PROBLEMA DE CAUCHY PARA UN SISTEMA DE LA JERARQUÍA AKNS

***Aldo Mendoza Uribe*[1] *y Juan Montealegre Scott*[2]**

Mayo, 2011

Resumen

El objetivo en este trabajo es el estudio de ciertas propiedades de las soluciones reales de un problema de valor inicial de la forma

$$\begin{cases} \partial_t u - iP_1(D)\,u + f_1(u,v)\,\partial_x u + f_2(u,v)\,\partial_x v = 0 \\ \partial_t g - iP_2(D)\,v + f_2(u,v)\,\partial_x u + f_3(u,v)\,\partial_x u = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ v(x,0) = \psi(x)\,, \end{cases}$$

en donde $u = u(x,t)$ *y* $v = v(x,t)$ *son funciones con valores reales,* $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[$, $P_k(D)$ *con* $k = 1,2$ *son operadores pseudo-diferenciales y* f_j *con* $j = 1,2,3$ *son funciones reales definidas sobre* $\mathbb{R}^2$*. Con mayor precisión, considerado el caso en el que los operadores* $P_k(D)$ *con* $k = 1,2$ *son definidos por* $\widehat{P_k(D)\,u}(\xi) = (-1)^{k+1}\left(\xi^3 + \frac{1}{\xi}\right)\widehat{u}(\xi)$, $f_1(u,v) = 3u^2 - v^2$, $f_2(u,v) = -2uv$ *y* $f_3(u,v) = -u^2 + 3v^2$*, es demostrado que el problema de valor inicial que se obtiene es localmente bien formulado en los espacios de Sobolev* $X^s \times X^s$ *con* $s > 3/2$*, usando regularización parabólica para probar la existencia local y unicidad, y las llamadas aproximaciones de Bona-Smith para mostrar la dependencia continua de la solución respecto al dato inicial.*

[1] *Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias, UNALM.*

[2] *Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias, PUCP.*

Además, usando una propiedad dispersiva del grupo asociado con el problema lineal y las ideas desarrolladas por Kenig-Ponce-Vega, son probadas las propiedades suavizantes del tipo Strichartz.

MSC(2010): 35A07, 35Q53

Palabras clave: *Regularización parabólica; estimados de Bona-Smith; ecuación de Ostrovsky; efecto suavizante local*

1. Introducción

El objetivo en este trabajo es el estudio de ciertas propiedades de las soluciones reales de un problema de valor inicial de la forma

$$\begin{cases} \partial_t u - iP_1(D)\,u + f_1(u,v)\,\partial_x u + f_2(u,v)\,\partial_x v = 0 \\ \partial_t v - iP_2(D)\,v + f_2(u,v)\,\partial_x u + f_3(u,v)\,\partial_x u = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ v(x,0) = \psi(x), \end{cases} \tag{1.1}$$

en donde $u = u(x,t)$ y $v = v(x,t)$ son funciones con valores reales, $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,+\infty[$, $P_k(D)$ con $k = 1,2$ son operadores pseudo-diferenciales y f_j con $j = 1,2,3$ son funciones reales definidas sobre $\mathbb{R}^2$.

Observemos que el tercer sistema de la jerarquía AKNS [1] y [2] se encuadra como caso particular del sistema en (1.1). Los sistemas de la jerarquía AKNS pueden ser resueltos por el método del scattering inverso para datos iniciales que decaen rápidamente en el infinito.

El problema de valor inicial que se obtiene de (1.1) considerando $\widehat{P_1(\xi)\,u}(\xi) = \widehat{P_2(D)\,u}(\xi) = \xi^3\widehat{u}(\xi)$, $f_1(u,v) = uv^2$, $f_2(u,v) = 0$ y $f_3(u,v) = u^2v$, es decir,

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \partial_x\left(uv^2\right) = 0 \\ \partial_t v + \partial_x^3 v + \partial_x\left(u^2v\right) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ v(x,0) = \psi(x), \end{cases}$$

fue estudiado en [3] usando la teoría cuasi-lineal de Kato [9], consiguiendo demostrar la buena formulación local cuando los datos iniciales φ y ψ pertenecen a los espacios de Sobolev H^s con $s > 3/2$. Por otro lado, Panthee [16] usó el método de los estimados lineales de Kenig-Ponce-Vega para probar la buena formulación local del mismo problema con datos iniciales en los espacios H^s con $s > 1/4$.

En este trabajo consideramos el caso en el que los operadores $P_k(D)$ con $k = 1, 2$ son definidos por $\widehat{P_k(D)\, u}(\xi) = (-1)^{k+1}\left(\xi^3 + \frac{1}{\xi}\right)\widehat{u}(\xi)$, $f_1(u,v) = 3u^2 - v^2$, $f_2(u,v) = -2uv$ y $f_3(u,v) = -u^2 + 3v^2$, de modo que el problema de valor inicial a ser estudiado tiene la forma

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \partial_x^{-1} u + \partial_x\left(u^3 - uv^2\right) = 0, \\ \partial_t v - \partial_x^3 v - \partial_x^{-1} v - \partial_x\left(u^2 v - v^3\right) = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ v(x,0) = \psi(x). \end{cases} \tag{1.2}$$

Nuestros objetivos son obtener en los espacios adecuados, un resultado de buena formulación local similar al de [3] para el problema (1.2) y las propiedades regularizantes del tipo Strichartz, presentes en el grupo asociado con el problema lineal

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \partial_x^{-1} u = 0 \\ \partial_t v - \partial_x^3 v - \partial_x^{-1} v = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ v(x,0) = \psi(x). \end{cases}$$

Los espacios adecuados para nuestro estudio son los espacios de Sobolev X^s de orden $s \in \mathbb{R}$ definidos por Saut en [17] como los conjuntos de funciones $u \in H^s$ tales que $\partial_x^{-1} u \in H^s$ con las normas $\|u\|_{X^s} = \left(\int_{\mathbb{R}} \langle\xi\rangle^s \lambda^2(\xi)\, |\widehat{u}(\xi)|^2\, d\xi\right)^{1/2}$ donde $\lambda(\xi) = \left(1 + \frac{1}{\xi^2}\right)^{1/2}$. Entonces, para demostrar la buena formulación local en los espacios de Sobolev $X^s \times X^s$ con $s > 3/2$, usamos regularización parabólica [7, 8] para probar la existencia local y la unicidad, y para mostrar la dependencia continua de la solución respecto al dato inicial emplearemos las llamadas aproximaciones de Bona-Smith [5]. La ventaja de usar regularización parabólica consiste en la posibilidad de probar que el intervalo de existencia de las soluciones locales puede ser asumido independiente de s en un sentido apropiado. Por otro lado, la teoría cuasi lineal de Kato da la dependencia continua respecto al dato inicial sin ningún esfuerzo adicional.

Antes del desarrollo de la exposición, presentamos sin demostración algunos resultados necesarios.

Teorema 1.1. *Sean $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ reales, $s > 1 + \frac{n}{2}$ y $t \geq 1$. Entonces existe $C = C(s, t, n) > 0$ tal que*

$$|\langle u, v\partial^\alpha u\rangle_t| \leq C\left[\|\nabla v\|_{s-1}\left\|u^2\right\|_t + \|\nabla v\|_{t-1}\|u\|_s\|u\|_t\right] \tag{1.3}$$

donde $|\alpha| = 1$.

Teorema 1.2. *Si $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $s > 0$ y $1 < p < \infty$, entonces*

$$\|J^s(uv)\|_{L^p} \leq C\left(\|u\|_{L^{p_1}}\|J^s v\|_{L^{p_2}} + \|J^s u\|_{L^{p_3}}\|v\|_{L^{p_4}}\right) \tag{1.4}$$

y

$$\|[J^s; u]\, v\|_{L^p} \leq C\left(\|\nabla u\|_{L^{p_1}}\left\|J^{s-1}v\right\|_{L^{p_2}} + \|J^s u\|_{L^{p_3}}\|v\|_{L^{p_4}}\right) \tag{1.5}$$

donde $p_2, p_3 \in \,]1, \infty[$ y p_1, p_4 son tales que $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p} = \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4}$.

La desigualdad (1.5) también se cumple si $p_1 = p_4 = \infty$ y $p_2 = p_3 = p$.

La siguiente desigualdad, llamada de Gagliardo-Nirenberg

Proposición 1.3. *Sean $1 \leq p, q, r \leq \infty$ y sean j, m dos enteros, $0 \leq j < m$. Si $\frac{1}{p} - \frac{j}{n} = \theta\left(\frac{1}{q} - \frac{m}{n}\right) + \frac{1-\theta}{r}$ para algún $\theta \in \left[\frac{j}{m}, 1\right]$, entonces existe $C = C(m, j, \theta, p, q, r)$ tal que para toda $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ se cumple que*

$$\|\partial^\alpha u\|_{L^p} \leq C \sum_{|\beta|=m}\left\|\partial^\beta u\right\|_{L^q}^\theta \|u\|_{L^r}^{1-\theta}, \tag{1.6}$$

con $|\alpha| = j$.

Cuando $n = 1$ la desigualdad (1.6) es

$$\left\|\partial_x^j u\right\|_{L^p} \leq C \left\|\partial_x^m u\right\|_{L^q}^{\theta} \left\|u\right\|_{L^r}^{1-\theta} \tag{1.7}$$

con $\frac{1}{p} - j = \theta\left(\frac{1}{q} - m\right) + \frac{1-\theta}{r}$ y $\theta \in \left[\frac{j}{m}, 1\right]$.

