4) al cambiar p_2 por $p_2 - 1$. En las coordenadas (s, x_1, x_3) , donde $\pi^{(1)}$ es determinada por la relación $x_2 = sx_1$, se obtiene la 1-forma

$$-\frac{(\pi^{(1)})^*\omega}{x_1} = (p_2 - 1) \frac{dx_1}{x_1} - p_2 \frac{dx_2}{x_2} + p_3 \frac{dx_3}{x_3} + s^{p_2} x_1^{p_2-1} x_3^{p_3} \left(-\alpha_2 \frac{ds}{s} - \alpha_2 \frac{dx_1}{x_1} - \alpha_3 \frac{dx_3}{x_3} \right),$$

la cual define una foliación con una singularidad presimple de tipo **B**. Si $p_2 > 1$ no hay vector residual y por lo tanto la singularidad será simple. Si $p_2 = 1$, entonces el vector residual es $-\alpha_2 \neq 0$ y al no tener resonancia, la singularidad es también simple.

Ahora realizamos una explosión con centro $Y_2 : x_1 = x_3 = 0$ (ver figura 3) y analizamos la transformada de la foliación sobre la variedad $(X^{(2)}, E^{(2)}, \pi^{(2)})$ inducida por esta explosión. En las coordenadas (s, x_2, x_3) , donde $\pi^{(2)}$ es determinada por $x_1 = sx_3$, de (6.4) se obtiene

$$\frac{(\pi^{(2)})^*\omega}{x_3} = ds - s \left((p_3 - 1) \frac{dx_3}{x_3} + p_2 \frac{dx_2}{x_2} \right) + x_2^{p_2} x_3^{p_3-1} \left(\alpha_2 \frac{dx_2}{x_2} + \alpha_3 \frac{dx_3}{x_3} \right),$$

foliación en la que se ha cambiado p_3 por $p_3 - 1$. En las coordenadas (s, x_2, x_3) , donde $\pi^{(2)}$ está definida por la relación $x_1 = tx_2$, se tiene gracias a (6.4) la siguiente expresión

$$-\frac{(\pi^{(2)})^*\omega}{x_1} = (p_3 - 1) \frac{dx_1}{x_1} - p_2 \frac{dx_2}{x_2} + p_3 \frac{dt}{t} + x_1^{p_3-1} x_2^{p_3} t^{p_3} \left(-\alpha_3 \frac{dx_1}{x_1} - \alpha_2 \frac{dx_2}{x_2} - \alpha_3 \frac{dt}{t} \right).$$

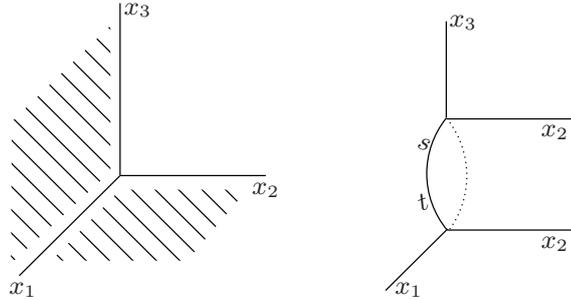


Figura 3: Explosión con centro Y_2 .

Esta singularidad es de tipo **B**. Si $p_1 > 1$ no hay vector residual y por consiguiente es una singularidad simple. Cuando $p_1 = 1$, el vector residual es $-\alpha_2 \neq 0$, no resonante, y en consecuencia también simple.

Supongamos que hemos realizado $p_3 - 1$ explosiones con centro el eje x_3 y $p_2 - 1$ explosiones con centro el eje x_2 a la foliación inducida por la 1-forma (6.4). La foliación transformada por estas explosiones queda definida por la 1-forma

$$\omega = dx_1 - x_1 \left(\frac{dx_2}{x_2} + \frac{dx_3}{x_3} \right) + x_2 x_3 \left(\alpha_2 \frac{dx_2}{x_2} + \alpha_3 \frac{dx_3}{x_3} \right).$$

Si realizamos una explosión adicional con centro el eje x_3 , esta explosión genera una variedad $(X^{(3)}, E^{(3)}, \pi^{(3)})$, donde $X^{(3)}$ es cubierta por dos sistemas coordenadas. Analicemos la foliación transformada en cada una de ellas.

