APLICACIONES DEL TEOREMA DE BRAUER AL PROBLEMA ESPECTRAL INVERSO NO NEGATIVO

Hernán Neciosup Puicán[1]

Junio, 2011

Resumen

El teorema de Brauer describe un procedimiento para modificar un autovalor del espectro de una matriz compleja y Rado lo extiende para modificar una parte del espectro. En los años cincuenta Perfect utiliza estos resultados para dar condiciones bajo la cual una colección de números reales sea el espectro de una matriz no negativa [6], [7]. Un trabajo debido a Suleimanova [12], junto con estas condiciones, dan origen al problema espectral inverso no negativo. Recientemente se han descrito varias condiciones suficientes basadas en los teoremas de Brauer y Rado para la realización de matrices no negativas con espectro real. En este trabajo profundizamos estas técnicas y se hace una recopilación de los resultados conocidos hasta el momento para el problema del espectro real inverso no negativo que utilizan el teorema de Brauer.

MSC(2010):15A18, 15A15.

Palabras clave: *Problema espectral inverso.*

1. *Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias, PUCP.*

1. Introducción

Los problemas espectrales inversos tratan de reconstruir un sistema físico a partir de cierta información espectral dada que gobierna el comportamiento dinámico del sistema. Asociado con cada problema espectral inverso hay dos cuestiones fundamentales: la primera es la existencia de la matriz y la segunda es su construcción. Ambas cuestiones son difíciles y desafiantes de abordar.

Los problemas espectrales inversos surgen de una variedad de aplicaciones como por ejemplo: el diseño de control, la tomografía sísmica, el procesamiento de señal de antena, la geofísica, la espectroscopía molecular, la física de partículas, el análisis estructural, la teoría de circuitos o la simulación de sistemas mecánicos, entre otros. Un fenómeno común que se destaca en la mayoría de estas aplicaciones es que los parámetros físicos del sistema subyacente deben ser reconstruidos a partir del conocimiento de su comportamiento dinámico. El comportamiento dinámico se ve afectado por las propiedades espectrales de diversas maneras. Las vibraciones dependen de las frecuencias naturales y de los modos normales, los controles de estabilidad dependen de la localización de los valores propios, y así sucesivamente. Si los parámetros físicos pueden ser descritos matemáticamente de forma matricial, entonces tenemos un problema espectral inverso. La estructura de la matriz suele ser heredada de las propiedades físicas del sistema subyacente. Dentro de los problemas espectrales inversos están aquellos en los que las matrices son de una clase particular, siendo las matrices no negativas de especial importancia.

El estudio de las matrices no negativas y positivas tiene su origen con Perron en 1907 y Frobenius en los años 1908, 1909 y 1912 (ver [1]). Estos dos autores dejan resultados fundamentales que en la actualidad se conocen como teoría de Perron-Frobenius. Esta clase de matrices surge de manera natural en varias ramas de la Matemática como la Teoría de Grafos, el Análisis Numérico o el Cálculo de Probabilidades y en sus aplicaciones como la Mecánica, la Economía, etc. lo que incrementa el estudio de sus propiedades, despertando el interés de muchos investigadores.

2. Resultados

El **problema espectral inverso no negativo** consiste en caracterizar las familias de números complejos que son el espectro de una matriz no negativa. Los primeros resultados para el estudio de este problema se produjeron en el contexto de las matrices estocásticas.

Definición 2.1. *Sea la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Diremos que:*

- *A es **no negativa**, si $a_{ij} \geq 0$;*
- *A es **positiva**, si $a_{ij} > 0$.*

De forma análoga se define vector no negativo y vector positivo.

Definición 2.2. *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz no negativa de orden n. Diremos que:*

- *A es una matriz **estocástica** si la suma de sus filas es igual a uno, es decir,*
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1;\ \ i = 1, 2, \cdots, n.$$
*Si además $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$, para $j = 1, 2, \cdots, n$, A es llamada **doblemente estocástica**.*
- *A es una matriz **estocástica generalizada** si la suma de sus filas*

es constante, es decir, existe $\alpha \geq 0$ *tal que*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \alpha; \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

Denotaremos por EG_α al conjunto de todas las matrices estocásticas generalizadas tales que la suma de sus filas es igual a α. Las matrices de EG_α se caracterizan por ser no negativas y tener el vector propio $\mathbf{e} = (1, 1, \cdots, 1)^t$ asociada a su radio espectral α.

Cuando en el problema espectral inverso no negativo centremos la atención en una cierta clase de matrices, por ejemplo las matrices estocásticas, hablaremos del **problema espectral inverso estocástico**.

Teorema 2.3 (Brauer 1952: primera versión). *Sea* $A = (a_{ij})$ *una matriz compleja de orden* n *con autovalores* $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ *de multiplicidades* $m_1, \ldots, m_s$*, respectivamente, con* $\sum_{i=1}^{s} m_i = n$*. Sean* $x = (x_1, \ldots, x_n)^t \neq 0$ *un vector propio de* A *asociado a* λ_1 *y* X_r *una matriz de orden* n *cuya* r*-ésima columna,* $1 \leq r \leq n$*, es* x *y sus demás elementos son todos ceros. Entonces la matriz*

$$A + \sum_{r=1}^{n} k_r X_r,$$

donde $k_1, \ldots, k_r$ *son números complejos arbitrarios, tiene autovalores*

$$\lambda_1 + \sum_{r=1}^{n} k_r x_r, \lambda_1 \ldots, \lambda_s$$

con multiplicidades $1, m_1 - 1, m_2, \ldots, m_s$*, respectivamente.*

Demostración. Ver [3] □

El siguiente resultado es otra forma de escribir el teorema de Brauer. Esta nueva versión desempeña un papel muy relevante en el estudio del problema espectral inverso no negativo, no solo para deducir condiciones suficientes para el problema espectral inverso no negativo sino también para obtener soluciones matriciales estocásticas generalizadas.

