

# Estabilidad estructural de campos suaves por partes en superficies

*Rode Checya*<sup>1</sup>

Abril, 2019

## *Resumen*

En este trabajo, consideramos campos de vectores suaves por partes definidos en una superficie compacta. El problema que estudiamos es la caracterización de la estabilidad estructural de campos de vectores suaves por partes. Después de M. Peixoto, J. Palis y A. F. Filippov, vemos que las condiciones necesarias y suficientes son: hiperbolicidad de puntos singulares, genericidad de tangencias, no conexión de sillars singulares y sólo órbitas recurrentes triviales. Estas condiciones fueron adaptadas por Brouke, Pugh y Simic para campos de vectores suaves por partes. Mostramos que para campos de vectores suaves por partes la estabilidad estructural es una propiedad genérica local desde un punto de vista diferente, y de ahí que caracterizamos al conjunto de los campos suaves por partes que son estructuralmente estables.

MSC(2010): Primary 34D30; Secondary 37C20.

**Palabras clave:** Estabilidad estructural, singularidades, genericidad.

<sup>1</sup> *Universidad Nacional San Agustín*

## 1 Introducción

Los sistemas dinámicos que describen procesos físicos donde el campo es suave por partes poseen por lo general un comportamiento discontinuo. Los dispositivos electrónicos con diodos, transistores o interruptores, los dispositivos mecánicos con engranaje, así como fenómenos físicos que involucran fricción, deslizamiento o colisión son buenos ejemplos de lo anterior. Encontramos en los sistemas —en principio evolutivos— que pueden ser interrumpidos por eventos instantáneos una fuente inagotable de tales fenómenos.

El concepto de estabilidad estructural se inició con los trabajos de Andronov y Pontrjagin [1]. Ambos pretendían caracterizar los campos de vectores en términos de órbitas periódicas, singularidades, puntos hiperbólicos u otros elementos simples frecuentes. Smale generalizó la idea al definir un comportamiento estable como aquel que no desaparece bajo pequeños cambios en el sistema. Introdujo la noción de “estabilidad estructural”, entendida ahora como la característica de un flujo por la cual su topología se preserva bajo modificaciones controladas de las ecuaciones que lo describen, digamos, a pesar de perturbaciones suficientemente pequeñas en los coeficientes.

Peixoto refina el concepto y prueba la densidad de los sistemas estructuralmente estables definidos en regiones compactas del plano y en superficies orientables compactas. Para ello construye explícitamente un espacio de Banach en donde formula cuestiones de apertura y densidad asociados a sistemas dinámicos. También impone condiciones, además de las de Andronov-Pontrjagin, para garantizar estabilidad estructural. Entre ellas cabe destacar la no existencia de soluciones recurrentes no triviales; es decir, el sistema presenta apenas puntos singulares y órbitas periódicas [10].

Para campos planares suaves por partes, el problema de estabilidad fue atendido por Kozlova [6] y Filippov [4]. Para el caso de superficies compactas, la referencia básica es el trabajo de Broucke, Pugh y Simic (ver [3]). En el presente artículo analizamos, verificamos y reformulamos

tales resultados. Abordamos específicamente el problema de estabilidad estructural del espacio de sistemas discontinuos definidos sobre superficies.

En la sección 2 exhibimos una colección de resultados básicos relacionados con la topología  $C^r$ , con la equivalencia topológica y con la estabilidad estructural.

En la sección 3, de acuerdo con la convención de Filippov, definimos los conceptos de órbita solución regular y de desliz. Se establece las condiciones necesarias para la estabilidad estructural local.

En la sección 4 estudiamos los equilibrios singulares hiperbólicos.

Finalmente, en la sección 5, a partir del análisis del comportamiento local trabajado en las secciones previas, se establece la caracterización de los campos suaves por partes estructuralmente estables.

## 2 Campos de vectores suaves por partes

Un sistema dinámico descrito por un **campo de vectores suave por partes** es un conjunto finito de ecuaciones diferenciales ordinarias, denotado por  $\dot{x} = X_i(x)$ , donde  $x \in S_i \subset \mathbb{R}^n$ , tal que los  $S_i$  son regiones abiertas no yuxtapuestas separadas entre sí por subvariedades de codimensión 1; es decir  $\Sigma_{ij} = \overline{S_i} \cap \overline{S_j}$  es una hipersuperficie de dimensión  $n - 1$ . Asumimos a  $X_i : \overline{S_i} \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $C^1$ . Las discontinuidades del campo se encuentran en las fronteras  $\Sigma_{ij}$ . La unión de las fronteras y los  $S_i$  ocupan todo el espacio.

De aquí hasta el final  $M$  denota una superficie orientable compacta, suave y sin frontera; además,  $K$  denota un complejo simplicial finito 1-dimensional contenido en  $M$ ; es decir,  $K$  es un conjunto de segmentos unidos por sus extremos e incrustado de manera lisa en  $M$ . En adelante, nos referimos a  $K$  como la **región de discontinuidad del campo**. Por motivos técnicos asumimos que cada lado pertenece a la clausura de exactamente dos componentes de  $M - K$  referidas como **adyacentes**.

También asumimos que el ángulo entre dos lados incidentes en un mismo vértice es no nulo.

Un **campo de clase  $C^r$  por partes** ( $1 \leq r \leq \infty$ ) en  $M$  es una familia  $\{X_i\}$  con  $X_i$  de clase  $C^r$  y definido sobre la clausura  $\overline{G_i}$  de la  $i$ -ésima componente conexa  $G_i$  de  $M - K$ , para  $i = 1, 2, \dots, k$ . Los correspondientes  $X_i$  son las **ramas** de  $X$  (ver figura 1).