En las coordenadas (t, x_2, x_3) , donde $\pi^{(3)}$ está dada por la relación $x_1 = tx_2$, obtenemos

$$\omega_1 = dt - t \frac{dx_3}{x_3} + x_3 \left(\alpha_2 \frac{dx_2}{x_2} + \alpha_3 \frac{dx_3}{x_3} \right).$$

Observe que ω_1 es equivalente a (6.1). Luego se sigue como en el caso

$k = 2$. Es decir, se realiza una explosión adicional con centro el eje x_3 y a continuación se elimina la resonancia que aparece en una componente dicrítica de la foliación inducida.

En las coordenadas (x_1, s, x_3) , donde $\pi^{(3)}$ está definida por la relación $x_2 = sx_1$, se tiene

$$\begin{aligned} (\pi^{(3)})^*\omega &= dx_1 - x_1 \left(\frac{dx_1}{x_1} + \frac{ds}{s} + \frac{dx_3}{x_3} \right) + \\ &+ x_1sx_3 \left(\alpha_2 \left(\frac{dx_1}{x_1} + \frac{ds}{s} \right) + \alpha_3 \frac{dx_3}{x_3} \right) \\ &= -x_1 \left(\frac{ds}{s} + \frac{dx_3}{x_3} \right) + x_1sx_3\alpha_2 \left(\frac{dx_1}{x_1} + \frac{ds}{s} \right) \\ &= \frac{ds}{s} + \frac{dx_3}{x_3} + \alpha_2sx_3 \left(\frac{dx_1}{x_1} + \frac{ds}{s} \right). \end{aligned}$$

Así, el vector residual es 1 y es, por lo tanto no resonante. Por consiguiente la singularidad es simple. Así, la foliación definida por (6.4) no puede tener todas sus hojas cerradas dado que admite una silla nodo.

Concluimos del análisis que las singularidades de tipo **C** no tienen todas sus hojas cerradas (ver [1]).

6.2. Singularidades de tipo B

En este apartado analizaremos las singularidades de tipo **B** que tienen todas sus hojas cerradas. En este caso, la foliación está definida por la 1-forma

$$\omega = \sum_{i=1}^k p_i \frac{dx_i}{x_i} + \psi(x_1^{p_1} \cdots x_k^{p_k}) \left(\sum_{j=2}^{\tau} \alpha_j \frac{dx_j}{x_j} \right),$$

donde $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{Z}_{>0}$, $(\alpha_2, \dots, \alpha_\tau) \in \mathbb{C}^{\tau-1} - \{0\}$, $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_\tau \in \mathbb{C}^*$, $\varphi \in \mathbb{C}[[t]]$, $\varphi(0) = 0$. Estas foliaciones tienen singularidades y separatrices

dadas por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \text{Sing}(\mathcal{F}) &= \bigcup_{i=1}^{\tau} (x_1 = \dots = x_{i-1} = x_{i+1} = \dots = x_{\tau} = 0), \\ \text{Sep}(\mathcal{F}) &= \bigcup_{i=1}^{\tau} (x_i = 0). \end{aligned}$$

Para $k = \tau = 3$, tenemos

$$\omega = p_1 \frac{dx_1}{x_1} + p_2 \frac{dx_2}{x_2} + p_3 \frac{dx_3}{x_3} + \psi(x_1^{p_1} x_2^{p_2} x_3^{p_3}) \left(\alpha_2 \frac{dx_2}{x_2} + \alpha_3 \frac{dx_3}{x_3} \right).$$

Como se tiene $p_1, p_2, p_3 > 0$, la singularidad no admite vector residual, y es simple.

Para $k = 2, \tau = 3$ tenemos

$$\omega = p_1 \frac{dx_1}{x_1} + p_2 \frac{dx_2}{x_2} + \psi(x_1^{p_1} x_2^{p_2}) \left(\alpha_2 \frac{dx_2}{x_2} + \alpha_3 \frac{dx_3}{x_3} \right).$$

Como se tiene $p_1, p_2 > 0$, el vector residual es $\alpha_3 \neq 0$ y no hay resonancia: es simple. Observemos que en este caso los ejes x_1 y x_2 son sillanodos de tipo dimensional dos.