Teorema 2.4 (Teorema de Brauer: segunda versión)**.** *Sea A una matriz compleja de orden n con espectro $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$. Sea $v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)^t$ un autovector de A asociado al autovalor λ_k y sea $q = (q_1, \cdots, q_n)^t$ un vector n-dimensional. Entonces la matriz $A + vq^t$ tiene espectro*

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{k-1}, \lambda_k + v^t q, \lambda_{k+1}, \cdots, \lambda_n\}.$$

Una primera aplicación del teorema de Brauer al problema espectral inverso no negativo es el siguiente resultado.

Teorema 2.5. *Si $\sigma = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ es el espectro de una matriz no negativa A de radio espectral λ_1, entonces $\sigma_\epsilon = \{\lambda_1 + \epsilon, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ es el espectro de una matriz no negativa A_ϵ para todo $\epsilon > 0$.*

Demostración. Como A es una matriz no negativa, entonces existe un vector propio no negativo $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^t$ asociado al radio espectral λ_1.

Definamos
$$q = (0, 0, \cdots, 0, \frac{\epsilon}{x_p}, 0, \cdots, 0)^t,$$
donde $x_p > 0$ y ϵ/x_p son las p-ésimas componentes de x y q, respectivamente, para aplicar el teorema de Brauer. Entonces,

$$A_\epsilon = A + xq^t = A + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \epsilon & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \epsilon & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

tiene espectro

$$\sigma_\epsilon = \{\lambda_1 + x^t q, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\} = \{\lambda_1 + \epsilon, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$$

y, además, es no negativa. $\square$

En la demostración del teorema anterior, se observa que, si A es estocástica generalizada (respectivamente positiva), entonces A_ϵ también es estocástica generalizada (respectivamente positiva). Notemos por otro lado que si A es simétrica, A_ϵ no lo es. Sin embargo, el resultado sigue siendo cierto

El siguiente resultado es una extensión del teorema de Brauer, debida a R. Rado y publicada por H. Perfect en 1955 [7], que permite cambiar r autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$; $r \leq n$, de una matriz A de orden n, vía una perturbación de rango r, sin cambiar el resto de los autovalores $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \cdots, \lambda_n$.

Teorema 2.6 (Rado 1955)**.** *Sean A una matriz compleja de orden n con espectro $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ y $X = \big(X_1|X_2|\cdots|X_r\big)$ una matriz de rango r con $AX_i = \lambda_i X_i$, para $i = 1, 2, \cdots, r$; $r \leq n$. Sea C una matriz compleja de orden $r \times n$. Entonces la matriz $A + XC$ tiene espectro*

$$\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_r, \lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \cdots, \lambda_n\},$$

donde $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_r$ son los autovalores de la matriz $\Omega + CX$ siendo $\Omega = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r)$.

En 1981 C. Johnson [4], demuestra que los siguientes problemas son equivalentes:

- Problema espectral inverso no negativo.
- Problema espectral inverso estocástico.
- Problema espectral inverso estocástico generalizado.

Definición 2.7. *Diremos que una familia de números complejos*

$$\sigma = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$$

es ***realizable*** *si existe una matriz A no negativa de orden n tal que σ es el espectro de A. Si A es simétrica no negativa diremos que σ es* ***simétricamente realizable****.*

Si $\sigma = \cup_{k=1}^{r} \sigma_k$ es una partición de σ y cada σ_k es realizable por una matriz no negativa (respectivamente simétrica no negativa) A_k, entonces σ es realizable (respectivamente simétricamente realizable) por la matriz no negativa (respectivamente simétrica no negativa)

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_r.$$

Es claro que para que una familia $\sigma = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ sea el espectro de una matriz no negativa A son necesarias las siguientes condiciones:

1. σ es autoconjugada.
2. $\max\{|\lambda_j| : j = 1, \cdots, n\} \in \sigma$, es decir, el radio espectral de A está en σ.
3. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k = \text{traza}(A^k) \geq 0, \;\; \forall\, k \in \mathbb{N}.$

Se conocen otras condiciones necesarias y algunas condiciones suficientes para el problema espectral inverso no negativo. Este problema permanece abierto para $n \geq 5$.

Para $n = 2$ las dos primeras condiciones necesarias son también suficientes para caracterizar los espectros realizables:

$$\sigma = \{\lambda_1, \lambda_2\} \text{ es realizable } \Leftrightarrow \sigma \subset \mathbb{R} \text{ y } \lambda_1 + \lambda_2 \geq 0.$$

Para $n \geq 3$ existen espectros realizables no reales. Dada la dificultad del problema espectral inverso no negativo, muchos autores han optado por estudiar qué espectros reales son realizables, lo que se conoce como

problema del espectro real inverso no negativo. Este problema consiste en caracterizar las familias de números reales que son el espectro de una matriz no negativa.

Es conocido que si $\sigma = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}$, $n \leq 4$, entonces

$$\sigma \text{ es realizable} \Leftrightarrow \text{máx}\left\{|\lambda_i| : i = 1, \cdots, n\right\} \in \sigma \text{ y } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \geq 0.$$

Durante mucho tiempo se pensó que el problema del espectro real inverso no negativo y el problema espectral inverso simétrico no negativo eran coincidentes. En 1996 se encontró un espectro real realizable pero no simétricamente realizable, y actualmente se sabe que estos problemas son iguales para $n \leq 4$ y distintos para $n \geq 5$.