Proposición 1.4 (Lema de Van der Corput)**.** *Sea* $f \in C^2\left([a,b]\right)$ *tal que* $f''\left(\xi\right) \neq 0$ *sobre el intervalo* $[a,b]$. *Entonces*

$$\left|\int_a^b e^{if(\xi)} d\xi\right| \leq 4\left(\min_{[a,b]} \left|f''\left(\xi\right)\right|\right)^{-1/2}.$$

Proposición 1.5. *Sea* $f \in C^j\left([a,b]\right)$ *para* $j \in \mathbb{N}$ *con* $\left|f^{(j)}\left(x\right)\right| \geq 1$. *Entonces,*

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda f(\xi)} d\xi\right| \leq C_j \left|\lambda\right|^{-1/j}$$

si $j \geq 2$ *o* $j = 1$ *si* f' *es monótona.*

Recordemos que si $0 < \beta < 1$, el **potencial de Riesz de orden** β, denotado por I_β, es definido como

$$I_\beta f\left(t\right) = C_\beta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f\left(\tau\right)}{\left|t-\tau\right|^{1-\beta}} d\tau$$

donde $C_\beta = \frac{\pi^{1/2} 2^\beta \Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{2}\right)}$.

Proposición 1.6 (Teorema de la Integral Fraccionaria)**.** *Si* $0 < \beta < 1$ *y* $1 < p < q < \infty$ *con* $\frac{1}{q} = \frac{1}{r} - \beta$, *entonces* I_β *es de tipo* (r,q), *es decir,*

$$\left\|I_\beta f\right\|_{L^q} \leq C_{r,\beta} \left\|f\right\|_{L^r}. \qquad \square$$

2. Teoría Local del Problema no Lineal Regularizado

Iniciamos nuestro estudio considerando el problema lineal asociado con (1.2), el cual tiene la forma vectorial

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u}\,(t) + A\vec{u}\,(t) = 0, & x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ \vec{u}\,(0) = \vec{\varphi} \end{cases} \tag{2.1}$$

siendo $\vec{u} = (u, v)$, $\vec{\varphi} = (\varphi, \psi)$ y A el operador definido por

$$\begin{cases} \mathcal{D}\,(A) = Y^{s+3},\ s \geq 0 \\ A\vec{u} = \left(\partial_x^3 u + \partial_x^{-1} u, -\partial_x^3 v - \partial_x^{-1} v\right), \ \ \vec{u} = (u, v) \in Y^{s+3}. \end{cases} \tag{2.2}$$

No es difícil demostrar la proposición siguiente.

Proposición 2.1. *Si $s \geq 0$ es un número real cualquiera, el operador lineal $A : Y^{s+3} \subseteq Y^s \to Y^s$ es disipativo maximal y antiadjunto en Y^s. En particular, A y $-A$ son operadores disipativos maximales en Y^s.*

Así obtenemos la siguiente caracterización de la solución del problema (2.1).

Teorema 2.2. *El operador $-A$ genera un semigrupo de contracciones $\{W\,(t)\}_{t\geq 0}$ sobre Y^s, $s \geq 0$, tal que*

$$W\,(t)\,\vec{u} = (W_1\,(t)\,u_1, W_2\,(t)\,u_2)\,, \tag{2.3}$$

para todo $\vec{u} = (u_1, u_2) \in Y^s$, en donde para $k = 1, 2$, los operadores $W_k\,(t)$ son los multiplicadores de Fourier definidos por

$$\widehat{W_k\,(t)\,v}\,(\xi) = e^{\phi_k(\xi)t}\widehat{v}\,(\xi) \quad \text{con } \phi_k\,(\xi) = (-1)^{k+1}\, i\left(\xi^3 + \frac{1}{\xi}\right).$$

Además, $\{W\,(t)\}_{t\geq 0}$ se extiende a un grupo de operadores unitarios en Y^s y cualquiera sea $\vec{\varphi} \in Y^{s+3}$ la función

$$W\,(\cdot)\,\vec{\varphi} : [0, +\infty[\, \to Y^s$$

es la única solución del problema de valor inicial (2.1).

Demostración. La primera afirmación es consecuencia de la proposición 2.1 y el Teorema de Hille-Yosida-Phillips [6, teorema 3.4.4]. Para demostrar (2.3), se toma la transformada de Fourier en la variable espacial a las ecuaciones y los datos iniciales del problema lineal (2.1), se resuelve el problema de valor inicial que resulta y se concluye por [6, teorema 3.1.1]. Finalmente, la proposición 2.1 y [6, teorema 3.2.3] implican a la última afirmación. □

El grupo $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ no tiene propiedades suavizantes que nos permitan probar que el problema (1.2) tiene solución, por ello, en esta sección demostraremos la buena formulación local en Y^s con $s > \frac{3}{2}$ del problema no lineal regularizado

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u}(t) + A_\mu \vec{u}(t) + \partial_x \vec{F}(\vec{u}(t)) = 0 \\ \vec{u}(0) = \vec{\varphi}, \end{cases} \tag{2.4}$$

donde $0 < \mu \ll 1$, $\vec{u} = (u, v)$, $\vec{\varphi} = (\varphi, \psi)$, A_μ es el operador definido por

$$\begin{cases} \mathcal{D}(A_\mu) = Y^{s+3},\ s \geq 0 \\ A_\mu \vec{u} = \left(\partial_x^3 u + \partial_x^{-1} u - \mu \partial_x^2 u, -\partial_x^3 v - \partial_x^{-1} v - \mu \partial_x^2 v\right) \end{cases}$$

y $\vec{F}(\vec{u}) = (F_1(\vec{u}), F_2(\vec{u}))$ con

$$\begin{cases} F_1(\vec{u}) = u^3 - uv^2 \\ F_2(\vec{u}) = u^2 v - v^3 \end{cases}.$$

En esta sección estudiamos el problema lineal determinado por el problema (2.4), a saber,

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u}(t) + A_\mu \vec{u}(t) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ \vec{u}(0) = \vec{\varphi}. \end{cases} \tag{2.5}$$

El estudio del problema (2.5) se inicia con la siguiente caracterización del operador A_μ.

Proposición 2.3. *El operador* $-A_\mu : Y^{s+3} \subseteq Y^s \to Y^s$ *es disipativo maximal en* Y^s, $s \geq 0$.

Demostración. Aplicaremos el teorema de perturbación de generadores de semigrupos de contracción [15, Teorema 3.2], para lo cual observamos que para cualquier $\mu > 0$,

$$-A_\mu = -A + B_\mu$$

en donde A es el operador definido en (2.2) y B_μ es el operador definido por

$$\begin{cases} \mathcal{D}\left(B_\mu\right) = Y^{s+2},\ s \geq 0 \\ B_\mu \vec{u} = \left(\mu \partial_x^2 u_1, \mu \partial_x^2 u_2\right),\ \vec{u} = \left(u_1, u_2\right). \end{cases}$$

De la proposición 2.1 sabemos que $-A$ es disipativo maximal y es claro que $\mathcal{D}(A) = Y^{s+3} \subset Y^{s+2} = \mathcal{D}(B)$. Además B_μ es disipativo, pues para $\vec{u} = (u_1, u_2) \in Y^{s+2}$ cualquiera, integrando por partes tenemos

$$\begin{aligned} \langle B_\mu \vec{u}, \vec{u}\rangle_{Y^s} &= \left\langle \mu \partial_x^2 u_1, u_1 \right\rangle_{X^s} + \left\langle \mu \partial_x^2 u_2, u_2 \right\rangle_{X^s} \\ &= \mu \sum_{k=1}^{2} \left(\left\langle \partial_x^2 u_k, u_k \right\rangle_s + \left\langle \partial_x u_k, \partial_x^{-1} u_k \right\rangle_s \right) \\ &= -\mu \sum_{k=1}^{2} \left(\langle \partial_x u_k, \partial_x u_k \rangle_s + \left\langle u_k, \partial_x \partial_x^{-1} u_k \right\rangle_s \right) \\ &= -\mu \sum_{k=1}^{2} \left(\|\partial_x u_k\|_s^2 + \|u_k\|_s^2 \right) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, por las desigualdades de Gagliardo-Nirenberg y de Young, tenemos

$$\|B_\mu \vec{u}\|_{Y^s} \leq \alpha \|A\vec{u}\|_{Y^s} + \beta \|\vec{u}\|_{Y^s},$$

en donde $0 < \alpha \leq 1$ y $\beta \geq 0$. Por lo tanto, $-A_\mu$ es disipativo maximal.□

Teorema 2.4. *Si $\mu > 0$, el operador $-A_\mu$ es el generador de un semigrupo de contracciones $\{W_\mu(t)\}_{t\geq 0}$ sobre Y^s, $s \geq 0$, tal que*

$$W_\mu(t)\,\vec{u} = \left(W_{\mu 1}(t)\,u_1, W_{\mu 2}(t)\,u_2\right), \quad \vec{u} = (u_1, u_2) \in Y^s \tag{2.6}$$

en donde $W_{\mu k}(t)$ son los multiplicadores de Fourier definidos por

$$\widehat{W_{\mu k}(t)\,w}(\xi) = e^{t\phi_{\mu k}(\xi)}\,\widehat{w}(\xi) \quad con \quad \phi_{\mu k}(\xi) = -\mu\xi^2 + (-1)^{k+1}\, i\left(\xi^3 + \frac{1}{\xi}\right),$$

y cualquiera sea $\vec{u} \in Y^s$ la función

$$W_\mu(\cdot)\,\vec{u} : \mathbb{R}_0^+ \to Y^s$$

es la única solución del problema de valor inicial (2.5) en

$$C\left([0, +\infty[\, : Y^s\right) \cap C^1\left([0, +\infty[\, : Y^{s-3}\right).$$

Además, para cada $t \geq 0$ se tiene que $W_\mu(t) \in \mathcal{L}\left(Y^s, Y^{s+r}\right)$ con

$$\left\|W_\mu(t)\,\vec{u}\right\|_{Y^{s+r}} \leq K_r \sqrt{1 + \frac{1}{(2\mu t)^r}}\, \|\vec{u}\|_{Y^s} \tag{2.7}$$

para todo $r \geq 0$ y $\vec{u} \in Y^s$.