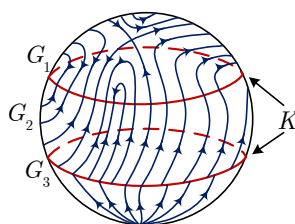


Figura 1: Un campo de vectores suave por partes en la esfera  $S^2$ .

Sea  $K \subset M$  un complejo simplicial como arriba. Numeramos las componentes conexas de  $M - K$  como  $G_1, \dots, G_k$ . Sea  $\mathfrak{X}_K^r$  el conjunto de todos los campos suaves por partes  $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)$  de clase  $C^r$  con región de discontinuidad  $K$ .

Una vez fija la inmersión de  $M$  en  $\mathbb{R}^3$ , los  $X_i$  pueden realizarse como campos tangentes a  $M$ . Es más, el conjunto  $\mathfrak{X}_K^r$  adquiere estructura de espacio de Banach con la norma del máximo (entre las restricciones a  $M$  de las derivadas de orden hasta  $r$  inclusive).

Para analizar el comportamiento de las órbitas de estos elementos precisamos conocer la naturaleza de los puntos en  $K$ . En primer lugar están los **vértices**. Aquellos puntos en  $K$  que no son vértices, es decir los lados, pertenecen por definición a dos regiones adyacentes. Los distinguimos por el comportamiento a cada uno de sus dos lados. Un punto de discontinuidad es de **tangencia** cuando al menos una de las dos ramas de  $X$  es tangente a  $K$  (esto incluye la posibilidad de que una rama se anule en este punto). Será punto de **cruce** si las ramas de  $X$  son transversales a  $K$  y ambas apuntan hacia un mismo lado. Es punto de **oposición**

cuando las ramas son transversales a  $K$  pero apuntan a lados opuestos. En la figura 2 se presenta un esquema de las cuatro posibilidades.

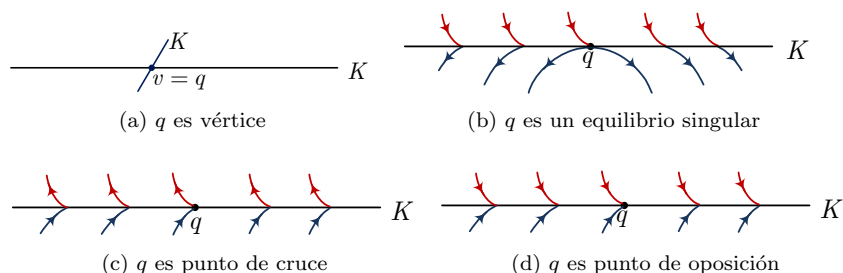


Figura 2: Los diferentes tipos de puntos del conjunto  $K$ .

Por **doble tangencia** nos referimos a aquella en la que la tangencia aparece en ambas ramas adyacentes.

Gracias a la compacidad de  $K$ , cada rama  $X_i$  puede extenderse a una vecindad de  $\overline{S}_i$ . Si bien las extensiones pueden diferir, las órbitas del campo están bien definidas mientras permanezcan en la región  $\overline{S}_i$ .

Sea  $q \in K$  un punto de oposición. Un **campo deslizando**  $X^*$  en  $q$  es la única combinación estrictamente convexa

$$X^*(q) = \lambda X_i(q) + (1 - \lambda)X_j(q), \quad 0 < \lambda < 1$$

que resulta tangente a  $K$  en  $q$ . Resaltamos que  $X^*$  en este caso está bien definido apenas en un entorno de  $q$  en  $K$ .

Un punto de oposición es **deslizando** si  $X^*(q) \neq 0$ , y es **equilibrio singular** si  $X^*(q) = 0$ . Ver figura 3.

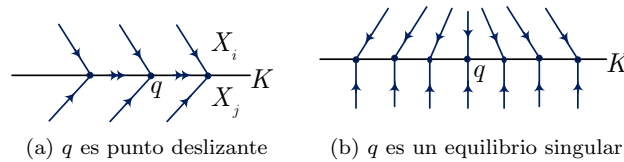


Figura 3

Una **singularidad** de  $X \in \mathfrak{X}_K^r$  es bien un equilibrio singular, bien un punto de tangencia, o bien un vértice de  $K$ . Por motivos que se harán obvios en los párrafos siguientes, excluimos a los puntos (interiores) de  $G_i$  donde el campo  $X_i$  se anula y la órbita es estacionaria.

Una **órbita regular** de  $X \in \mathfrak{X}_K^r$  es una curva suave por partes  $\gamma$  en  $M$  de modo que la intersección  $\gamma \cap G_i$  es una trayectoria de  $X_i$ , acá se sobreentiende que la intersección con la frontera  $\gamma \cap K$  consiste solamente de puntos de cruce. Nos interesan sobremanera aquellas órbitas regulares maximales respecto a estas condiciones.

Una **órbita singular** de  $X \in \mathfrak{X}_K^r$  es una curva suave  $\gamma \subset K$  tal que  $\gamma$  es una órbita de  $X^*$ , o una singularidad de  $X$ .

**Observación 2.1.** Es posible concatenar órbitas regulares con órbitas singulares; mecanismo conocido por **convención de Filippov**. Esto ocurre, por ejemplo, si  $\gamma$  llega a un punto singular  $q$  en tiempo finito y  $\beta$  se aleja de  $q$  en tiempo finito. Como consecuencia, pueden coexistir órbitas distintas a través de una singularidad  $q \in K$ . Con el fin de asegurar la unicidad de órbitas a través de un singularidades, deberemos restringir en lo posible el uso de concatenaciones.