En este trabajo describiremos condiciones suficientes para ambos problemas obtenidas a partir del teorema de Brauer.

3. Algunas Técnicas Geométricas

Suleimanova (1949) [12] y Perfect (1952-1955) [7], [8] introdujeron técnicas geométricas para el estudio del problema espectral inverso no negativo y proporcionaron los primeros resultados para esta clase de problemas. A continuación se describen algunas de estas técnicas y los principales resultados obtenidos con ellas.

Teorema 3.1 (Suleimanova 1949). *Existe una matriz* $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ *positiva y diagonalizable con autovalores*

$$\begin{cases} \lambda_0 = \rho > 0, & \\ \lambda_{2k-1} = \alpha_k + i\beta_k, \lambda_{2k} = \alpha_k - i\beta_k; & k = 1, \ldots, q \\ \lambda_k = \alpha_k; & k = 2q+1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

con $|\lambda_i| < \rho,\ i = 1, \ldots, n-1$, *si y sólo si existe al menos un poliedro* Q_{n-1} *de dimensión* $n-1$ *que se aplica estrictamente en su interior por una aplicación afín* f *definida por la matriz casi-diagonal*

$$F = \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \alpha_q & \beta_q \\ -\beta_q & \alpha_q \end{pmatrix}, \alpha_{2q+1}, \ldots, \alpha_{n-1} \right).$$

Demostración. Ver [3] □

Utilizando las técnicas geométricas de la demostración del teorema 3.1, Suleimanova afirma el siguiente resultado:

Teorema 3.2. *Para que una familia de números reales*

$$\sigma = \{\lambda_1 = \rho, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\},$$

con $|\lambda_i| < \rho$, *para* $i = 2, \ldots, n$, *sea realizable por una matriz positiva de orden* n *es suficiente que la suma de los módulos de los números negativos de* σ *sea menor que* ρ.

Si en la familia σ solo hay un λ_i negativo o ninguno, entonces σ es realizable por una matriz positiva.

Corolario 3.3. *La familia* $\sigma = \{\lambda_1 = \rho, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, *con* $\lambda_i < 0$ *y* $|\lambda_i| < \rho$, *para* $i = 2, \ldots, n$, *es realizable por una matriz positiva de orden* n *si y solo si* $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} |\lambda_i| < \rho$. *(La necesidad viene impuesta porque la suma de los autovalores es la traza de la matriz, que es positiva:* $\rho + \displaystyle\sum_{i=2}^{n} \lambda_i = \textit{traza} > 0$.*)*

En [5], Hazel Perfect utiliza la técnica geométrica de Suleimanova para el caso de matrices de órdenes 3 y 4 obteniendo los siguientes resultados:

Matrices de Orden 3. El punto (λ, μ) es interior al polígono plano cuyos vértices son (ρ, ρ), $(-\rho, \rho)$, $(-\rho, 0)$, $(0, -\rho)$ y $(\rho, -\rho)$ si y solo si $\{\rho, \lambda, \mu\}$ es realizable por una matriz estocástica generalizada positiva y diagonalizable.

Matrices de orden 4. El punto (λ, μ, ν) es interior al poliedro cuyos vértices son (ρ, ρ, ρ), $(-\rho, \rho, \rho)$, $(-\rho, -\rho, \rho)$, $(\rho, -\rho, \rho)$, $(\rho, -\rho, -\rho)$, $(\rho, \rho, -\rho)$ y $(-\rho, \rho, -\rho)$ si y solo si $\{\rho, \lambda, \mu, \nu\}$ es realizable por una matriz estocástica generalizada positiva y diagonalizable. Este poliedro es análogo al del caso anterior, pero su interior está formado por todos los puntos (λ, μ, ν), donde $|\lambda|, |\mu|, |\nu| < \rho$, tal que $\rho + \lambda + \mu + \nu > 0$.

En el método utilizado por Hazel Perfect para matrices de órdenes 3 y 4 se produce una matriz para la cual la transformación por $\operatorname{diag}(\rho, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, para $n = 3, 4$, es una matriz positiva. Por ejemplo, si consideramos

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y $\rho > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 0$, la matriz

$$P\mathrm{diag}(\rho, \lambda_2, \lambda_3)P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \rho + \lambda_2 + 2\lambda_3 & \rho + \lambda_2 - 2\lambda_3 & 2(\rho - \lambda_2) \\ \rho + \lambda_2 - 2\lambda_3 & \rho + \lambda_2 + 2\lambda_3 & 2(\rho - \lambda_2) \\ \rho - \lambda_2 & \rho - \lambda_2 & 2(\rho + \lambda_2) \end{pmatrix}$$

es positiva. El siguiente teorema generaliza este ejemplo.

Teorema 3.4. *Sean*

$$\rho = \lambda_0 > \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$$

y P la matriz de orden $n+1$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \iddots & -1 \\ \vdots & & \iddots & \iddots & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces, la matriz $A = P\mathrm{diag}(\lambda_0 = \rho, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^{-1} \in EG_\rho$ *es positiva diagonalizable.*

Demostración. Ver [3] □

Teorema 3.5. *Sean*

$$\rho = \lambda_0 > \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$$

y P *la matriz de orden* $n+1$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \iddots & -1 \\ \vdots & & \iddots & \iddots & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces, la matriz $A = P\mathrm{diag}(\lambda_0 = \rho, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^{-1} \in EG_\rho$ *es positiva diagonalizable.*

Demostración. Ver [3] □

4. Espectros Reales Realizables

Los siguientes resultados, son aplicaciones del teorema de Brauer, que determinan ciertas condiciones suficientes para que la familia de números reales $\{\lambda_0 = \rho, \lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$, donde $|\lambda_i| \leq \rho$ para $i = 1, \cdots, n$, sea realizable. Ver las demostraciones respectivas en [3].