Demostración. Las demostraciones de la primera afirmación, de la ecuación (2.6) y de la segunda afirmación, son similares a las correspondientes en el teorema 2.2. Por ello solamente probaremos la desigualdad (2.7).

Si $\vec{u} = (u_1, u_2) \in Y^s$, entonces

$$\left\|W_\mu(t)\,\vec{u}\right\|^2_{Y^{s+r}} = \left\|W_{\mu 1}(t)\,u_1\right\|^2_{X^{s+r}} + \left\|W_{\mu 2}(t)\,u_2\right\|^2_{X^{s+r}}. \tag{2.8}$$

Pero, para $k = 1, 2$ tenemos

$$\left\|W_{\mu k}(t)\,u_k\right\|^2_{X^{s+r}} = \int_{\mathbb{R}} \langle\xi\rangle^{s+r}\, \lambda^2(\xi)\, e^{-2t\mu\xi^2} \left|\widehat{u_k}(\xi)\right|^2 d\xi,$$

entonces

$$\begin{aligned}\left\|W_{\mu k}(t)\,u_k\right\|_{X^{s+r}}^2 &\leq C\left(\sup_{\xi\in\mathbb{R}} e^{-2t\mu\xi^2}+r^r e^{-r}\,(2\mu t)^{-r}\right)\left\|u_k\right\|_{X^s}^2\\ &\leq K_r^2\left(1+\frac{1}{(2\mu t)^r}\right)\left\|u_k\right\|_{X^s}^2,\end{aligned}$$

en donde C es una constante y $K_r^2 = \text{máx}\left\{C\sup_{\xi\in\mathbb{R}} e^{-2\mu\xi^2 t}, Cr^r e^{-r}\right\}$. Por lo tanto, en (2.8) se obtiene la desigualdad (2.7), como se quería demostrar. □

Notemos que si $\mu > 0$ es fijo, toda solución $\vec{u}$ del problema (2.4) es solución de la ecuación integral

$$\vec{u}\,(t) = W_\mu\,(t)\,\vec{\varphi} - \int_0^t W_\mu\,(t-\tau)\,\partial_x \vec{F}\,(\vec{u}\,(\tau))\,d\tau. \tag{2.9}$$

Nos interesa saber si toda solución de (2.9) es solución de (2.4), por ello, la primera cuestión que aparece es saber si (2.9) tiene solución en alguna clase. Para responder a esta cuestión tenemos el siguiente teorema, en cuya demostración utilizaremos el teorema del punto fijo de Banach para mostrar la existencia de una solución de la ecuación integral y el argumento de Kato y Fujita [10] para mostrar la unicidad.

Teorema 2.5. *Si $\mu > 0$ y $\vec{\varphi} \in Y^s$, $s > \frac{3}{2}$, entonces existen $T_\mu = T_\mu\left(\|\vec{\varphi}\|_{Y^s}, s, \mu\right) > 0$ y una función*

$$\vec{u}_\mu \in C\left([0, T_\mu] : Y^s\right)$$

única solución real de la ecuación integral (*2.9*).

Demostración. La idea está, esencialmente, contenida en la demostración del teorema 3.1 de [7], y por esto daremos a continuación una idea de la demostración.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\vec{\varphi} \neq 0$, de lo contrario $\vec{u}_\mu = 0$ es solución de (2.9). Para $T \geq 0$ cualquiera, definimos

$$\mathcal{E}_s(T) = \left\{ \vec{u} \in C([0,T] : Y^s) : \|\vec{u}(t) - W_\mu(t)\vec{\varphi}\|_{Y^s} \leq \|\vec{\varphi}\|_{Y^s},\ 0 < t \leq T \right\}$$

con la métrica

$$d(\vec{u},\vec{v}) = \sup_{0 \leq t \leq T} \|\vec{u}(t) - \vec{v}(t)\|_{Y^s}, \quad \text{para } \vec{u},\vec{v} \in \mathcal{E}_s(T).$$

Es fácil ver que $(\mathcal{E}_s(T), d)$ es un espacio métrico completo. Para $\vec{\varphi} \in Y^s$ fijo, definimos la aplicación Θ por

$$\Theta\vec{u}(t) = W_\mu(t)\vec{\varphi} - \int_0^t W_\mu(t-\tau)\,\partial_x\vec{F}(\vec{u}(\tau))\,d\tau, \quad t \in [0,T],$$

cualquiera sea $\vec{u} \in \mathcal{E}_s(T)$.

Observemos que cualquiera sea $T > 0$, la aplicación Θ está bien definida. En efecto, si $\vec{\varphi} \in Y^s$ el teorema 2.4 implica que $W_\mu(t)\vec{\varphi} \in Y^s$. Por otro lado, si $\vec{u}(\tau) \in Y^s$, desde que X^s es un álgebra, $F_1(\vec{u}(\tau))$, $F_2(\vec{u}(\tau)) \in X^s$. El teorema 2.4 también implica que $W_\mu(t) \in \mathcal{L}\left(Y^{\,s-1}, Y^{\,s}\right)$, entonces $W_\mu(t-\tau)\,\partial_x\vec{F}(\vec{u}(\tau)) \in Y^{\,s}$ y en consecuencia $\displaystyle\int_0^t W_\mu(t-\tau)\,\partial_x\vec{F}(\vec{u}(\tau))\,d\tau \in Y^s$. Por lo tanto, $\Theta u(t) \in Y^s$ cualquiera sea $t \in [0,T]$.

Además, tenemos que cualquiera sea $T > 0$, $\Theta u \in C([0,T] : Y^s)$ siempre que $u \in \mathcal{E}_s(T)$. En efecto, para $t_0 \in \,]0,T]$ y $t < t_0$ tenemos

$$\begin{aligned}
&\|\Theta u(t) - \Theta u(t_0)\|_{Y^s} \\
&\leq \|W_\mu(t)\vec{\varphi} - W_\mu(t_0)\vec{\varphi}\|_{Y^s} \\
&\quad + \int_0^t \left\| [W_\mu(t-\tau) - W_\mu(t_0-\tau)]\,\partial_x\vec{F}(\vec{u}(\tau)) \right\|_{Y^s} d\tau \\
&\quad + |t-t_0| \sup_{[0,T]} \left\| W_\mu(t_0-\tau)\,\partial_x\vec{F}(\vec{u}(\tau)) \right\|_{Y^s}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Por la continuidad de la aplicación $W_\mu(\cdot)\vec{\varphi} : [0,+\infty[\to Y^s$, teorema 2.4, el primer sumando en el último miembro de (2.10) converge a cero cuando $t \to t_0^-$. Por la misma razón y el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, lo mismo sucede con el segundo sumando. El último sumando converge trivialmente a cero cuando $t \to t_0^-$. Esto demuestra la continuidad por la izquierda de t_0, de manera análoga sigue la continuidad por la derecha y de ahí la continuidad en t_0.

Observemos que existe $T_\mu^1 = T_\mu^1(\|\vec{\varphi}\|_{H^s}, s, \mu) \in [0,T]$ tal que el rango de Θ está contenido en $\mathcal{E}_s\left(T_\mu^1\right)$. En efecto, si $T>0$ y $\vec{u} \in \mathcal{E}_s(T)$, entonces para $0 \le t \le T$, por la desigualdad (2.7), obtenemos

$$\begin{aligned}\|\Theta\vec{u}(t) - W_\mu(t)\vec{\varphi}\|_{Y^s} &\le \int_0^t \left\| W_\mu(t-\tau)\,\partial_x\vec{F}(\vec{u}(\tau))\right\|_{Y^s} d\tau \\ &\le K_1 \int_0^t \sqrt{1+\frac{1}{2\mu(t-\tau)}}\left\|\partial_x\vec{F}(\vec{u}(\tau))\right\|_{Y^{s-1}} d\tau.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Como

$$\left\|\partial_x\vec{F}(\vec{u}(\tau))\right\|_{Y^{s-1}} \le \sqrt{2}\,\|\vec{u}(\tau)\|_{Y^s}^3 \tag{2.12}$$

y, si $\vec{u} \in \mathcal{E}_s(T)$

$$\|\vec{u}(\tau)\|_{Y^s} \le \|\vec{u}(\tau) - W_\mu(\tau)\vec{\varphi}\|_{Y^s} + \|W_\mu(\tau)\vec{\varphi}\|_{Y^s} \le \|\vec{\varphi}\|_{Y^s}, \tag{2.13}$$

de las expresiones (2.11), (2.12), (2.13) y el cambio de variable $\tau' = 2\mu(t-\tau)$, conseguimos

$$\|\Theta\vec{u}(t) - W_\mu(t)\vec{\varphi}\|_{Y^s} \le \frac{K_1}{\mu}\|\vec{\varphi}\|_{Y^s}^3 \int_0^{2\mu t}\sqrt{1+\frac{1}{\tau'}}d\tau'. \tag{2.14}$$

Pero

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{K_1}{\mu}\|\vec{\varphi}\|_{Y^s}^3\int_0^{2\mu t}\sqrt{1+\frac{1}{\tau'}}\,d\tau' = 0$$

pues $\int_0^{2\mu t} \sqrt{1+\frac{1}{\tau'}} d\tau' \leq 2\left(\mu t+\sqrt{2\mu t}\right)$, implica que existe $T_\mu^1 = T_\mu^1\left(\|\vec{\varphi}\|_{Y^s}, s, \mu\right)$ tal que

$$C_\mu \|\vec{\varphi}\|_{Y^s}^2 \int_0^t \sqrt{1+\frac{1}{\tau'}}\, d\tau' \leq 1, \text{ si } 0 < t < T_\mu^1.$$

Así, en la desigualdad (2.14), para $0 < t < T_\mu^1$ tenemos

$$\|\Theta\vec{u}(t) - W_\mu(t)\vec{\varphi}\|_{Y^s} \leq \|\vec{\varphi}\|_{Y^s}.$$

es decir, $\Theta u \in \mathcal{E}_s\left(T_\mu^1\right)$. Por lo tanto, existe $T_\mu^1 = T_\mu^1\left(\|\vec{\varphi}\|_{Y^s}, s, \mu\right) \in [0,T]$ tal que $\mathcal{R}(\Theta) \subseteq \mathcal{E}_s\left(T_\mu^1\right)$.