Sean dos campos  $X, Y \in \mathfrak{X}_K^r$ . Una **equivalencia topológica** entre  $X$  e  $Y$  es un homeomorfismo  $h : (M, K) \rightarrow (M, K)$  que lleva órbitas de  $X$  en órbitas de  $Y$  y lleva órbitas en  $K$  en órbitas de  $K$ , a la vez que preserva la orientación de las mismas. En este caso decimos que  $X$  e  $Y$  son **topológicamente equivalentes**.

Una órbita  $\gamma$  **sale de**  $q \in K$  si se tiene  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \gamma(t) = q$ . Por otro lado, **entra a**  $q \in K$  cuando  $\lim_{t \rightarrow 0^-} \gamma(t) = q$ . (Ver figura 4).

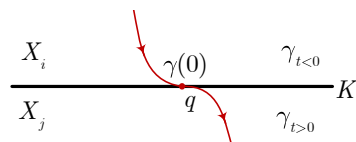


Figura 4: Una órbita  $\gamma$  que entra al punto  $q$  y sale del mismo.

Las separatrices se describen de manera heurística como lugares alrededor de los cuales muchas trayectorias pasan cierto tiempo para finalmente abandonarlo.

Una **separatriz inestable** es una órbita regular cuyo conjunto  $\alpha$ -límite es un punto silla o se aparta de una singularidad del campo  $X$  (ver figura 5). Una **separatriz estable** es una órbita regular cuyo conjunto  $\omega$ -límite es un punto silla o llega a una singularidad del campo  $X$ .

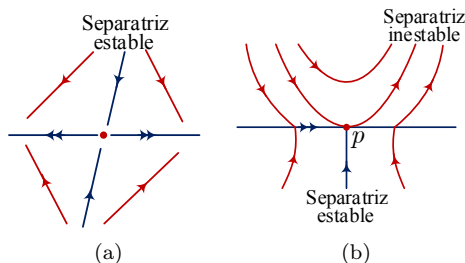


Figura 5: Se muestran separatrices inestables y estables: (a) alrededor de un punto silla singular, (b) alrededor de un punto de tangencia.

Si una separatriz es estable e inestable a la vez, se le denomina **separatriz conectora**. Dos separatrices inestables son **relacionadas** si llegan a un mismo punto (ver figura 6). Otros ejemplos se aprecian en

la figura 7.

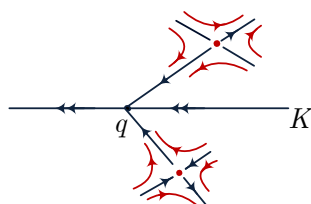
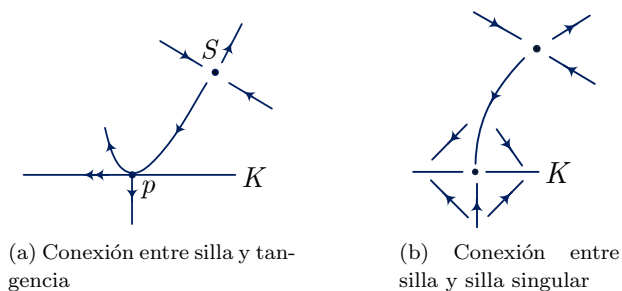


Figura 6: Separatrices relacionadas



(a) Conexión entre silla y tangencia

(b) Conexión entre silla y silla singular

Figura 7

### 3 Estabilidad estructural

Uno de los objetivos de la teoría de los sistemas dinámicos es clasificar la dinámica según la estructura geométrica de las órbitas; es decir, vía el estudio de su retrato de fase. Bajo un punto de vista geométrico la estabilidad estructural de un campo vectorial se entiende como la reticencia de su retrato de fase a no alterarse topológicamente ante pequeñas perturbaciones. Para campos suaves por partes, la estructura de las órbitas depende, entre otros factores, del comportamiento en la región de discontinuidad. Veremos en breve cómo la parte determinante del estudio



recae sobre las propiedades del llamado campo deslizante, definido en la región de oposición de  $K$ .

Broucke, Pugh y Simic [3] plantean el caso para la esfera. En ese contexto, tomemos por ejemplo  $X$  como un campo suave por partes con dos ramas  $X_+$  y  $X_-$ , definidas en el hemisferio boreal y austral, respectivamente: un punto en el hemisferio norte se mueve por  $X_+$ , caso contrario lo hace por  $X_-$ . Si el punto está en el ecuador (la región de discontinuidad) su futuro dependerá del contexto. Siempre es posible convenir un movimiento natural; ver por ejemplo la figura 8.

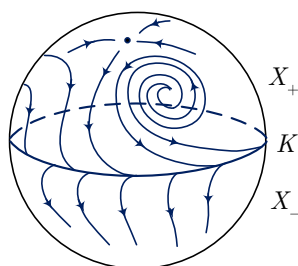


Figura 8: Estructura de las órbitas sobre  $S^2$ .

De ser el conjunto de los campos estructuralmente estables “grande” en algún sentido, entonces éste adquirirá preponderancia, pues nos acerca a lo que en términos topológicos es una propiedad genérica. Recuérdese que para campos de vectores no discontinuos, la estabilidad estructural es una propiedad genérica, es decir, se verifica en un abierto denso. Sin embargo, para campos suaves discontinuos algunas condiciones tendrán que ser reconsideradas.

Un campo  $X \in \mathfrak{X}_K^r$  es **estructuralmente estable** si existe una vecindad  $U \subset \mathfrak{X}_K^r$  de  $X$  tal que cada campo  $Y \in U$  es topológicamente equivalente a  $X$ : en otras palabras, existe un homeomorfismo ambiental que transforma órbitas de  $X$  en órbitas de  $Y$ . Denotamos por  $\Omega_K^r$  al conjunto de todos los campos  $X \in \mathfrak{X}_K^r$  estructuralmente estables.