Para $k = 1, \tau = 3$ se tiene

$$\omega = p_1 \frac{dx_1}{x_1} + \psi(x_1^{p_1}) \left(\alpha_2 \frac{dx_2}{x_2} + \alpha_3 \frac{dx_3}{x_3} \right).$$

Como $p_1 > 0$, el vector residual es (α_2, α_3) y la resonancia surge cuando se tiene

$$-\frac{n}{m} = \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \in \mathbb{Q}^-, \quad n, m > 0.$$

De este modo, hay que continuar el algoritmo de la división aplicado a n y m . Al explotar únicamente el eje x_1 ($x_2 = x_3 = 0$), en el penúltimo paso logramos

$$p_1 \frac{dx'_1}{x'_1} + \psi(x_1^{p_1}) \left(\frac{dx'_2}{x'_2} - \frac{dx'_3}{x'_3} \right).$$

Una explosión más con centro el eje x_1 lleva a una variedad (X', E', π) , con E' un divisor dicrítico. En las coordenadas (x'_2, t, x'_3) , la aplicación

π' está dada por $x_2 = tx_3$. La foliación transformada está definida por la 1-forma

$$p_1 \frac{dx'_1}{x'_1} + \psi(x_1^{p_1}) \frac{dt}{t},$$

esto es, una silla-nodo.

En las coordenadas (x'_2, s, x'_3) , la aplicación π queda determinada por la relación $x_3 = sx_2$. La foliación transformada está definida por la 1-forma

$$p_1 \frac{dx'_1}{x'_1} + \psi(x_1^{p_1}) \frac{ds}{s},$$

que también representa una silla-nodo.

En resumen, las singularidades de tipo **B** con $\tau = k$, son foliaciones que pueden tener sus hojas cerradas; en los demás casos siempre tenemos sillanodos y por lo tanto, no será posible que todas sus hojas sean cerradas (ver [1]).

6.3. Singularidades de tipo A

En este caso, la foliación está dada por la 1-forma

$$\omega = \sum_{i=1}^{\tau} \lambda_i dx_i = \lambda_1 \frac{dx_1}{x_1} + \lambda_2 \frac{dx_2}{x_2} + \lambda \frac{dx_3}{x_3}, \quad \lambda_i^* \in \mathbb{C}.$$

Solo analizaremos el caso $\tau = 3$ y supondremos además que es resonante. Consideremos los \mathbb{Q} -espacios vectoriales V_0 y W_0 definidos por

$$V_0 = \{r \in \mathbb{Q}^3 : r_1 \lambda_1 + r_2 \lambda_2 + r_3 \lambda_3 = 0\},$$

$$W_0 = \left\{ t \in \mathbb{Q}^3 : \sum_{j=1}^3 r_j t_j = 0, \text{ para todo } r \in V_0 \right\}.$$

Observemos que la condición $\dim V_0 = 0$ equivale a que el vector residual $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ sea no resonante. Así, tenemos

$$\dim V_0 + \dim W_0 = 3 \quad \text{y} \quad 1 \leq \dim V_0 \leq 2.$$

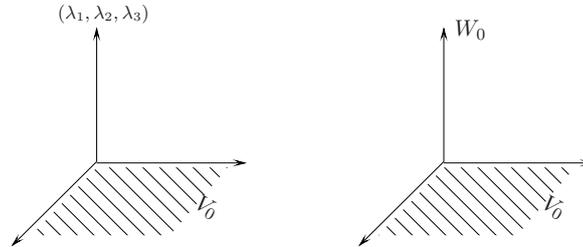


Figura 4: \mathbb{Q} -espacios vectoriales V_0, W_0 , a partir de $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Analicemos los dos posibles casos: $\dim V_0 = 1$ y $\dim V_0 = 2$.

Cuando $\dim V_0 = 1$, consideremos $r^0 = (r_1, r_2, r_3)$ una resonancia de $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, con $\text{mcd}(r_1, r_2, r_3) = 1$. Veamos el comportamiento al realizar una explosión con centro $Y_0 = T_{ij} = (x_i = 0) \cap (x_j = 0)$. Al fijar dos índices i, j con $r_i, r_j > 0$, sin pérdida de generalidad consideremos $i = 1, j = 2$ y $r_1 > r_2$. La explosión π con centro Y_0 , genera la variedad (X', E', π) , donde $E' = \pi^{-1}(Y_0)$. Esta variedad está descrita por dos sistemas de coordenadas (ver figura 5).