Ahora demostraremos que para algún $T_\mu \in \left[0, T_\mu^1\right]$ la aplicación $\Theta : \mathcal{E}_s(T_\mu) \to \mathcal{E}_s(T_\mu)$ es una contracción. En efecto, si $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in \mathcal{E}_s\left(T_\mu^1\right)$ tenemos

$$\begin{aligned}
&\|\Theta\vec{u}_1(t) - \Theta\vec{u}_2(t)\|_{Y^s} \\
&\leq K_1 \int_0^t \sqrt{1+\frac{1}{2\mu(t-\tau)}} \left\|\partial_x \vec{F}(\vec{u}_1(\tau)) - \partial_x \vec{F}(\vec{u}_2(\tau))\right\|_{Y^{s-1}} d\tau.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Con un argumento semejante al utilizado para demostrar la desigualdad (2.14), suponiendo que $\vec{u}_1 = (u_1, v_1)$ y $\vec{u}_2 = (u_2, v_2)$, tenemos

$$\left\|\partial_x \vec{F}(\vec{u}_1(\tau)) - \partial_x \vec{F}(\vec{u}_2(\tau))\right\|_{Y^{s-1}}^2 \leq 8\|\vec{\varphi}\|_{Y^s}^4 \|(\vec{u}_1 - \vec{u}_2)(\tau)\|_{Y^s}^2. \tag{2.16}$$

Por tanto, de (2.16) y un cambio de variable, obtenemos

$$\begin{aligned}
\|\Theta\vec{u}_1(t) - \Theta\vec{u}_2(t)\|_{Y^s} &\leq K_1 \|\vec{\varphi}\|_{Y^s}^2 \int_0^t \sqrt{1+\frac{1}{2\mu(t-\tau)}} \\
&\qquad \|\vec{u}_1(\tau) - \vec{u}_2(\tau)\|_{Y^s}\, d\tau \\
&\leq C_\mu \|\vec{\varphi}\|_{Y^s}^2 \int_0^{2\mu t} \sqrt{1+\frac{1}{\tau}}\, d\tau \cdot d(\vec{u}_1, \vec{u}_2).
\end{aligned}$$

Tomando el supremo en $\left[0,T_{\mu}^{1}\right]$,

$$d\left(\Theta\vec{u}_1,\Theta\vec{u}_2\right)\leq C_{\mu}\left\|\vec{\varphi}\right\|_{Y^s}^2\int_0^{2\mu t}\sqrt{1+\frac{1}{\tau}}\,d\tau\,d\left(\vec{u}_1,\vec{u}_2\right).$$

Como $\lim\limits_{T_{\mu}\to 0^+}C_{\mu}\left\|\vec{\varphi}\right\|_{Y^s}^2\int_0^{2\mu T_{\mu}}\sqrt{1+\frac{1}{\tau}}\,d\tau\;=\;0$, existe $T_{\mu}\;\in\;\left]0,T_{\mu}^{1}\right]$ que depende de $\left\|\vec{\varphi}\right\|_{Y^s}$, s y μ tal que

$$0<\lambda=C_{\mu}\left\|\vec{\varphi}\right\|_{Y^s}^2\int_0^{2\mu t}\sqrt{1+\frac{1}{\tau}}\,d\tau<1.$$

Así, concluimos que

$$d\left(\Theta\vec{u}_1,\Theta\vec{u}_2\right)\leq\lambda\,d\left(\vec{u}_1,\vec{u}_2\right)\;\text{ con }0<\lambda<1,$$

y podemos afirmar que Θ es una contracción.

Por el Teorema del Punto Fijo de Banach, existe una $\vec{u}_{\mu}\in\mathcal{E}_s\left(T_{\mu}\right)\subset C\left(\left[0,T_{\mu}\right]:Y^s\right)$ solución única de la ecuación $\Theta\vec{u}_{\mu}=\vec{u}_{\mu}$ en $\mathcal{E}_s\left(T_{\mu}\right)$, es decir,

$$\Theta\vec{u}_{\mu}\left(t\right)=W_{\mu}\left(t\right)\vec{\varphi}-\int_0^t W_{\mu}\left(t-\tau\right)\partial_x\vec{F}\left(\vec{u}\left(\tau\right)\right)\,d\tau=\vec{u}_{\mu}\left(t\right)$$

para todo $t\in\left[0,T_{\mu}\right]$.

Para completar la demostración necesitamos probar la unicidad en $C\left(\left[0,T_{\mu}\right]:Y^s\right)$. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos soluciones en $C\left(\left[0,T_{\mu}\right]:Y^s\right)$ de la ecuación integral (2.9). Para $t\in\left[0,T_{\mu}\right]$ cualquiera, tenemos como en la demostración de (2.15),

$$\begin{aligned}\left\|\vec{u}\left(t\right)-\vec{v}\left(t\right)\right\|_{Y^s}&\leq\int_0^t\left\|W_{\mu}\left(t-\tau\right)\left[\partial_x\left(\vec{F}\left(\vec{u}\left(\tau\right)\right)-\vec{F}\left(\vec{v}\left(\tau\right)\right)\right)\right]\right\|_{Y^s}d\tau\\&\leq C_{s,\mu}\left\|\vec{\varphi}\right\|_{Y^s}^2\int_0^{2\mu t}\sqrt{1+\frac{1}{\tau}}\,d\tau\sup_{\tau\in\left[0,T_{\mu}\right]}\left\|\vec{u}\left(\tau\right)-\vec{v}\left(\tau\right)\right\|_{Y^s}\\&\leq\kappa\left(t\right)\sup_{\tau\in\left[0,T_{\mu}\right]}\left\|\vec{u}\left(\tau\right)-\vec{v}\left(\tau\right)\right\|_{Y^s},\end{aligned}$$

donde $\kappa(t) = 2C_{s,\mu} \|\vec{\varphi}\|_{Y^s}^2 \left(\mu t + \sqrt{2\mu t}\right)$. Como κ es continua y creciente sobre $[0, +\infty[$, $\kappa(0) = 0$ y $\lim\limits_{t \to +\infty} \kappa(t) = +\infty$, por el Teorema del Valor Intermedio, existe $T^* > 0$ tal que $\kappa(T^*) = \frac{1}{2}$. Sea $T_1 = \min\{T_\mu, T^*\}$, entonces $\kappa(t) \leq \kappa(T_1) \leq \kappa(T^*) = \frac{1}{2}$ y para $t \in [0, T_1]$ tenemos

$$\|\vec{u}(t) - \vec{v}(t)\|_{Y^s} \leq \frac{1}{2} \sup_{\tau \in [0,T_1]} \|\vec{u}(\tau) - \vec{v}(\tau)\|_{Y^s},$$

y tomando el supremo sobre $[0, T_1]$, obtenemos

$$\sup_{t \in [0,T_1]} \|\vec{u}(\tau) - \vec{v}(\tau)\|_{Y^s} \leq \frac{1}{2} \sup_{\tau \in [0,T_1]} \|\vec{u}(\tau) - \vec{v}(\tau)\|_{Y^s}. \tag{2.17}$$

Por tanto, $\sup\limits_{t \in [0,T_1]} \|\vec{u}(t) - \vec{v}(t)\|_{Y^s} \leq 0$ y así $\vec{u} = \vec{v}$ en $[0, T_1]$.

Si $T_1 = T_\mu$ obtenemos la unicidad, pero si $T_1 = T^*$ definiendo $T_2 = \min\{T_\mu, 2T^*\}$ sigue que $T_1 < T_2$. Entonces, para $t \in [T_1, T_2]$ sigue que

$$\begin{aligned}
\|\vec{u}(t) - \vec{v}(t)\|_{Y^s} &\leq C \|\vec{\varphi}\|_{Y^s}^2 \int_{T_1}^{t} \sqrt{1 + \frac{1}{2\mu(t-\tau)}} \|\vec{u}(\tau) - \vec{v}(\tau)\|_{Y^s} d\tau \\
&\leq \frac{C \|\vec{\varphi}\|_{Y^s}^2}{\mu} \sup_{\tau \in [0,t]} \|\vec{u}(\tau) - \vec{v}(\tau)\|_{Y^s} \int_0^{2\mu(t-T_1)} \sqrt{1 + \frac{1}{\tau}} d\tau \\
&\leq \kappa(t - T_1) \sup_{\tau \in [0,T_2]} \|\vec{u}(\tau) - \vec{v}(\tau)\|_{Y^s} \\
&\leq \kappa(T_2 - T_1) \sup_{\tau \in [0,T_2]} \|\vec{u}(\tau) - \vec{v}(\tau)\|_{Y^s}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Como $T_2 \leq 2T^*$, $T_1 = T^*$, tenemos $\kappa(T_2 - T_1) \leq \kappa T^*$. Luego de (2.18) resulta

$$\|\vec{u}(t) - \vec{v}(t)\| \leq \kappa(T^*) \sup_{\tau \in [0,T_2]} \|\vec{u}(\tau) - \vec{v}(\tau)\|_{Y^s} =$$

$$\frac{1}{2} \sup_{\tau \in [0,T_2]} \|\vec{u}(\tau) - \vec{v}(\tau)\|_{Y^s}.$$

Tomando el supremo en $[0,T_2]$ obtenemos (2.17) en $[0,T_2]$, luego $u=v$ en $[0,T_2]$. Si $T_2 = T_\mu$ obtenemos la unicidad, en caso contrario repetimos el proceso para $T_3 = \min\{T_\mu, 3T^*\}$. Como $[0,T_\mu]$ es acotado, existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $T_\mu \leq nT^*$, de ahí que $\vec{u}=\vec{v}$ en $[0,T_\mu]$ concluyendo así la demostración. □

Probaremos que la función $\vec{u}_\mu$ solución única de la ecuación integral (2.9) encontrada en el teorema 2.5 es la solución única del problema regularizado (2.4) en Y^s. La demostración se basa en los trabajos de Iório [7, teoremas 3.2 y 3.3] y [8, teorema 2.1].