**Ejemplo 3.1.** Consideremos la estructura de órbitas determinada por

un campo suave por partes sobre la esfera, como aquel mostrado en el lado izquierdo de la figura 9. Acá se aprecia una separatriz conectora que surca desde un punto silla ubicado en el hemisferio norte hasta un punto de tangencia. Al lado derecho observamos una ligera perturbación que carece de la conexión entre la silla y una tangencia. Como el campo y su perturbado no son equivalentes, resulta que el campo de referencia no merece ser llamado estructuralmente estable.

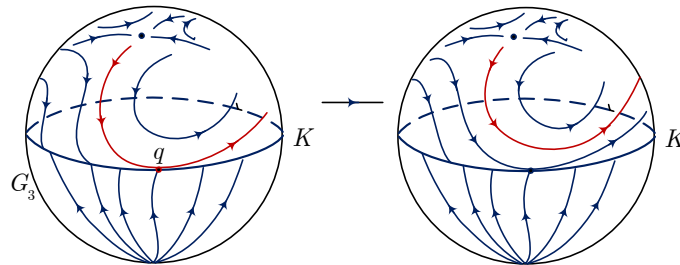


Figura 9: Estructura de órbitas inestable.

**Ejemplo 3.2.** Sea el cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$  dividido por el segmento  $L_1$  con extremos  $(\frac{1}{2}, 0)$  y  $(\frac{1}{2}, 1)$  (ver figura 10).

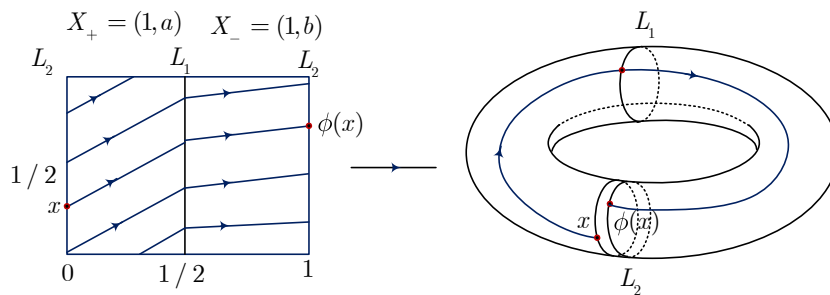


Figura 10: Estructura de órbitas sobre el toro.

El segmento  $L_1$  divide al cuadrado en dos partes, en ellas se definen los campos constantes  $X_+ = (1, a)$  y  $X_- = (1, b)$ . El cuadrado representa un toro, que se obtiene al identificar lados opuestos del cuadrado.

De ese modo, la región de discontinuidad consta de dos círculos  $\mathcal{C}_0$ ,  $\mathcal{C}_{1/2}$  identificados con los segmentos verticales indicados a la izquierda. Obsérvese que las órbitas de las dos regiones se concatenan. Por ejemplo, si empezamos en el segmento vertical correspondiente a  $x = 0$  (es decir desde  $\mathcal{C}_0$ ), nos habremos elevado  $a/2$  unidades al llegar a  $x = 1/2$  (es decir, a  $\mathcal{C}_{1/2}$ ), de ahí tras  $1/2$  unidad de tiempo adicionales acabaremos  $b/2$  unidades “más arriba”. En resumen, tras una unidad en el reloj, se completa una vuelta al círculo, mas al regresar a  $\mathcal{C}_0$  habremos rotado  $(a + b)/2$  vueltas a lo largo del meridiano; función que denotamos por  $\phi : \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}_0$ . Si se considera pequeñas perturbaciones en  $a$  o  $b$  (por ejemplo, el tránsito de rotación racional a irracional), la estructura de órbitas cesa de coincidir y el campo resulta inestable.

Por motivos técnicos, dado un segmento  $E \subset K$ , conviene fijar un sistema de coordenadas  $(U, \phi)$ , con  $E \subset U$ , de modo que  $\phi(E)$  sea un intervalo sobre el eje  $x$ , digamos  $\phi(E) = [-1, 1]$  (ver figura 11).

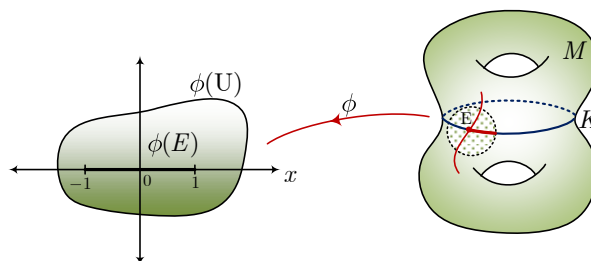


Figura 11: Una coordenada que cubre parte de una arista de  $K$ .

En este sistema coordenado las ramas se expresan “localmente” cual  $X_1$  y  $X_2$ , definidas una sobre el semiplano cerrado superior, la otra sobre el inferior:

$$X(x, y) = \begin{cases} X_1(x, y) = (f_1(x, y), g_1(x, y)); & y \geq 0 \\ X_2(x, y) = (f_2(x, y), g_2(x, y)); & y \leq 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

El conjunto de los puntos de oposición de  $K$  es relativamente abierto. De acuerdo con la convención anterior, para uno de ellos, digamos  $q = (x, 0)$ , las funciones  $g_i$  y  $g_j$  no se anulan, mas poseen signos opuestos. De este modo cualquier combinación convexa toma la forma

$$\begin{aligned} \lambda X_i(x, 0) + (1 - \lambda)X_j(x, 0) &= \lambda (f_i(x), g_i(x)) + (1 - \lambda) (f_j(x), g_j(x)) \\ &= (\lambda f_i(x) + (1 - \lambda)f_j(x), \lambda g_i(x) + (1 - \lambda)g_j(x)). \end{aligned}$$