Teorema 4.1 (Perfect 1953). *Para que la familia $\sigma = \{\lambda_0 = \rho, \lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ de números reales, donde $|\lambda_i| \leq \rho$, para $i = 1, \ldots, n$, sea realizable es suficiente que exista una partición de σ, $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \cdots \cup \sigma_m$, tal que cada σ_k contenga al menos un número positivo y que la suma de los módulos de los números negativos en σ_k (si existe alguno) sea menor o igual que el mayor número positivo de σ_k.*

Si σ verifica las hipótesis del teorema anterior, entonces σ es realizable por una matriz estocástica generalizada. Sin perdida de generalidad, podemos suponer que $\rho \in \sigma_1$. Utilizando las notaciones de la demostración anterior, basta considerar la matriz

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ A_{21} & A_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ A_{m1} & 0 & \ldots & 0 & A_m \end{pmatrix}$$

donde

$$A_{k1} = \begin{pmatrix} \rho - \rho_k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho - \rho_k & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}; \quad k = 2, \cdots, m.$$

Otra aplicación sencilla del teorema de Brauer conduce a la consecuencia de que si $\{1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ es el espectro de una matriz estocástica A, entonces $\{1, c\lambda_1, \ldots, c\lambda_n\}$, es el espectro de una matriz estocástica

A_c con $0 < c < 1$. Para ello basta tomar

$$A_c = \frac{1}{1 + \sum_{r=1}^{n+1} k_r} \left(A + \sum_{r=1}^{n+1} k_r X_r \right),$$

donde X_r es la matriz de orden $n+1$ cuya r-ésima columna es $(1, \ldots, 1)$ y sus demás elementos son todos ceros y k_r son números positivos tal que $1/(1+\sum_{r=1}^{n+1} k_r) = c$. Teniendo esto en mente, es fácil afirmar teoremas análogos al teorema 4.1 para matrices estocásticas positivas. En particular, los resultados de Suleimanova son una consecuencia de la teoría anterior.

El siguiente resultado es un método de construcción, sugerido por la extensión del teorema de Brauer, de una matriz no negativa con espectro prescrito.

Teorema 4.2 (Perfect 1955). *Si la familia de números reales*

$$\{\lambda_0 = \rho, \lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$$

es realizable por una matriz no negativa de orden $r+1$ con elementos en la diagonal $x_1, \cdots, x_{r+1}$, entonces $\{\rho, \lambda_1, \cdots, \lambda_r, \mu_1, \cdots, \mu_s\}$, con $-\rho \leq \mu_i \leq 0$, $r + s = n$, es realizable por una matriz no negativa de orden $n+1$, si existe una partición de los μ_i en $r+1$ partes, (algunas o todas pueden ser vacías) de modo que la suma de los elementos de cada parte es menor o igual que $x_1, \cdots, x_{r+1}$, respectivamente.

En la demostración del teorema anterior (ver [3]) se observa que si A es estocástica generalizada, entonces $B + XC$ también es estocástica generalizada.

Corolario 4.3. *La familia $\{\rho, \lambda_1, \cdots, \lambda_r, \mu_1, \cdots, \mu_s\}$, donde $0 \leq \lambda_i \leq \rho$, $-\rho \leq \mu_i \leq 0$, $r + s = n - 1$, es realizable por una matriz no negativa* *de orden n, si existe una partición de los μ_i en $r+1$ partes (alguna o todas pueden ser vacías), con la suma de los módulos de sus elementos menor o igual que $x_1, \cdots, x_{r+1}$, respectivamente, donde $x_1, \cdots, x_{r+1}$ son los elementos de la diagonal de una matriz no negativa con espectro $\{\rho, \lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$.*

Con la finalidad de hacer uso del teorema 4.2 y del corolario 4.3 es necesario conocer bajo qué condiciones los números $x_1, \cdots, x_r$ son posibles elementos de la diagonal de una matriz no negativa con espectro $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r\}$. Para $r = 2$, es fácil verificar que es necesario y suficiente que $0 \leq x_i \leq \lambda_1$; para $i = 1, 2$, y $x_1 + x_2 = \lambda_1 + \lambda_2$. La solución al problema en el caso $r = 3$ está contenida en el siguiente resultado debido a Perfect.

Teorema 4.4 (Perfect 1955)**.** *Sea $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} \subset \mathbb{R}$ con $\lambda_1 \geq |\lambda_j|$, para $j = 1, 2$. Los números x_1, x_2 y x_3 son los elementos de la diagonal de una matriz estocástica generalizada con espectro $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ si y sólo si se verifican las siguientes condiciones*

1. $0 \leq x_i \leq \lambda_1$, *para* $i = 1, 2, 3$.

2. $x_1 + x_2 + x_3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$.

3. $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \geq \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$.

4. $\max_i x_i \geq \lambda_2$.

Además, si $\lambda_1 \neq x_3$, una matriz verificando lo anterior es

$$P = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \lambda_1 - x_1 \\ \lambda_1 - x_2 - p & x_2 & p \\ 0 & \lambda_1 - x_3 & x_3 \end{pmatrix},$$

donde

$$p = \frac{1}{(\lambda_1 - x_3)}\big(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - \lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3 - \lambda_2\lambda_3\big).$$

Notemos que si $\lambda_1 = x_3$, *basta realizar* $\{\lambda_2, \lambda_3\}$ *con diagonal* x_1, x_2.