Ahora probaremos la existencia, unicidad y regularidad de la solución del problema regularizado (2.4).

Teorema 2.6. *Sean $\mu>0$ y $\vec{\varphi}\in Y^s$, $s>\frac{3}{2}$, entonces la función $\vec{u}_\mu$ del teorema 2.5 es la solución única del problema regularizado (2.4) y satisface*

$$\vec{u}_\mu \in C\left([0,T_\mu] : Y^s\right)\cap C^1\left([0,T_\mu] : Y^{s-3}\right).$$

Además, para todo $r\geq 0$

$$\vec{u}_\mu \in C\left(]0,T_\mu] : Y^{s+r}\right)\cap C^1\left([0,T_\mu] : Y^{s-3+r}\right).$$

Demostración. Veamos la existencia de una solución. Del teorema 2.4 y la teoría de semigrupos tenemos,

$$\partial_t W_\mu(t)\,\vec{\varphi} = -A_\mu W_\mu(t)\,\vec{\varphi},$$

para $t>0$ en Y^{s-3}. Para $\mu>0$, consideramos

$$G(t) = \int_0^t W_\mu(t-\tau)\,\partial_x \vec{F}\left(\vec{u}_\mu(\tau)\right)\,d\tau$$

Para $0\leq t<T_\mu$ y $h>0$ tal que $t+h\in\,]0,T_\mu]$ sigue,

$$\begin{aligned}\frac{G(t+h)-G(t)}{h} &= \frac{W_\mu(h)-I}{h}\int_0^t W_\mu(t-\tau)\,\partial_x\vec{F}\left(\vec{u}_\mu(\tau)\right)d\tau \\ &\quad + W_\mu(t+h-c_h)\,\partial_x\vec{F}\left(\vec{u}_\mu(c_h)\right).\end{aligned}$$

Donde en la última igualdad se ha usado que $W_\mu(h) - I$ es un operador lineal y el teorema del valor medio para integrales de Bochner en el intervalo $[t, t+h]$ con $c_h \in [t, t+h]$.

Como $-A_\mu$ es el generador del semigrupo $\{W_\mu(t)\}_{t \geq 0}$ tenemos

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{W_\mu(h) - I}{h} \int_0^t W_\mu(t-\tau)\, \partial_x \vec{F}(\vec{u}_\mu(\tau))\, d\tau =$$

$$-A_\mu \int_0^t W_\mu(t-\tau)\, \partial_x \vec{F}(\vec{u}_\mu(\tau))\, d\tau.$$

Además, sigue de $c_h \in [t, t+h]$ que si $h \to 0^+$ entonces $c_h \to t$, por tanto

$$\lim_{h \to 0^+} W_\mu(t+h-c_h)\, \partial_x \vec{F}(\vec{u}_\mu(c_h)) = W_\mu(0)\, \partial_x \vec{F}(\vec{u}_\mu(t)) = \partial_x \vec{F}(\vec{u}_\mu(t)).$$

Así, obtenemos

$$\begin{aligned} \partial_t^+ G(t) &= -A_\mu \int_0^t W_\mu(t-\tau)\, \partial_x \vec{F}(\vec{u}_\mu(\tau))\, d\tau + \partial_x \vec{F}(\vec{u}_\mu(t)) \\ &= -A_\mu G(t) + \partial_x \vec{F}(\vec{u}_\mu(t)) \end{aligned}$$

Análogamente, para $h < 0$ conseguimos

$$\partial_t^- G(t) = -A_\mu G(t) + \partial_x \vec{F}(\vec{u}_\mu(t))$$

Así $\partial_t G(t) = \partial_t^+ G(t) = \partial_t^- G(t)$ y

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{u}_\mu(t) &= -A_\mu [W_\mu(t)\vec{\varphi} - G(t)] - \partial_x \vec{F}(\vec{u}_\mu(t)) \\ &= -A_\mu \vec{u}_\mu(t) - \partial_x \vec{F}(\vec{u}_\mu(t)). \end{aligned}$$

Luego, $\vec{u}_\mu$ satisface el problema regularizado (2.4).

Para la unicidad, sea

$$\vec{v} \in C([0, T_\mu] : Y^s) \cap C^1\left([0, T_\mu] : Y^{s-3}\right)$$

otra solución de (2.4), entonces la función $\vec{v}$ satisface

$$\partial_t \vec{v}\,(t) + A_\mu \vec{v}\,(t) + \partial_x \vec{F}\,(\vec{v}\,(t)) = 0,\ 0 \leq t \leq T_\mu \tag{2.19}$$

en Y^{s-3}. Calculando $\partial_\tau W_\mu\,(t-\tau)\,\vec{v}\,(\tau)$ y usando (2.19), para $0 \leq t \leq T_\mu$ tenemos

$$\begin{aligned} \partial_\tau W_\mu\,(t-\tau)\,\vec{v}\,(\tau) &= W_\mu\,(t-\tau)\left[-A_\mu \vec{v}\,(\tau) - \partial_x \vec{F}\,(\vec{v}\,(\tau))\right] \\ &\quad + W_\mu\,(t-\tau)\,A_\mu \vec{v}\,(\tau) \\ &= -W_\mu\,(t-\tau)\,\partial_x \vec{F}\,(\vec{v}\,(\tau))\,. \end{aligned}$$

Integrando desde 0 hasta t y teniendo en cuenta que $\vec{v}\,(0) = \vec{\varphi}$, tenemos

$$\vec{v}\,(t) = W_\mu\,(t)\,\vec{\varphi} - \int_0^t W_\mu\,(t-\tau)\,\partial_x \vec{F}\,(\vec{v}\,(\tau))\;d\tau \tag{2.20}$$

en Y^{s-3}. Entonces del teorema 2.4, el segundo miembro de (2.20) está en Y^s. Por lo tanto, $\vec{v} \in C\,([0,T_\mu] : Y^s) \cap C^1\left([0,T_\mu]\,, : Y^{s-3}\right)$ es solución de la ecuación integral (2.9). Entonces la unicidad establecida en el teorema 2.5 implica que $\vec{v} = \vec{u}_\mu$ en $[0,T_\mu]$ completando la demostración de unicidad. □

A continuación mostraremos la existencia de un intervalo $[0,T]$ independiente de μ, en donde todas las soluciones $\vec{u}_\mu$ del problema regularizado (2.4) pueden ser definidas. Como veremos más adelante, esto será esencial para demostrar la existencia del límite de $\vec{u}_\mu$ cuando $\mu \to 0^+$, el cual será la solución local del problema (1.2).

Teorema 2.7. *Sean $\mu > 0$, $\vec{\varphi} \in Y^s$ con $s > \frac{3}{2}$ y $\vec{u}_\mu$ la solución del problema regularizado (2.4) encontrada en el teorema 2.6. Entonces, existe $T = T\,(\|\vec{\varphi}\|_{Y^s}\,, s) > 0$ tal que $\vec{u}_\mu$ se puede extender al intervalo $[0,T]$. Además, existe $\rho \in C\,([0,T]\,, \mathbb{R})$ tal que*

$$\begin{cases} \|\vec{u}_\mu\,(t)\|^2_{Y^s} \leq \rho\,(t)\,, \quad 0 \leq t \leq T \\ \sup\limits_{[0,T]} \rho\,(t) \leq C\,(\|\vec{\varphi}\|_{Y^s}\,, s, T)\,, \end{cases} \tag{2.21}$$

donde ρ satisface

$$\begin{cases} \rho'(t) = 2C_s \rho^2(t), & t > 0 \\ \rho(0) = \|\vec{\varphi}\|_{Y^s}^2 . \end{cases} \tag{2.22}$$

También, si $\vec{\varphi} \in Y^{s+r}$ para $r \geq 0$, entonces para cada $\mu > 0$ se tiene

$$\sup_{[0,T]} \|\vec{u}_\mu(t)\|_{Y^{s+r}}^2 \leq C\left(\|\vec{\varphi}\|_{Y^s}, s, T\right), \tag{2.23}$$

en donde $C(\cdot,\cdot,\cdot)$ es creciente en cada uno de sus argumentos.