Al ser el campo deslizante  $X^*$  la única combinación estrictamente convexa y tangente a  $K$ , su componente vertical  $\lambda g_i(x) + (1 - \lambda)g_j(x)$  debe anularse. De ese modo, se tiene la igualdad

$$\lambda = \frac{g_j(x)}{g_j(x) - g_i(x)} \quad (3.2)$$

y el campo deslizante  $X_{ij}^*$  queda expresado cual

$$\begin{aligned} X_{ij}^*(x, 0) &= \frac{g_j(x)}{g_j(x) - g_i(x)} X_i(q) + \left(1 - \frac{g_j(x)}{g_j(x) - g_i(x)}\right) X_j(q) \\ &= \frac{g_j(x)}{g_j(x) - g_i(x)} X_i(q) + \left(\frac{-g_i(x)}{g_j(x) - g_i(x)}\right) X_j(q) \\ &= \frac{g_j(x)X_i(q) - g_i(x)X_j(q)}{g_j(x) - g_i(x)}. \end{aligned}$$

Necesitamos un concepto adicional prestado del análisis real básico. Una función diferenciable  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tiene **ceros genéricos** si no se anula en los extremos y  $f(x) = 0$  implica  $f'(x) \neq 0$ . El siguiente resultado justifica el nombre.

**Lema 3.3.** *Una función genérica de clase  $C^r$  posee ceros genéricos.*

*Prueba.* Obsérvese que se desprende de inmediato de la definición que todos los ceros de  $f$  son interiores y están aislados. En otras palabras,

0 es un valor regular de  $f$ . El resultado se sigue de técnicas estándar de teoría de Morse (cf. [7]).  $\square$

**Proposición 3.4.** *El conjunto  $\Omega$  de campos  $X \in \mathfrak{X}_K^r$  que satisfacen las propiedades*

- a) *las restricciones  $X_i$  son de Morse-Smale,*
- b) *los  $X_i$  no se anulan en  $K$ ,*
- c) *las tangencias de  $X_i$  con  $K$  aparecen en número finito y lejos de los vértices, además ninguna es doble (es decir, por ambos costados), pero todas son parabólicas (es decir, cuadráticas) y*
- d) *los  $X_i$  son colineales a lo mucho en un número finito de puntos de  $K$ , ninguno de los cuales es un vértice*

*es abierto y denso en  $\mathfrak{X}_K^r$ .*

*Prueba.* Fijemos un sistema de coordenadas  $(U, \phi)$  con  $\phi(E) = [-1, 1]$  (ver figura 11) y tomemos  $X$  con ramas descritas por (3.1). Definimos los conjuntos

$$\begin{aligned}\Omega_a &= \{X \in \mathfrak{X}_K^r : \text{cumple la propiedad a}\}, \\ \Omega_{ab} &= \{X \in \Omega_a : \text{cumple la propiedad b}\}, \\ \Omega_{abc} &= \{X \in \Omega_{ab} : \text{cumple la propiedad c}\}, \\ \Omega_{abcd} &= \{X \in \Omega_{abc} : \text{cumple la propiedad d}\}.\end{aligned}$$

Sea  $X \in \Omega_a$ . El teorema de Peixoto [10] afirma que cuando las ramas  $X_i$  de  $X$  son campos Morse-Smale, el campo es genérico. Así,  $\Omega_a$  es abierto y denso en  $\mathfrak{X}_K^r$ .

El conjunto  $\Omega_{ab} = \{X \in \Omega_a : X_i(p) \neq 0, p \in K\}$  es abierto y denso ya que este conjunto coincide con  $\{X \in \Omega_a : X_i|_K \text{ es transversal a } \{0\}\}$ . En efecto, si  $X_i|_K$  es transversal a  $\{0\}$ , o bien se tiene  $X_i|_K(q) \neq 0$ , o en su defecto se cumple  $X_i|_K(q) = 0$  y  $DX_i|_K(q) \cdot \mathbb{R} + T_q\{0\} = T_q\mathbb{R}^2$ . Pero lo último no ocurre ya que las dimensiones no coinciden. Luego, por el teorema de transversalidad de Thom el conjunto  $\Omega_{ab}$  es abierto y denso en  $\Omega_a$ .

El conjunto  $\Omega_{abc}$  está conformado por campos  $X \in \Omega_{ab}$  con un número finito de tangencias, ninguna doble pero todas cuadráticas. Una rama  $X_i(q)$  será tangente en  $q \in E \subset K$  si y sólo si se tiene  $g_i(q) = 0$ ; y será cuadrática única y exclusivamente cuando se tenga en simultáneo  $f_i(q) \neq 0$  y  $\frac{\partial g_i}{\partial x}(q) \neq 0$ . En efecto, por definición se cumple

$$X_i h(x, 0) = \langle X_i(q), \nabla h(q) \rangle = \langle (f_i(q), g_i(q)), (0, 1) \rangle = g_i(q) = 0.$$

Y de ahí se pasa a

$$\begin{aligned} X_i^2 h(x, 0) &= \langle X_i(q), \nabla X_i h(q) \rangle \\ &= \left\langle (f_i(x), g_i(x)); \left( \frac{\partial g_i}{\partial x}(x), \frac{\partial g_i}{\partial y}(x) \right) \right\rangle \\ &= f_i(x) \frac{\partial g_i}{\partial x}(q) + g_i(x) \frac{\partial g_i}{\partial y}(q) \\ &= f_i(x) \frac{\partial g_i}{\partial x}(x) \neq 0. \end{aligned}$$

Es decir,  $X_i$  no acepta tangencias en vértices de  $K$  si y sólo si  $g_i$  no se anula en los extremos de  $E$ , y no acoge doble tangencia en  $q$  si y sólo si  $g_i(q) = 0$  implica  $g_j(q) \neq 0$ . Es decir, el conjunto  $\Omega_{abc}$  coincide con el conjunto de los campos para los cuales  $h_{ij}$ , donde  $h_{ij} : E \rightarrow \mathbb{R}^2$  está dada por  $h_{ij}(x) = (g_i(x), g_j(x))$ , es transversal a  $\{0\}$ . Por el teorema de transversalidad, el conjunto  $\Omega_{abc}$  es abierto y denso en  $\Omega_{ab}$ .