Para r general, es suficiente que:

1. $0 \leq x_i \leq \lambda_1$, para $i = 1, 2, \cdots, r$.
2. $x_1 + \cdots + x_r = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_r$,
3. $x_i \geq \lambda_i$ y $x_1 \geq \lambda_i$, para $i = 2, \cdots, r$.

Entonces obtenemos la siguiente matriz no negativa P, estocástica generalizada con suma de filas λ_1, espectro $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r\}$ y elementos en su diagonal $x_1, x_2, \cdots, x_r$

$$P = \begin{pmatrix} x_r & x_1 - \lambda_2 & x_2 - \lambda_3 & \cdots & x_{r-1} - \lambda_r \\ x_r - \lambda_2 & x_1 & x_2 - \lambda_3 & \cdots & x_{r-1} - \lambda_r \\ x_r - \lambda_3 & x_1 - \lambda_2 & x_2 & \cdots & x_{r-1} - \lambda_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_r - \lambda_r & x_1 - \lambda_2 & x_2 - \lambda_3 & \cdots & x_{r-1} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.5. *Aplicaremos el método de construcción sugerido en el teorema 4.2 para obtener una matriz estocástica* 6×6 *con espectro*

$$\sigma = \big\{1, 2/3, 1/3, -1/2, -5/9, -8/9\big\}.$$

Observemos que σ *no admite partición,* $\sigma = \cup\sigma_k$, *tal que la suma de los módulos de los elementos negativos de cada* σ_k *sea menor o igual que el mayor número positivo en* σ_k, *es decir, no satisface las condiciones del teorema 4.1.*
Para buscar una matriz estocástica P *con espectro* $\big\{1, \lambda_2 = 2/3, \lambda_3 =$

$1/3\}$, *Perfect sugiere tomar* $x_1 = 8/9$, $x_2 = 11/18$, $x_3 = 1/2$ *que verifican las cuatro condiciones del teorema 4.4.*

Ahora

$$p = \frac{1}{(\lambda_1 - x_3)}\big(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - \lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3 - \lambda_2\lambda_3\big) = \frac{23}{123}$$

y por lo tanto,

$$P = \begin{pmatrix} 8/9 & 0 & 1/9 \\ 20/81 & 11/18 & 23/162 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Consideremos la partición de $\{-1/2, -5/9, -8/9\}$ *siguiente*

$$\{-8/9\} \cup \{-5/9\} \cup \{-1/2\}.$$

Tenemos

$$A_1 = \begin{pmatrix} 8/9 & 0 \\ 16/9 & -8/9 \end{pmatrix} \Rightarrow B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 8/9 \\ 8/9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 11/18 & 0 \\ 21/18 & -5/9 \end{pmatrix} \Rightarrow B_2 = \begin{pmatrix} 1/18 & 5/9 \\ 11/18 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\Omega = \begin{pmatrix} 8/9 & 0 & 0 \\ 0 & 11/18 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & c_{12} & 0 & c_{13} & 0 \\ c_{21} & 0 & c_{22} & 0 & c_{23} & 0 \\ c_{31} & 0 & c_{32} & 0 & c_{33} & 0 \end{pmatrix}.$$

Por el teorema 4.4, P es estocástica con diagonal x_1, x_2, x_3 *y espectro* $\{1, \lambda_2, \lambda_3\}$*. Además, siguiendo la prueba del teorema 4.2 tenemos*

$$CX = P - \Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/9 \\ 20/81 & 0 & 23/162 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} XC &= \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & c_{12} & 0 & c_{13} & 0 \\ c_{11} & 0 & c_{12} & 0 & c_{13} & 0 \\ c_{21} & 0 & c_{22} & 0 & c_{23} & 0 \\ c_{21} & 0 & c_{22} & 0 & c_{23} & 0 \\ c_{31} & 0 & c_{32} & 0 & c_{33} & 0 \\ c_{31} & 0 & c_{32} & 0 & c_{33} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/9 & 0 \\ 20/81 & 0 & 0 & 0 & 23/162 & 0 \\ 20/81 & 0 & 0 & 0 & 23/162 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego por el teorema de Rado, la matriz

$$B + XC = \begin{pmatrix} 0 & 8/9 & 0 & 0 & 1/9 & 0 \\ 8/9 & 0 & 0 & 0 & 1/9 & 0 \\ 20/81 & 0 & 1/18 & 5/9 & 23/162 & 0 \\ 20/81 & 0 & 11/18 & 0 & 23/162 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

es estocástica y tiene espectro

$$\sigma = \big\{1, 2/3, 1/3, -1/2, -5/9, -8/9\big\}.$$

Teorema 4.6 (Soto 2003 [8]). *Sea la familia de números reales* $\sigma = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ *con* $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$, *para* $i = 1, \cdots, n-1$. *Si*

$$\lambda_1 \geq -\lambda_n - \sum_{S_k<0} S_k, \tag{4.1}$$

donde $S_k = \lambda_k + \lambda_{n-k+1}$, *para* $k = 2, 3, \cdots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ *y* $S_{\frac{n+1}{2}} = \text{mín}\{\lambda_{\frac{n+1}{2}}, 0\}$ *para* n *impar, entonces* σ *es realizable por una matriz estocástica generalizada* A *con suma de filas* λ_1.