Demostración. Sea $\vec{u}_\mu = (u, v) \in C([0, T_\mu] : Y^s) \cap C^1\left([0, T_\mu] : Y^{s-3}\right)$ la solución de (2.4) dada por el teorema 2.6. Por la definición del producto interno en los espacios Y^s y X^s, integración por partes y la desigualdad triangular, tenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\partial_t \|\vec{u}_\mu(t)\|_{Y^s}^2 \\
&= -\mu \|\partial_x u(t)\|_s^2 - \mu \|u(t)\|_s^2 - \mu \|\partial_x v(t)\|_s^2 - \mu \|v(t)\|_s^2 \\
&- \left\langle u(t), \partial_x\left(u^3(t) - u(t)v^2(t)\right)\right\rangle_{X^s} - \left\langle v(t), \partial_x\left(v^3(t) - u^2(t)v(t)\right)\right\rangle_{X^s} \\
&\leq \left|\left\langle u(t), \partial_x\left(u^3(t) - u(t)v^2(t)\right)\right\rangle_s\right| + \left|\left\langle \partial_x^{-1} u(t), u^3(t) - u(t)v^2(t)\right\rangle_s\right| \\
&+ \left|\left\langle v(t), \partial_x\left(v^3(t) - u^2(t)v(t)\right)\right\rangle_s\right| + \left|\left\langle \partial_x^{-1} v(t), v^3(t) - u^2(t)v(t)\right\rangle_s\right|.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Estimamos a continuación cada sumando de (2.24). Para el primer sumando usamos la desigualdad triangular, la desigualdad (1.3) con $t = s$, la regularidad de la solución $\vec{u}_\mu$, la definición del conmutador, la desigualdad de Cauchy-Schwartz y (1.5) con $p_1 = p_4 = \infty$ y $p_2 = p_3 = 2$; así obtenemos

$$\left|\left\langle u(t), \partial_x\left(u^3(t) - u(t)v^2(t)\right)\right\rangle_s\right| \leq C_s \|\vec{u}(t)\|_{Y^s}^4 . \tag{2.25}$$

Para estimar el segundo sumando, por la desigualdad de Cauchy-Schwartz y la desigualdad triangular tenemos

$$\left|\left\langle \partial_x^{-1} u(t), u^3(t) - u(t)v^2(t)\right\rangle_s\right| \leq C_s \|\vec{u}(t)\|_{Y^s}^4 . \tag{2.26}$$

Del mismo modo, para los términos tercero y cuarto tenemos

$$\left|\left\langle v\left(t\right), \partial_x \left(v^3\left(t\right) - u^2\left(t\right) v\left(t\right)\right)\right\rangle_s\right| \leq C_s \left\|\vec{u}\left(t\right)\right\|_{Y^s}^4 \tag{2.27}$$

y

$$\left|\left\langle \partial_x^{-1} v\left(t\right), v^3\left(t\right) - u^2\left(t\right) v\left(t\right)\right\rangle_s\right| \leq \left\|\vec{u}\left(t\right)\right\|_{Y^s}^4 . \tag{2.28}$$

Por lo tanto, combinando (2.24) con (2.25) – (2.28),

$$\partial_t \left\|\vec{u}\left(t\right)\right\|_{Y^s}^2 \leq 2C_s \left(\left\|\vec{u}\left(t\right)\right\|_{Y^s}^2\right)^2 = 2\zeta\left(\left\|\vec{u}\left(t\right)\right\|_{Y^s}^2\right). \tag{2.29}$$

donde $\zeta\left(y\right) = C_s y^2$, para $y \geq 0$.

Consideremos $\rho\left(t\right) = \frac{\|\vec{\varphi}\|_{Y^s}^2}{1 - C_s \|\vec{\varphi}\|_{Y^s}^2 t}$, definida en el intervalo $[0, T^*[$ con $T^* = \frac{1}{C_s \|\vec{\varphi}\|_{Y^s}^2}$, la solución maximal del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \rho'\left(t\right) = 2\zeta\left(\rho\left(t\right)\right), \ \ t > 0 \\ \rho\left(0\right) = \|\vec{\varphi}\|_{Y^s}^2 . \end{cases} \tag{2.30}$$

Entonces, de (2.29), (2.30) y de la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$\left\|\vec{u}\left(t\right)\right\|_{Y^s}^2 \leq \rho\left(t\right), \ \ t \in [0, T^*[\cap [0, T_\mu] .$$

Así, para $\mu > 0$, $\vec{u}_\mu$ se puede extender (si fuera necesario) a un intervalo $[0, T]$. Esto prueba (2.21) como queríamos.

Los argumentos anteriores, escribiendo $s + r$ en vez de s, prueban la desigualdad (2.23). $\square$

3. Teoría Local del Problema no Lineal

Esta sección es dedicada a demostrar uno de los resultados principales del presente capítulo, a saber, que el problema de valor inicial (1.2) tiene única solución local. La demostración de este resultado está basada en las ideas de Iorio en [7].

Teorema 3.1. *Sean $\vec{\varphi} \in Y^s$ y $s > \frac{3}{2}$, entonces existe $T = T\left(\|\vec{\varphi}\|_{Y^s}, s\right) > 0$ y una*

$$\vec{u} \in C\left([0,T] : Y^s\right) \cap C^1\left([0,T] : Y^{s-3}\right)$$

solución única de (1.2) y

$$\left\{\begin{array}{l} \|\vec{u}\,(t)\|_{Y^s}^2 \leq \rho\,(t)\,, \quad 0 \leq t \leq T \\ \sup\limits_{[0,T]} \rho\,(t) \leq C\left(\|\vec{\varphi}\|_{Y^s}, s, T\right) \end{array}\right. , \tag{3.1}$$

donde ρ satisface (2.21) y $C\,(\cdot,\cdot,\cdot)$ es creciente en cada uno de sus argumentos. Además, si $\vec{\varphi} \in Y^{s+r}$ con $r \geq 0$, entonces

$$\sup_{[0,T]} \|\vec{u}\,(t)\|_{Y^{s+r}} \leq C\left(\|\vec{\varphi}\|_{Y^s}, s, T\right) \|\vec{\varphi}\|_{Y^{s+r}}\,. \tag{3.2}$$

Demostración. Si para cada $\mu > 0$, $\vec{u}_\mu$ es la solución de (2.4) con dato inicial $\vec{\varphi}$ dada por los teoremas 2.6 y 2.7 en $[0,T]$, afirmamos que existe $\vec{u}$ tal que

$$\vec{u}\,(t) = \lim_{\mu \to 0^+} \vec{u}_\mu\,(t) \quad \text{en } Y^0 \tag{3.3}$$

uniformemente en $t \in [0,T]$.

Para esto, probaremos que $\{\vec{u}_\mu\}_{\mu > 0}$ es una familia de Cauchy. En efecto, sean $\mu, \nu > 0$ cualesquiera y $\vec{u}_\nu$ la solución de los problemas regularizados (1.2), con dato inicial $\vec{\varphi}$. Si $\vec{w} = \vec{u}_\mu - \vec{u}_\nu$, con $\vec{w} = (w_1, w_2)$, $\vec{u}_\mu = (u_\mu, v_\mu)$, $\vec{u}_\nu = (u_\nu, v_\nu)$ y las notaciones de la sección 2, entonces $\vec{w}$ satisface

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t w_1 + \partial_x^3 w_1 + \partial_x^{-1} w_1 - \mu \partial_x^2 w_1 + (\nu - \mu)\,\partial_x^2 u_\nu + \partial_x P_1 = 0 \\ \partial_t w_2 - \partial_x^3 w_2 - \partial_x^{-1} w_2 - \mu \partial_x^2 w_2 + (\nu - \mu)\,\partial_x^2 v_\nu - \partial_x P_2 = 0 \\ w_1\,(0) = 0 \\ w_2\,(0) = 0, \end{array}\right.$$

en donde

$$P_1 = h_1 w_1 - h_2 w_2 \quad \text{ y } \quad P_2 = h_3 w_1 - h_4 w_2$$

con

$$\begin{cases} h_1 = u_\mu^2 + u_\mu u_\nu + u_\nu^2 - v_\nu^2 \\ h_2 = u_\mu \left(v_\mu + v_\nu\right) \\ h_3 = \left(u_\mu + u_\nu\right) v_\nu \\ h_4 = v_\mu^2 + v_\mu v_\nu + v_\nu^2 - u_\mu^2. \end{cases}$$

Luego, para $t \in [0, T]$ tenemos

$$\begin{aligned} \partial_t \left\| \vec{w}(t) \right\|_{Y^0}^2 \quad \leq \quad & 2\left|\mu - \nu\right| \left|\left\langle \partial_x w_1, \partial_x u_\nu \right\rangle_{X^0}\right| + 2\left|\mu - \nu\right| \left|\left\langle \partial_x w_2, \partial_x v_\nu \right\rangle_{X^0}\right| \\ & + \left|\left\langle w_1^2, \partial_x h_1 \right\rangle_{X^0}\right| + 2\left|\left\langle \partial_x w_1, h_2 w_2 \right\rangle_{X^0}\right| \\ & + 2\left|\left\langle \partial_x w_2, h_3 w_1 \right\rangle_{X^0}\right| + \left|\left\langle w_2^2, \partial_x h_4 \right\rangle_{X^0}\right| \end{aligned} \tag{3.4}$$

Estimando cada sumando de (3.4) tenemos,

$$\left|\left\langle \partial_x w_1, \partial_x u_\nu \right\rangle_{X^0}\right| \leq \left\|\partial_x w_1\right\|_0 \left\|\partial_x u_\nu\right\|_0 + \left\|w_1\right\|_0 \left\|u_\nu\right\|_0 \leq \left\|w_1\right\|_1 \left\|u_\nu\right\|_1 \leq C, \tag{3.5}$$

$$\left|\left\langle \partial_x w_2, \partial_x v_\nu \right\rangle_{X^0}\right| \leq C, \tag{3.6}$$

$$\left|\left\langle w_1^2, \partial_x h_1 \right\rangle_{X^0}\right| \leq C_s \left\|w_1\right\|_{X^0}^2, \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} \left|\left\langle \partial_x w_1, h_2 w_2 \right\rangle_{X^0}\right| \quad \leq \quad & \left|\left\langle \partial_x w_1, h_2 w_2 \right\rangle_0\right| + \left|\left\langle w_1, \partial_x^{-1}\left(h_2 w_2\right) \right\rangle_0\right| \\ \leq \quad & \left\|\partial_x w_1\right\|_0 \left\|h_2 w_2\right\|_0 + \left\|\partial_x^{-1} w_1\right\|_0 \left\|h_2\left(v_\mu - v_\nu\right)\right\|_0 \\ \leq \quad & \left(\left\|w_1\right\|_1 \left\|u_\mu\right\|_0 + \left\|w_1\right\|_{X^0} \left\|u_\mu\right\|_0\right) \left\|v_\mu^2 - v_\nu^2\right\|_0 \\ \leq \quad & C \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\left|\left\langle \partial_x w_2, h_3 w_1 \right\rangle_{X^0}\right| \leq C \tag{3.9}$$

y

$$\left|\left\langle w_2^2, \partial_x h_4 \right\rangle_{X^0}\right| \leq C_s \left\|w_2\right\|_{X^0}^2, \tag{3.10}$$