En las coordenadas (t, x_2, x_3) , donde π está dada por la relación $x_1 = tx_2$, la transformada de la foliación queda definida por la 1-forma

$$\begin{aligned} (\pi)^*\omega &= \lambda_1 \left(\frac{dt}{t} + \frac{dx_2}{x_2} \right) + \lambda_2 \frac{dx_2}{x_2} + \lambda_3 \frac{dx_3}{x_3} \\ &= \lambda_1 \frac{dt}{t} + (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{dx_2}{x_2} + \lambda_3 \frac{dx_3}{x_3}. \end{aligned}$$

Una resonancia (s_1, s_2, s_3) del vector residual $(\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3)$ es tal que $s_1\lambda_1 + s_2(\lambda_1 + \lambda_2) + s_3\lambda_3 = 0$, que es lo mismo que escribir $(s_1 + s_2)\lambda_1 + s_2\lambda_2 + s_3\lambda_3 = 0$. Así, podemos suponer $\text{mcd}(s_1, s_2, s_3) = 1$. Como $\dim V_0 = 1$, se tiene $nr_1 = s_1 + s_2, nr_2 = s_2$ y $nr_3 = s_3$ para algún $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$. Dado que ambas resonancias tienen máximo común

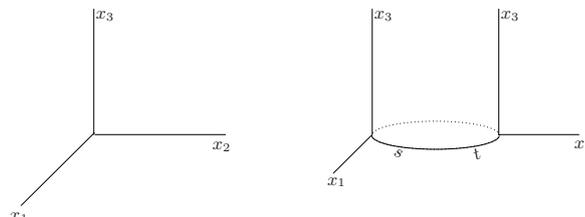


Figura 5: Explosión con centro $Y_0 = T_{ij}$.

divisor igual a 1, se tiene

$$s_1 = r_1 - r_2, s_2 = r_2, s_3 = r_3.$$

Por otro lado, al tenerse $r_1 > r_2$, hay sitio para resonancias siempre y cuando queden sujetas a

$$s_1 + s_2 + s_3 < r_1 + r_2 + r_3.$$

En las coordenadas (x_1, s, x_2) , donde π está definida por la relación $x_2 = x_1 s$, la transformada de la foliación está determinada por la 1-forma

$$\begin{aligned} (\pi')^* \omega &= \lambda_1 \frac{dx_1}{x_1} + \lambda_2 \left(\frac{ds}{s} + \frac{dx_1}{x_1} + \lambda_3 \frac{dx_3}{x_3} \right) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{dx_1}{x_1} + \lambda_2 \frac{ds}{s} + \lambda_3 \frac{dx_3}{x_3}. \end{aligned}$$

Sea (s_1, s_2, s_3) una resonancia de $(\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2, \lambda_3)$, esto es, valores que cumplen $s_1(\lambda_1 + \lambda_2) + s_2\lambda_2 + s_3\lambda_3 = 0$, lo que equivale a escribir $s_1\lambda_1 + (s_2 + s_1)\lambda_2 + s_3\lambda_3 = 0$. Como $\dim V_0 = 1$, de $s_1 = nr_1$, $s_1 + s_2 = nr_2$ y $s_3 = nr_3$ se pasa a

$$s_2 = n(r_2 - r_1).$$

Ahora, como se cumple $s_2 \geq 0$ y $r_2 - r_1 < 0$, necesariamente se tiene $n = 0$. Luego $(\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2, \lambda_3)$ es no resonante y por lo tanto, la singularidad es simple.

Supongamos ahora $\dim(V_0) = 2$. Entonces existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tal que

$$\alpha(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (p, -q, -n),$$

donde $p, q \in \mathbb{Z}^+$. En efecto, sea $\{(r_1, r_2, r_3), (s_1, s_2, s_3)\}$ una base de V_0 . Una menor de la matriz, formada por los vectores de la base de V_0 , es diferente de cero. Supongamos que esta menor es $r_1s_3 - s_1r_3 \neq 0$. Así, al multiplicar por s_1 y por r_1 obtenemos $r_1\lambda_1 + r_2\lambda_2 + r_3\lambda_3 = 0$ y $s_1\lambda_1 + s_2\lambda_2 + s_3\lambda_3 = 0$, respectivamente. En consecuencia, arribamos a