El conjunto  $\Omega_{abcd}$  es denso y abierto en  $\Omega_{abcd}$ . En efecto, sea  $x_0 \in \phi(E) = [-1, 1]$ . Si  $X \in \Omega_{abc}$ , entonces por c) o  $g_i(x_0) \neq 0$  o  $g_j(x_0) \neq 0$ . Supongamos que se teng  $g_j(x_0) \neq 0$ . Entonces existe un intervalo  $I \subset [-1, 1]$  que contiene a  $x_0$  en donde se tiene  $g_j \neq 0$  (es decir  $X_j$  no es tangente a  $K$ ). En uso de la carta  $\phi$  asociada a la caja de flujo para  $X_j$  en  $I$ , podemos asumir que se cumple  $f_j(x) = 0$  y  $g_j(x) > 0$  para todo  $x \in I$  (en estas coordenadas de la caja del flujo el vector  $X_j$  apunta directamente hacia arriba). De este modo una colinealidad entre  $X_i$  y  $X_j$  ocurre exclusivamente cuando se tiene  $f_i(x) = 0$ . Por el lema (3.3), ello acontece para  $X$  solo en número finito y nunca en los extremos de  $I$ . Luego, por el teorema de transversalidad, se concluye el resultado.

Finalmente, en virtud de la transitividad, resulta que  $\Omega$  es denso y abierto.  $\square$

A modo de ilustración consideramos el campo  $Y = (Y_1, Y_2)$  de la figura 12. Las ramas de  $Y$  no satisfacen la propiedad 1, es decir, no son Morse-Smale. Tampoco se respeta la propiedad 2 pues se exhibe una silla que muere en  $q \in K$ .

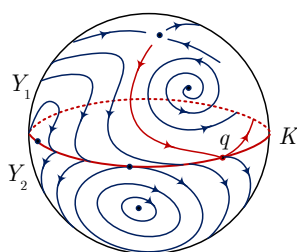


Figura 12: Un posible estructura de órbitas de  $Y \notin \Omega$ .

**Proposición 3.5.** *Dado  $X \in \Omega$ , existe una vecindad  $\mathcal{V}$  de  $X$  en  $\mathfrak{X}_K^r$  tal que cada  $Y \in \mathcal{V}$  posee en común con  $X$*

- *el mismo número de puntos críticos y del mismo tipo topológico,*
- *igual número de tangencias del mismo tipo topológico,*
- *igual cantidad de equilibrios singulares del mismo tipo e*
- *igual número de órbitas cerradas.*

Afirmar que son del mismo tipo topológico significa geoméricamente que son equivalentes, es decir, que son topológicamente conjugados.

*Prueba.* La mayoría de propiedades son explícitas de la proposición 3.5. Las restantes se amparan en la definición de campo Morse-Smale en la parte a) del mismo resultado.  $\square$

## 4 Equilibrios singulares hiperbólicos

Analizamos algunas propiedades de los campos genéricos. Observamos que el campo deslizante  $X^*$  está definido en la región de oposición mas no así en vértices de  $K$ .

**Proposición 4.1.** *El campo deslizante  $X^*$  asociado a un campo genérico  $X$  es de clase  $C^r$ . Además, los puntos críticos de  $X^*$ , en caso existan, son atractores o repulsores, hiperbólicos en ambos casos.*

*Prueba.* Debido a la ecuación (3.2) el campo  $X^*$  resulta claro que es de clase  $C^r$ . Para demostrar que los ceros de  $X^*$  son hiperbólicos se troca la carta  $\phi$  alrededor de  $q \in K$  por una carta de caja de flujo  $\psi$  para hacer  $f_j \equiv 0$ . Luego, la colinealidad ocurre si  $f_i(x) = 0$ .

Al ser  $X$  genérico, en uso del lema 3.3 se tiene que  $f'_i(x) \neq 0$  cuando  $f_i(x) = 0$ . De este modo, en el sistema de coordenadas  $(\psi, U')$ , el punto crítico  $q = (x, 0)$  de  $X^*$  es hiperbólico repulsor cuando  $f'_i(x) > 0$  y atractor si  $f'_i(x) < 0$ .  $\square$

En el transcurso de la siguiente proposición definiremos y catalogaremos los diferentes tipos de singularidades en  $K$ .

**Proposición 4.2.** *El número de singularidades de un campo genérico es finito y solo admiten las siguientes posibilidades:*

- *silla singular (equilibrio singular);*
- *atractor singular (equilibrio singular);*
- *repulsor singular (equilibrio singular);*
- *nodo-silla singular (tangencia visible);*
- *montículo singular (tangencia invisible);*
- *vértice de  $K$ .*

*Todas son estables bajo pequeñas perturbaciones.*

*Prueba.* Sea  $X$  un campo genérico y  $q \in K$  un equilibrio singular o un punto de tangencia pero no un vértice. Por la proposición (3.4) la genericidad implica que por lo menos una rama de  $X$  es transversal a



$K$  en  $q$ , digamos  $X_j$ . Como en la prueba de la proposición (3.4), en uso de una carta de la caja flujo podemos asumir  $f_j \equiv 0, g_j = 1$  y tomar  $q = (0, 0)$ . Observemos que se tiene  $g_i(0) \leq 0$ , pues de no ser así  $X_i$  y  $X_j$  apuntarían hacia arriba a través del eje  $x$  en  $q$ ; y resultaría que  $q$  es regular y no singular, una contradicción. También, la genericidad implica que o bien  $f_i(0) = 0$  y  $g_i(0) \neq 0$ , o en su defecto  $f_i(0) \neq 0$  y  $g_i(0) = 0$ , ya que la nulidad de ambos contradiría la condición b) de la proposición (3.5). De ahí que podemos distinguir dos casos bien diferenciados topológicamente. Veamos.