Luego, combinando (3.4) – (3.9) obtenemos

$$\partial_t \left\|\vec{w}(t)\right\|_{Y^0}^2 \leq C\left|\mu - \nu\right| + C_s \left\|\vec{w}(t)\right\|_{Y^0}^2.$$

Integrando de 0 a t, dado que $\vec{u}_{\mu}(0) = \vec{u}_{\nu}(0) = \vec{\varphi}$ implica que $\|\vec{w}(0)\|^2_{Y^0} = 0$, obtenemos

$$\|\vec{w}(t)\|^2_{Y^0} \le CT|\mu - \nu| + C_s \int_0^t \|\vec{w}(\tau)\|^2_{Y^0} d\tau$$

Aplicando la desigualdad de Gronwall, deducimos

$$\|\vec{w}(t)\|^2_{Y^0} \le C_s T|\mu - \nu| \exp\left(\int_0^t C_s d\tau\right) \le C_s T|\mu - \nu| e^{C_s T},\ t \in [0, T].$$

Así conseguimos (3.3) y $\vec{w} \in C\left([0, T] : Y^0\right)$.

Ahora probaremos que

$$\vec{u}(t) = \operatorname*{w-lím}_{\mu \to 0^+} \vec{u}_{\mu}(t) \quad \text{en } Y^s, \tag{3.11}$$

uniformemente en $t \in [0, T]$. Para esto, por el teorema de representación de Riesz-Fréchet, consideremos $\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2) \in Y^s$ cualquiera. Entonces, por la densidad de Y^{2s} en Y^s, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\vec{\eta}_{\varepsilon} = (\eta_{1,\varepsilon}, \eta_{2,\varepsilon}) \in Y^{2s}$ tal que $\|\vec{\eta}_{\varepsilon} - \vec{\eta}\|_{Y^s} < \varepsilon$. Sean $\mu, \nu > 0$ y $\vec{u}_{\mu} = (u_{\mu}, v_{\mu})$ y $\vec{u}_{\nu} = (u_{\nu}, v_{\nu})$ como antes, usando (2.21) con $C = C(s, T, \|\vec{\varphi}\|_{Y^s})$ tenemos

$$\begin{aligned}
\left|\langle \vec{u}_{\mu} - \vec{u}_{\nu}, \vec{\eta} \rangle_{Y^s}\right| \le & \left|\langle u_{\mu} - u_{\nu}, \eta_1 - \eta_{1,\varepsilon} \rangle_s\right| \\
& + \left|\left\langle \partial_x^{-1}(u_{\mu} - u_{\nu}), \partial_x^{-1}(\eta_1 - \eta_{1,\varepsilon}) \right\rangle_s\right| \\
& + \left|\left\langle u_{\mu} - u_{\nu}, J^{2s}\eta_{1,\varepsilon} \right\rangle_0\right| \\
& + \left|\left\langle \partial_x^{-1}(u_{\mu} - u_{\nu}), \partial_x^{-1} J^{2s}\eta_{1,\varepsilon} \right\rangle_0\right| \\
& + \left|\langle v_{\mu} - v_{\nu}, \eta_2 - \eta_{2,\varepsilon} \rangle_s\right| \\
& + \left|\left\langle \partial_x^{-1}(v_{\mu} - v_{\nu}), \partial_x^{-1}(\eta_2 - \eta_{2,\varepsilon}) \right\rangle_s\right| \\
& + \left|\left\langle v_{\mu} - v_{\nu}, J^{2s}\eta_{2,\varepsilon} \right\rangle_0\right| \\
& + \left|\left\langle \partial_x^{-1}(v_{\mu} - v_{\nu}), \partial_x^{-1} J^{2s}\eta_{2,\varepsilon} \right\rangle_0\right|
\end{aligned}$$

entonces, por la desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned}
\left|\langle \vec{u}_\mu - \vec{u}_\nu, \vec{\eta}\rangle_{Y^s}\right| &\leq \left\|u_\mu - u_\nu\right\|_{X^s} \left\|\eta_1 - \eta_{1,\varepsilon}\right\|_{X^s} + \left\|u_\mu - u_\nu\right\|_{X^0} \left\|\eta_{1,\varepsilon}\right\|_{X^{2s}} \\
&+ \left\|v_\mu - v_\nu\right\|_{X^s} \left\|\eta_2 - \eta_{2,\varepsilon}\right\|_{X^s} + \left\|v_\mu - v_\nu\right\|_{X^0} \left\|\eta_{2,\varepsilon}\right\|_{X^{2s}} \\
&\leq \left(\left\|u_\mu - u_\nu\right\|_{X^s} + \left\|v_\mu - v_\nu\right\|_{X^s}\right) \left\|\vec{\eta} - \vec{\eta}_\varepsilon\right\|_{Y^s} \\
&+ \left(\left\|u_\mu - u_\nu\right\|_{X^0} + \left\|v_\mu - v_\nu\right\|_{X^0}\right) \left\|\vec{\eta}_\varepsilon\right\|_{Y^{2s}} \\
&\leq \left(\left\|\vec{u}_\mu\right\|_{Y^s} + \left\|\vec{u}_\nu\right\|_{Y^s}\right) \left\|\vec{\eta} - \vec{\eta}_\varepsilon\right\|_{Y^s} \qquad (3.12) \\
&+ \left\|\vec{u}_\mu - \vec{u}_\nu\right\|_{Y^0} \left\|\vec{\eta}_\varepsilon\right\|_{Y^{2s}} \\
&\leq C\varepsilon + \left\|\vec{u}_\mu - \vec{u}_\nu\right\|_{Y^0} \left\|\vec{\eta}_\varepsilon\right\|_{Y^{2s}}, \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

para cada $t \in [0, T]$. Como ε es arbitrario, de (3.13) y (3.3) obtenemos (3.11).

Además, de (3.11) sigue que $u \in \mathrm{C_w}\left([0, T], Y^s\right)$, y por la proposición 1.2 de [6] así como la desigualdad (2.21)

$$\left\|\vec{u}\,(t)\right\|_{Y^s} \leq \liminf_{\mu \to 0^+} \left\|\vec{u}_\mu\,(t)\right\|_{Y^s} \leq \rho^{\frac{1}{2}}\,(t)\,, \;\; t \in [0, T]\,,$$

por lo que $\vec{u}\,(t)$ satisface (3.1).

Ahora mostraremos que $\vec{u}\,(t)$ satisface el problema (1.2) c.e.t. $[0, T]$ en Y^{s-3}. Para ello definamos

$$\vec{G}_\mu\left(\vec{u}_\mu\,(t)\right) = A_\mu \vec{u}_\mu\,(t) + \vec{F}\left(\vec{u}_\mu\,(t)\right). \tag{3.14}$$

Entonces, de (3.11) y porque la función $(u, v) \in H^s \times H^s \mapsto uv \in H^s$ es débilmente continua cuando $s > \frac{1}{2}$, sigue que

$$\mathrm{w\!-}\lim_{\mu \to 0^+} \vec{G}_\mu\left(\vec{u}_\mu\,(t)\right) = A\vec{u}\,(t) + \vec{F}\left(\vec{u}\,(t)\right) \equiv \vec{G}\left(\vec{u}\,(t)\right) \;\; \text{en } Y^{s-3}, \tag{3.15}$$

uniformemente en $t \in [0, T]$. Del teorema 2.6 y de (3.14) tenemos

$$\partial_t \vec{u}_\mu\,(t) = G_\mu\left(\vec{u}_\mu\,(t)\right), \;\; t \in [0, T]\,.$$

Integrando desde t' hasta t, con $0 \leq t' \leq t \leq T$, obtenemos

$$\vec{u}_\mu\,(t) - \vec{u}_\mu\,(t') = \int_{t'}^{t} G_\mu\left(\vec{u}_\mu\,(\tau)\right)\, d\tau. \tag{3.16}$$

Como $\vec{u} \in \mathrm{C_w}\left([0,T], Y^s\right)$, de (3.14) y (3.15) la función $G\left(\vec{u}\left(\cdot\right)\right) : [0,T] \to Y^{s-3}$ es débilmente continua. Como las funciones débilmente continuas son fuertemente medibles (Teorema de Pettis) y por lo tanto integrables en el sentido de Bochner, de (3.15), $A_\mu \in \mathcal{L}\left(Y^s, Y^{s-3}\right)$ con $s > \frac{3}{2}$, y el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, tenemos que

$$\underset{\mu \to 0^+}{\text{w}-\text{lím}} \int_{t'}^{t} G_\mu\left(\vec{u}_\mu\left(\tau\right)\right)\, d\tau = \int_{t'}^{t} G\left(\vec{u}\left(\tau\right)\right)\, d\tau \quad \text{en } Y^{s-3},$$

para $0 \leq t' \leq t \leq T$. Tomando en (3.16) el límite débil cuando $\mu \to 0^+$ obtenemos

$$\vec{u}\left(t\right) - \vec{u}\left(t'\right) = \int_{t'}^{t} G\left(\vec{u}\left(\tau\right)\right)\, d\tau \quad \text{en } Y^{s-3}$$

para $t, t' \in [0,T]$. Por [6, Teorema 1.4.35], $\vec{u} \in \mathrm{AC}\left([0,T], Y^{s-3}\right)$ y satisface (1.2) c.e.t. el intervalo $[0,T]$.