Demostración. Ver [3]. □

Ejemplo 4.7. *Consideremos la siguiente familia de números reales:*

$$\sigma = \{14, 4, 2, -1, -2, -3, -6, -8\}.$$

Tenemos

$$\begin{aligned} S_2 &= -2 \\ S_3 &= -1 \\ S_4 &= -3. \end{aligned}$$

Observemos que σ *satisface la condición del teorema 4.6:*

$$\lambda_1 = 14 \geq -\lambda_n - \sum_{S_k<0} S_k = 8 + 6,$$

por lo tanto σ es realizable. Siguiendo la demostración del teorema anterior (Ver [3]) se obtiene

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} + eq^t,$$

donde

$$q^t = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Luego σ es realizable por la matriz no negativa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 8 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si definimos $T(\sigma) = \lambda_1 + \lambda_n + \sum_{S_j<0} S_j$, entonces la condición (4.1) es equivalente a $T(\sigma) \geq 0$. Si $\sigma = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ satisface (4.1), entonces

$$\sigma' = \{-\lambda_n - \sum_{S_j<0} S_j, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$$

es realizable y el número $-\lambda_n - \sum_{S_j<0} S_j$ es el mínimo valor que λ_1 puede tomar para que σ sea realizable según el teorema 4.6.

Supongamos que $\sigma = \cup_{k=1}^{s} \sigma_k$, entonces de acuerdo al teorema 4.6, para cada $\sigma_k = \{\lambda_1^k \geq \lambda_2^k \geq \cdots \geq \lambda_{n_k}^k\}$ tenemos el número

$$T(\sigma_k) = T_k = \lambda_1^k + \lambda_{n_k}^k + \sum_{S_j^k < 0} S_j^k.$$

Claramente, si $T_k \geq 0$, entonces σ_k es realizable, en caso contrario $T_k < 0$ y entonces σ_k no es realizable por el teorema 4.6.

El siguiente resultado es una extensión del teorema 4.6. Aquí demostraremos que bajo ciertas condiciones, la familia σ puede ser particionada como $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \cdots \cup \sigma_t$, con σ_k "realizable" por una matriz A_k, **no necesariamente no negativa**, y que sin embargo nos permitirá obtener una matriz no negativa A con espectro σ. Consideraremos solo el caso en el cual al menos $\lambda_n < 0$, puesto que si $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \lambda_n \geq 0$ entonces el problema estaría resuelto por $A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.

Teorema 4.8 (Soto 2003 [8]). *Sea $\sigma = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}$ con $\lambda_1 \geq \lambda_j$, para $j = 2, \cdots, n$. Sea la partición $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \cdots \cup \sigma_t$ con*

$$\sigma_k = \{\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_{n_k}^k\}, \quad k = 1, 2, \cdots, t, \ \ \lambda_1^1 = \lambda_1$$

$$\lambda_1^k \geq 0, \ \ \lambda_1^k \geq \lambda_2^k \geq \cdots \geq \lambda_{n_k}^k; \ \ k = 1, 2, \cdots, t.$$

Definimos

$$S_j^k = \lambda_j^k + \lambda_{n_k - j + 1}^k; \ \ j = 2, 3, \cdots, \left\lfloor \frac{n_k}{2} \right\rfloor \tag{4.2}$$

y si n_k es impar

$$S_{\frac{n_k+1}{2}}^k = \text{mín}\{\lambda_{\frac{n_k+1}{2}}, 0\}; \ \ k = 1, 2, \cdots, t,$$

$$T_k = \lambda_1^k + \lambda_{n_k}^k + \sum_{S_j^k < 0} S_j^k; \ \ k = 1, 2, \cdots, t \tag{4.3}$$

y

$$\lambda_M = \text{máx}\Big\{ -\lambda_{n_1}^1 - \sum_{S_j^1 < 0} S_j^1 \ , \ \max_{2 \leq k \leq t} \{\lambda_1^k\} \Big\}. \tag{4.4}$$

Si

$$\lambda_1 \geq \lambda_M - \sum_{T_k<0,k=2}^{t} T_k, \tag{4.5}$$

entonces σ es realizable por una matriz estocástica generalizada con suma de filas igual λ_1.

Demostración. Ver [3] □

Observemos que si σ verifica el teorema anterior para una cierta partición, entonces el elemento de la partición que contiene al mayor autovalor, σ_1, debe ser realizable por el teorema 4.6. En efecto,

$$\lambda_1 \geq \lambda_M - \sum_{T_k<0,\ k=2}^{t} T_k \geq \lambda_M \geq -\lambda_{n_1} - \sum_{S_j^1<0} S_j^1.$$

Ejemplo 4.9. *Consideremos la familia de números reales*

$$\sigma = \{8, 6, 3, 3, -5, -5, -5, -5\}.$$

Observemos que σ no verifica el teorema 4.6, pues

$$S_2 = 6 - 5 = 1,\ S_3 = 3 - 5 = -2,\ S_4 = 3 - 5 = -2$$

y por lo tanto

$$\lambda_1 = 8 \ngeq -\lambda_n - \sum_{S_k<0} S_k = 5 + 4 = 9.$$

La partición $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 = \{8, 3, -5, -5\} \cup \{6, 3, -5, -5\}$ satisface las condiciones del teorema 4.8, pues

$$S_2^1 = -2,\ \ S_2^2 = -2,\ \ T_1 = 8-5-2 = 1,\ \ T_2 = 6-5-2 = -1,\ \ \lambda_M = 7,$$

verifican

$$\lambda_1 = 8 \geq \lambda_M - \sum_{T_k<0;k=2}^{t} T_k = 7 + 1 = 8.$$

Por lo tanto, podemos construir, de acuerdo con la demostración del teorema 4.8, una matriz no negativa que realiza σ: Como $T_2 < 0$, para σ_2 se tiene la matriz

$$B_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 5 & -2 \end{array}\right)$$

con espectro $\{0, 3, -5, -5\}$. *Luego para* $q_2 = (0, 5, 0, 1)^t$,

$$A_1 = B_2 + eq_2^t = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

es una matriz que realiza σ_2.