Caso 1. Cuando  $f_i(0) = 0, g_i(0) < 0, f'_i(0) \neq 0$ , aparecen como posibilidades  $f'_i(0) > 0$  y  $f'_i(0) < 0$ . De tenerse  $f'_i(x) > 0$ , debido a  $f_i(0) = 0$ , existe una única  $X_i$ -órbita que llega al origen desde arriba: en este caso decimos que tenemos **una silla singular con separatriz regular estable**. Si  $f'_i(x) < 0$  la misma  $X_i$ -órbita que llega desde arriba al origen abre paso a un **atractor singular** (ver figura 13).

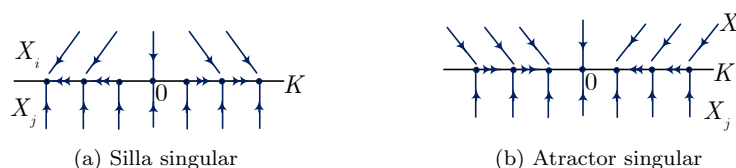


Figura 13

Caso 2. Cuando  $f_i(0) \neq 0, g_i(0) = 0, g'_i(0) \neq 0$ , aparecen nuevamente dos posibilidades  $g'_i(0) > 0$  o  $g'_i(0) < 0$ . Si  $g'_i(0) > 0$ , se obtiene una tangencia  $X_i h(x, y) = \langle X_i(x, y); (0, 1) \rangle = \langle (f_i, g_i); (0, 1) \rangle = g_i(x, y)$  con  $h(x, y) = y$  y  $h^{-1} = \phi$ . Este es el caso denominado **nodo-silla**. En este caso apreciamos tres separatrices: dos de ellas estables y una inestable (ver figura 14 (a)). Si  $g'_i(x) < 0$ , obtenemos una tangencia “invisible” comúnmente llamada **montículo singular**. Acá se vislumbra una única separatriz, la misma que es estable (ver figura 14 (b)). En ambos casos, sin embargo, el signo de  $f_i(0)$  es irrelevante pues su efecto es el virar la dirección, sea hacia la izquierda o la derecha de  $K$ .

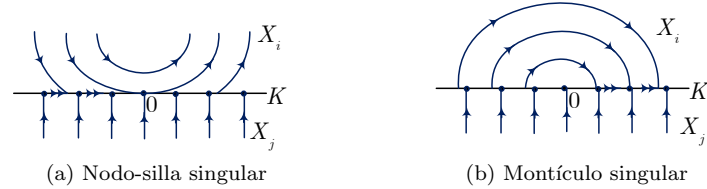


Figura 14

La genericidad y finitud de las singularidades ya fue anotada en la proposición 3.5 □

## 5 Estabilidad estructural en $\mathfrak{X}_K^r$

Presentamos el teorema de caracterización de los campos suaves por partes estructuralmente estables definidos en una superficie compacta. Tomamos prestada de [7] la definición de órbita recurrente: una órbita  $\gamma$  es **recurrente** si está contenida en el conjunto  $\omega$ -límite de  $\gamma$  o en el conjunto  $\alpha$ -límite de  $\gamma$ . Las **órbitas recurrentes triviales** son los puntos críticos y las órbitas cerradas.

Escribimos  $\Omega_K^r$  para denotar al conjunto de los campos estructuralmente estables. El siguiente teorema los caracteriza.

**Teorema 5.1.** *Un campo  $X \in \mathfrak{X}_K^r$  es estructuralmente estable si y solo si*

- *satisface las condiciones de la proposición 3.5,*
- *todas sus órbitas periódicas son hiperbólicas,*
- *carece de separatrices conectadas y de separatrices relacionadas y*
- *sólo admite órbitas recurrentes triviales.*

*Prueba.* Si  $X \in \mathfrak{X}_K^r$  es un campo que satisface las condiciones del teorema, entonces tiene un número finito de singularidades: usaremos  $r_i$  para repulsores,  $a_i$  para atractores,  $s_i$  para sillars,  $q_i$  para tangencias y

$p_i$  para equilibrios singulares, según convenga. Cada silla, tangencia o equilibrio singular tiene asociado separatrices; las separatrices estables nacen de un repulsor y las inestables mueren en un atractor. Por la proposición 3.5 existe una vecindad  $\mathcal{V}$  de  $X$  en la cual todo  $\tilde{X} \in \mathcal{V}$  posee el mismo número y tipo de singularidades y separatrices que  $X$ .

Sean  $V_l$  vecindades de los  $r_l$  y  $U_k$  de los  $a_k$ . Similarmente tomemos  $\tilde{V}_l$  asociados con  $\tilde{r}_l$  y  $\tilde{U}_k$  con  $\tilde{a}_k$ ; las fronteras de estas vecindades han de ser transversales al campo, ver figura 15. Las separatrices cortan las fronteras  $\partial V_l$ ,  $\partial \tilde{V}_l$  en arcos. El homeomorfismo  $h$  es construido mediante fiel seguimiento de lo pasos que se enumeran a continuación.