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_2} = \left(\frac{s_1r_1 - r_1s_2}{s_1r_3 - r_1s_3} \right) = \frac{p_3}{p_2} \in \mathbb{Q}',$$

con $p_2, p_3 \in \mathbb{Z}$. Luego, al multiplicar por $\frac{p_2}{\lambda_2}$ la ecuación $r_1\lambda_1 + r_2\lambda_2 + r_3\lambda_3 = 0$, obtenemos

$$r_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} p_2 + r_2 p_2 + r_3 p_3 = 0; \quad (6.5)$$

Así, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{p'_1}{p'_2} \in \mathbb{Q}$ y al multiplicar (6.5) por p'_2 llegamos a $r_1 p_1 + r_2 p_2 + r_3 p_3 = 0$. Por lo tanto $\alpha = \frac{p_2 p'_2}{\lambda_2} \in \mathbb{C}^*$ satisface $\alpha(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{Z}^3$.

Ahora, por la existencia de una resonancia, las tres componentes no pueden ser positivas (o negativas) simultáneamente. Podemos asumir que al multiplicar por el signo adecuado dos son positivas y una negativa, digamos $p_3 = p \in \mathbb{Z}^+, p_2 = -q$ y $p_1 = -n$ con $q, n \in \mathbb{Z}^+$. En esta situación, realizamos una explosión con centro $x_1 = x_2 = 0$ o $x_1 = x_3 = 0$. El vector residual es $(p - q, -q, -n)$ o $(p, q - p, -n)$, respectivamente. En ambos casos la suma de las componentes del vector residual es menor que la suma de las componentes del vector $(p, -q, -n)$. Este proceso no se puede repetir indefinidamente.

Resumimos lo trabajado en esta sección en dos teoremas.

Teorema 6.1 (Cano, Fernández). *Las singularidades presimples tras un número finito de explosiones con centro permitidos en curvas regulares se transforman en singularidades simples.*

Teorema 6.2. *Las singularidades presimples de tipo C y las tipo B con $\tau \neq k$ no tienen todas sus hojas cerradas.*

Referencias

- [1] CAMACHO, C. (1979). *Local Structure of Conformal Mappings and Holomorphic Vector Fields in C^2* . Asterisque, 59-60, Société Mathématique de France, 83-94.
- [2] CANO, F. (1993). *Reduction of the singularities of non-dicritical singular foliations. Dimension three*. American Journal Mathematics, 115, (3), 509-588.
- [3] CANO, F. (2004). *Reduction of the singularities of codimension one singular foliations in dimension three*. Ann. Math., 160, 907-1011.
- [4] CANO, F. and CERVEAU, D. (1992). *Desingularization of non-dicritical holomorphic foliations and existence of separatrices*. Acta Math., 169 (1992), 1-103.
- [5] FERNÁNDEZ, M. (2015). *Elimination of resonances in codimension one foliations*. Publ. Mat. 59, 75-97.
- [6] FERNÁNDEZ, P. (2005). *Singularidades simples no-dicríticas*. Pro-Mathematica, Volumen XIX (2005), 74-90.
- [7] MARTINET, J. (1980). *Normalisation des champs de vecteurs holomorphes*. Seminaire N. Bourbaki, 1980-1981, 55-70.
- [8] POINCARÉ, H. (1879). *Prémier Thèse-Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles*. Thèses présentées à la Faculté des Sciences de Paris Pour obtenir le Grade de Docteur ès Sciences Mathématiques. Gauthier-Villars.

- [9] SEIDENBERG, A. (1968). *Reduction of Singularities of the Differential Equation $Ady = Bdx$* . Amer. J. of Math., 248-269.

Abstract

In dimension 2 as in 3, singularity reduction of holomorphic foliations of codimension 1 have two phases: first, from the given singularity to the presimple singularity; second, from the presimple singularities to the simple ones. In this article we establish the normal forms of presimple singularities according to the papers [2], [4] and [3]. Also, we characterize presimple singularities with closed leaves.

Keywords: Foliations, singularities, singularity reduction

Percy Fernández, Hernán Neciosup, Nancy Saravia
Sección Matemáticas
Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú
Av. Universitaria 1801, San Miguel
Perú

pfernan@pucp.edu.pe
hneciosup@pucp.edu.pe
nsaraviam@pucp.edu.pe