Para σ_1, *se tiene la matriz*

$$B_1 = B_2$$

con espectro $\{0, 3, -5, -5\}$. *Luego para* $q_1 = (0, 5, 0, 2)^t$,

$$A_2 = B_2 + eq_1^t = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

es una matriz no negativa con espectro $\{\lambda_M, 3, -5, -5\}$.

Ahora definimos la matriz inicial

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_{21} & A_2 \end{pmatrix},$$

donde

$$A_{21}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Y para $q=(0,0,0,0,0,0,0,1)^t$, *la matriz*

$$A=\begin{pmatrix} A_2 & 0\\ A_{21} & A_2 \end{pmatrix}+eq^t=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 5 & 5 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

es una matriz no negativa que realiza σ.

Si consideramos la partición

$$\sigma=\{8,6,-5,-5\}\cup\{3,3,-5,-5\}$$

se tiene

$$S_2^1=1,\quad S_2^2=-2$$

$$T_1=3,\quad T_2=-4$$

$$\lambda_M=5.$$

Observamos que

$$8=\lambda_1\ngeq\lambda_M-\sum_{T_k<0,k=2}T_k=9.$$

Por tanto, esta partición no satisface la condición (4.5) del teorema 4.8.

A continuación probamos una extensión del teorema 4.2 que da un nuevo criterio de realizabilidad para espectros reales.

Teorema 4.10 (Soto - Rojo 2006 [10]). *Sea* $\sigma = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}$, *con* $\lambda_1 \geq \lambda_j$, *para* $j = 1, \cdots, n$. *Supongamos que existe una partición* $\sigma = \cup_{k=1}^{t} \sigma_k$, *con*

$$\sigma_k = \{\lambda_1^k \geq \cdots \geq \lambda_{n_k}^k\},\ \lambda_1^k \geq 0;\ \ k = 1, \cdots, t$$

y $\lambda_1^1 = \lambda_1$, *tal que* $x_1, \cdots, x_t$ *y* $\lambda_1, \lambda_2^1, \cdots, \lambda_t^1$ *son los elementos de la diagonal y los autovalores, respectivamente, de una matriz no negativa* B *con suma de filas igual a* λ_1. *Si* $x_k \geq \lambda_2^k$ *y* $\Gamma_k = \{x_k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_{n_k}^k\}$ *es realizable, para* $k = 1, \cdots, t$, *entonces* σ *es realizable por una matriz* M *con suma de filas igual a* λ_1.

Demostración. Sea A_k una matriz no negativa con espectro Γ_k y con suma de filas igual a x_k. Entonces

$$A = diag(A_1, A_2, \cdots, A_t)$$

es una matriz diagonal por bloques no negativa de orden n. Sea

$$\Omega = diag(x_1, x_2, \cdots, x_t)$$

y $X = \big(X_1 \mid X_2 \mid \cdots \mid X_t\big)$ como en la demostración del teorema 4.2. Claramente X es de rango t y $AX = X\Omega$.

Sea $C = (C_1 \mid C_2 \mid \cdots \mid C_t)$, donde C_k es la matriz de orden $r \times n_k$ con primeras columnas $(c_{1k}, c_{2k}, \cdots, c_{tk})^t$ y el resto de sus entradas igual a cero. Entonces

$$CX = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1t} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{t1} & c_{t2} & \cdots & c_{tt} \end{pmatrix} \ \text{y} \ XC = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1t} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{t1} & C_{t2} & \cdots & C_{tt} \end{pmatrix},$$

donde C_{ik} es la matriz de orden $n_i \times n_k$ con primera columna $(c_{ik}, c_{ik}, \cdots, c_{ik})^t$ y el resto de sus entradas todas cero.

Ahora, escogemos C con $c_{11} = c_{22} = \cdots = c_{tt} = 0$ tal que la matriz $\Omega + CX = B$ es una matriz con suma de filas igual a λ_1. Entonces, para esta elección de C, por el teorema de Rado, concluimos que $M = A+CX$ es una matriz que realiza σ con suma de filas igual a λ_1. $\square$

Ejemplo 4.11. *Sea la familia de números reales*

$$\sigma = \left\{ \frac{805}{100}, 6, \frac{205}{100}, 2, -4, -\frac{41}{10}, -5, -5 \right\}.$$

Consideramos la partición

$$\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 = \left\{ \frac{805}{100}, \frac{205}{100}, -5, -5 \right\} \cup \left\{ 6, 2, -4, -\frac{41}{10} \right\}.$$

Observemos que esta partición de σ no verifica el teorema 4.2 y veamos que verifica el teorema 4.10.

Definimos las familias

$$\Gamma_1 = \left\{ \frac{795}{100}, \frac{205}{100}, -5, -5 \right\} \text{ y}$$

$$\Gamma_2 = \left\{ \frac{61}{10}, 2, -4, -\frac{41}{10} \right\}$$

con $x_1 = 795/100$ y $x_2 = 61/10$.

Γ_1 y Γ_2 satisfacen las condiciones del teorema 4.6. Por tanto, Γ_1 y Γ_2 son realizables por una matriz estocástica generalizada con suma de filas igual a x_1 y x_2, respectivamente. Construimos las matrices realizadoras respectivas siguiendo la prueba del teorema 4.6 (ver [3]).