Primero, como es lógico, realizamos la asignación puntual.  $h(p_i) = \tilde{p}_i$ ,  $h(r_i) = \tilde{r}_i$ ,  $h(s_i) = \tilde{s}_i$ ,  $h(q_i) = \tilde{q}_i$  y  $h(a_i) = \tilde{a}_i$ .

En segundo lugar nos aseguramos de asignar  $h(\alpha) = \tilde{\alpha}$ , donde  $\alpha$  es un arco en  $\partial V_i$  y  $\tilde{\alpha}$  es el correspondiente arco en  $\partial \tilde{V}_i$ .

En seguida, en utilización las órbitas de  $X$ ,  $\alpha$  es dejado fluir hasta  $\beta \in \partial U_k$ , lo mismo con  $\tilde{X}$ : ahora  $\tilde{\alpha}$  es llevado hacia  $\tilde{\beta} \in \partial \tilde{U}_k$ . Hemos podido así materializar la extensión  $h(\beta) = \tilde{\beta}$ .

Luego extendemos  $h$  al interior de las regiones  $V_l$  y  $U_k$ .

Por último, se extiende  $h$  a las regiones limitadas por los arcos  $\alpha$ ,  $\beta$  y las separatrices correspondientes.  $\square$

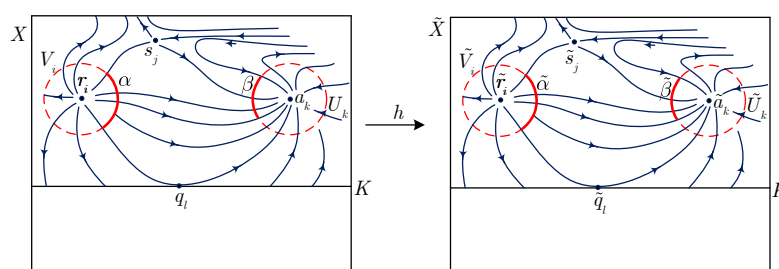


Figura 15: El homeomorfismo  $h$  lleva órbitas del campo  $X$  en órbitas de  $\tilde{X}$  (la perturbación)

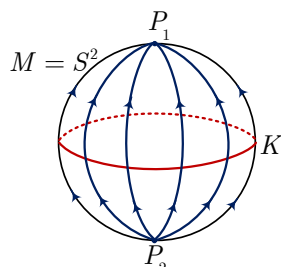


Figura 16:  $P_1$  es un atractor hiperbólico,  $P_2$  es un repulsor hiperbólico y  $K$  es una región de discontinuidad

Como ejemplo sean  $X_1$  y  $X_2$  las ramas del campo  $X$  sobre la esfera  $M = S^2$  y suponemos que son transversales a  $K = S^1$  como se muestra en la figura 16. Observamos que los campos son del tipo *Morse-Smale*, luego condiciones 1 y 4 del teorema se satisfacen. El campo  $X$  es genérico si y solo si los equilibrios singulares son hiperbólicos y no hay separatrices conectadas ni separatrices relacionadas entre los puntos de equilibrios singulares y sillars.

## Referencias

- [1] Andronov A., Pontryagin L.; *Grubye sistemy (Structurally Stable Systems)*, Doklady ANSSSR, 14, Nro. 5, 1937.
- [2] Bernardo M., Budd C., Champneys A., Kowalczyk P.; *Piecewise-smooth dynamical systems: theory and applications*, Springer Science & Business Media, Vol. 163, 2008.
- [3] Broucke M., Pugh C., Simic S.; *Structural stability of piecewise smooth systems*, Computational and applied mathematics, 20(1-2), 51-89, 2001.

- [4] Filippov A.; *Equations with the Right-Hand Side Continuous in  $x$  and Discontinuous in  $t$ . In Differential equations with discontinuous righthand sides*, Springer Netherlands, 3-47, 1988.
- [5] Kotus J., Krych M., Nitecki Z.; *Global structural stability of flows on open surfaces*, American Mathematical Soc., Vol. 261, 1982.
- [6] Kozlova V.; *Structural stability of discontinuous systems*, Vestnik Mosk. Gos. Univers. Ser. Matem. i Mekhan, 5,16-20, 1984.
- [7] Palis J., De Melo W.; *Introdução aos sistemas dinâmicos*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1978.
- [8] Peixoto M.; *Structural stability in the plane with enlarged boundary conditions*, Anais da Academia Brasileira de Ciências, 31(2), 135-160, 1959.
- [9] Peixoto M.; *On Structural stability*, Annals of Mathematics, 199-222, 1959.
- [10] Peixoto M.; *Structural stability on 2-Dimensional Manifolds - Topology*, Vol. 1, 101-120, Pergamon Press, 1962.
- [11] Pontrjagin L., Andronov A.; *Systemes grossier*, Dokl. Akad. Nauk, SSSR, Vol. 14, 247-251, 1937.
- [12] Santos R.; *Bifurcações em sistemas dinâmicos suaves por partes*, 2013.
- [13] Smale S.; *On gradient dynamical systems*, Annals of Mathematics, 199-206, 1961.

**Abstract**

In this paper we present the theorem of characterization of the structural stability of piecewise smooth vector fields defined on a compact surface. It is essentially a result of the local theory, and is based on work of Brouke, Pugh & Simic [3]. They established and showed that

*Rode Checya*

the necessary and sufficient conditions are given by hyperbolicity of singular points, genericity of tangencies, no connection of singular saddles, and the appearance of only trivially recurrent orbits. We show the same but from a different perspective.

**Keywords:** Structural stability, singularities, genericity.

Rode Checya  
Departamento de Matemática  
Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa  
rhecya@unsa.edu.pe