Para Γ_1

$$B_1 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -205/100 & 0 & 205/100 \\ 0 & -205/100 & 5 & -295/100 \end{array}\right), \quad q_1 = \big(0, 5, 0, 295/100\big)^t$$

$$\Rightarrow A_1 = B_1 + eq_1^t = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & \frac{295}{100} \\ 5 & 0 & 0 & \frac{295}{100} \\ 0 & \frac{295}{100} & 0 & 5 \\ 0 & \frac{295}{100} & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

es la matriz realizadora.

Para Γ_2

$$B_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 41/10 & -41/10 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \end{array}\right), \quad q_2 = \big(0, 41/10, 0, 2\big)^t$$

$$\Rightarrow A_2 = B_2 + eq_2^t = \begin{pmatrix} 0 & \frac{41}{10} & 0 & 2 \\ \frac{41}{10} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{21}{10} & 0 & 4 \\ 0 & \frac{21}{10} & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

es la matriz realizadora.

Observemos que $0 \leq x_i \leq \lambda_1^1 = 805/100$, para $i = 1, 2$ y $x_1 + x_2 = \lambda_1^1 + \lambda_2^2 = 805/100 + 6$, entonces existe una matriz no negativa P, con suma de filas $\lambda_1^1 = 802/100$, espectro $\{805/100, 6\}$ y con elementos en la diagonal x_1 y x_2:

$$P = \begin{pmatrix} 795/100 & 1/10 \\ 195/100 & 61/10 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$A = A_1 \oplus A_2, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Omega + CX = P = \begin{pmatrix} \frac{759}{100} & \frac{1}{10} \\ & \\ \frac{195}{100} & \frac{61}{10} \end{pmatrix},$$

de donde

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{195}{100} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$A{+}XC = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 295/100 & 1/10 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 295/100 & 1/10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 295/100 & 0 & 5 & 1/10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 295/100 & 5 & 0 & 1/10 & 0 & 0 & 0 \\ 195/100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 41/10 & 0 & 2 \\ 195/100 & 0 & 0 & 0 & 41/10 & 0 & 0 & 2 \\ 195/100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21/10 & 0 & 4 \\ 195/100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21/10 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

es una matriz estocástica generalizada con espectro σ y suma de filas igual a 805/100.

Fiedler, en [2] muestra como realizar simétricamente ciertos espectros reales manipulando la unión de dos espectros reales simétricamente realizables. El teorema 2.5 nos dice, que podemos aumentar tanto como queramos el radio espectral sin perder la propiedad de realizabilidad. Este resultado sigue siendo verdad en el caso simétrico (ver prueba en [3]). Los resultados anteriores, debido a R. Soto se pueden adaptar para el caso simétrico (ver [9] y [11]). Para más detalles del problema espectral inverso en el caso simétrico ver [3].

Referencias

[1] Berman, A. and Plemmons, R.J.: *"Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences"*, Academic Press New York (1979).

[2] Fiedler, M.:"Eigenvalues of nonnegative symmetric metrices", Linear Algebra Appl. 9 (1974) 119-142.

[3] Neciosup Puican, H.: *"Aplicaciones del teorema de Brauer al Problema espectral inverso no negativo"*, Mg. Tesis, Universidad de Valladolid-España (2011)

[4] Johnson, C.: *"Row stochastic matrices similar to doubly stochastic matrices"*, Linear Multilinear Algebra 10 (1981) 113-130.

[5] Perfect, H.: *"On positive stochastis matrices with real characteristic root"*, Proceedings of the Cambrindge Philosophical Society, 48 (1951) 271-276.

[6] Perfect, H.: *"Methods of constructing certain stochastic matrices I"*, Duke Math. J. 20 (1953) 395-404.

[7] Perfect, H.: *"Methods of constructing certain stochastic matrices II"*, Duke Math. J. 22 (1955) 305-311.

[8] Soto, R. L.: *"Existence and construcction of nonnegative matrices with prescribed spectrum"*, Linear Algebra and its Aplications 369 (2003) 169-184.

[9] Soto, R. L.: *"Realizability by symmetric nonnegative matrices"*, Proyecciones J. Math. 24 (2005) 65-78.

[10] Soto, R. L.: *"Realizability criterion for the symmetric nonnegative inverse eigenvalue problem"*, Linear Algebra and its Aplications 416 (2006) 783-794

[11] Soto, R. L., Rojo, O. and Borobia, A.: *"Symetric nonnegative realization of spectra"*, Electronic Journal of Linear Algebra ISSN 1081-3810 A publication of the International Linear Algebra Society Volumen 16, Jannuary (2007)1-18.

[12] Suleimanova, H.R.: "Stocastic matrices with real characteristic roots", Docklady Akademii Nauk SSSR, 66 (1949) v343-345.

Abstract

Brauer's theorem (1952) describes a procedure to modify a spectrum's eigenvalue from a complex matrix and Rado extends it to modify a specific section of the spectrum. Later, in the 50's Perfect makes use of these results to give the conditions in which some collection of real numbers are the spectrum of a non negative matrix [6], [7]. Suleimanova iniciated the work [12] in which, along with these conditions, the inverse spectral problem was first studied. Recently some sufficient conditions have been described, all of them are based on Brauer's and Rado's theorems for realizing matrixes of non negative real spectrum, a few of them are nonnegative symmetrical matrixes. In this paper, these techniques are related in depth and a recompilation of known results is made for both, the non negative real spectrum problem and the non negative symmetrical inverse problem which makes use of Brauer's theorem.

Keywords: Inverse spectral problem.

Hernán Neciosup Puican
Universidad de Valladolid, España
hneciosup@agt.uva.es