Para completar la demostración de existencia mostraremos que $\vec{u} \in C\left([0,T] : Y^s\right)$, pues esto y el hecho que $\vec{u}$ satisface (1.2) c.e.t. $t \in [0,T]$ implican que $\vec{u} \in C^1\left([0,T] : Y^{s-3}\right)$. Para esto probaremos antes la unicidad en $\mathrm{C_w}\left([0,T] : Y^s\right) \cap \mathrm{AC}\left([0,T] : Y^{s-3}\right)$. En efecto, si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathrm{C_w}\left([0,T] : Y^s\right) \cap \mathrm{AC}\left([0,T] : Y^{s-3}\right)$ satisfacen (1.2) c.e.t. el intervalo $[0,T]$, definiendo $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$, $\vec{u} = (u, v)$ y $\vec{v} = (u_1, v_1)$, tenemos que $\vec{w}$ satisface

$$\begin{cases} \partial_t w_1 + \partial_x^3 w_1 + \partial_x^{-1} w_1 + \partial_x\left(h_1 w_1 - h_2 w_2\right) = 0 \\ \partial_t w_2 - \partial_x^3 w_2 - \partial_x^{-1} w_2 - \partial_x\left(h_3 w_1 - h_4 w_2\right) = 0 \\ w_1\left(0\right) = 0 \\ w_2\left(0\right) = 0, \end{cases}$$

en donde

$$\begin{cases} h_1 = u^2 + u u_1 + u_1^2 - v_1^2 \\ h_2 = u\left(v + v_1\right) \\ h_3 = \left(u + u_1\right) v_1 \\ h_4 = v^2 + v v_1 + v_1^2 - u^2. \end{cases}$$

Como $\vec{w} \in Y^s$ y $\partial_t \vec{w} \in Y^{s-3}$, usando integración por partes, la desigualdad de Cauchy-Schwartz, inmersión de Sobolev y la desigualdad triangular, obtenemos

$$\partial_t \left\| \vec{w}\,(t) \right\|_{Y^0}^2 \quad \leq \quad C_s \left\| \vec{w}\,(t) \right\|_{Y^0}, \tag{3.17}$$

c.e.t. $t \in [0,T]$. Integrando (3.17) de 0 a t tenemos

$$\left\| \vec{w}\,(t) \right\|_{Y^0}^2 \leq C_s \int_0^t \left\| \vec{w}\,(\tau) \right\|_{Y^0} d\tau, \quad t \in [0,T]$$

de donde, utilizando la desigualdad de Gronwall, sigue que

$$\left\| \vec{w}\,(t) \right\|_{Y^0}^2 \leq 0, \quad t \in [0,T].$$

Luego $\vec{u}\,(t) = \vec{v}\,(t)$ en Y^0 para $t \in [0,T]$.

Sea ahora $\vec{\psi} = (\psi_1, \psi_2) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$, entonces si $\vec{u} = (u, v)$ y $\vec{v} = (u_1, v_1)$,

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{w}\,(t), \vec{\psi} \right\rangle_{Y^s} \quad = \quad & \left\langle u\,(t) - u_1\,(t), J^{2s}\psi_1 \right\rangle_{L^2} \\ & + \left\langle \partial_x^{-1} \left(u\,(t) - u_1\,(t) \right), \partial_x^{-1} J^{2s} \psi_1 \right\rangle_{L^2} \\ & + \left\langle v\,(t) - v_1\,(t), J^{2s}\psi_2 \right\rangle_{X^0} \\ & + \left\langle \partial_x^{-1} \left(v\,(t) - v_1\,(t) \right), \partial_x^{-1} J^{2s} \psi_2 \right\rangle_{L^2}, \end{aligned}$$

luego, la desigualdad de Cauchy-Schwartz implica

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{w}\,(t), \vec{\psi} \right\rangle_{Y^s} \quad \leq \quad & \left\| u\,(t) - u_1\,(t) \right\|_{X^0} \left(\left\| J^{2s}\psi_1 \right\|_{L^2} + \left\| \partial_x^{-1} J^{2s}\psi_1 \right\|_{L^2} \right) \\ & + \left\| v\,(t) - v_1\,(t) \right\|_{X^0} \left(\left\| J^{2s}\psi_2 \right\|_{L^2} + \left\| \partial_x^{-1} J^{2s}\psi_2 \right\|_{L^2} \right) \\ \leq \quad & \left\| \vec{w}\,(t) \right\|_{Y^0} \left(\left\| \psi_1 \right\|_{H^{2s}} + \left\| \partial_x^{-1} \psi_1 \right\|_{H^{2s}} \right) \\ & + \left\| \vec{w}\,(t) \right\|_{Y^0} \left(\left\| \psi_2 \right\|_{H^{2s}} + \left\| \partial_x^{-1} \psi_2 \right\|_{H^{2s}} \right) \\ \leq \quad & C \left\| \vec{w}\,(t) \right\|_{Y^0} \left(\left\| \psi_1 \right\|_{X^{2s}} + \left\| \psi_2 \right\|_{X^{2s}} \right) \\ \leq \quad & C \left\| \vec{w}\,(t) \right\|_{Y^0} \left\| \vec{\psi} \right\|_{Y^{2s}}. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ es denso en Y^s, obtenemos $\vec{u}\,(t) = \vec{v}\,(t)$ en Y^s para $t \in [0,T]$, y por tanto la unicidad en $\mathrm{C_w}\left([0,T] : Y^s\right) \cap \mathrm{AC}\left([0,T] : Y^{s-3}\right)$.

Probaremos ahora que $\vec{u} \in C\left([0,T] : Y^s\right)$. Primero veamos que $\vec{u}$ es continua a la derecha de 0 en Y^s. En efecto, como $\vec{u} \in \mathrm{C_w}\left([0,T] : Y^s\right)$ es inmediato que

$$\mathrm{w-}\lim_{t\to 0^+} \vec{u}\,(t) = \vec{\varphi} \;\; \text{en } Y^s, \tag{3.18}$$

y de (3.1)

$$\limsup_{t\to 0^+} \|\vec{u}\,(t)\|_{Y^s} \leq \lim_{t\to 0^+} \rho^{\frac{1}{2}}\,(t) = \|\vec{\varphi}\|_{Y^s} \tag{3.19}$$

y la afirmación sigue de (3.18) y (3.19) por [4, Proposición III.30].

Veamos ahora que $\vec{u}$ es continua a la derecha de $\tau \in \,]0,T[$. En efecto, definimos $\vec{v}\,(x,t) = \vec{u}\,(x,t+\tau)$ con $t \in [0, T-\tau[$, entonces $\vec{v} \in \mathrm{C_w}\left([0,T-\tau] : Y^s\right) \cap \mathrm{AC}\left([0,T-\tau] : Y^{s-3}\right)$ y satisface

$$\begin{cases} \partial_t \vec{v}\,(t) + A\vec{v}\,(t) + \partial_x \vec{F}\,(\vec{v}\,(t)) = 0, & \text{c.e.t. } t \\ \vec{v}\,(0) = \vec{u}\,(\tau) \end{cases} \tag{3.20}$$

que es “esencialmente” el problema estudiado, cuya solución es única y continua a la derecha de cero, así, $\vec{u}$ es continua a la derecha de τ.

Para la continuidad a la izquierda de $\tau \in \,]0,T]$, definimos $\vec{v}\,(x,t) = \vec{u}\,(-x, \tau - t)$ con $t \in [0,\tau]$. Así, $\vec{v}$ satisface (3.20). Así, $\vec{v}$ es continua a la derecha de cero y por lo tanto $\vec{u}$ es continua a la izquierda de τ.

De esta forma $\vec{u} \in C\left([0,T] : Y^s\right)$, y como $\vec{u}$ satisface (1.2) en Y^{s-3} entonces $\vec{u} \in C^1\left([0,T] : Y^{s-3}\right)$.

La Desigualdad (3.2) sigue inmediatamente de (3.11) y el estimado (2.23). $\square$

La dependencia continua puede ser establecida por la técnica de las *aproximaciones de Bona-Smith* [5]. Este método es considerado estándar por lo tanto omitiremos las demostraciones de las proposiciones 3.2, 3.3 y 3.4.

Proposición 3.2. *Sean $s > \frac{3}{2}$, $0 \leq \delta < \varepsilon < 1$ y $\vec{\varphi}_\delta = (\varphi_\delta, \psi_\delta)$, $\vec{\varphi}_\varepsilon = (\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon) \in Y^\infty$ las aproximaciones de Bona-Smith para $\vec{\varphi}$. Si $\vec{u}_\delta$ y $\vec{u}_\varepsilon$*

son las soluciones del problema (1.2) con datos iniciales $\vec{\varphi}_\delta$ *y* $\vec{\varphi}_\varepsilon$ *respectivamente, entonces para* $\overline{T} \in [0, T]$ *existe* $C = C\left(s, \overline{T}, \|\vec{\varphi}\|_{Y^s}\right) > 0$ *tal que*

$$\sup_{\left[0,\overline{T}\right]} \|\vec{u}_\delta(t) - \vec{u}_\varepsilon(t)\|_{Y^s} \leq C\left(\varepsilon^{\frac{s\nu}{1+\nu}} + \|\vec{\varphi}_\delta - \vec{\varphi}_\varepsilon\|_{Y^s}\right) \tag{3.21}$$

donde $0 \leq \nu < \frac{3}{2}$.

Proposición 3.3. *Sean* $\vec{u}_\varepsilon$ *y* $\vec{u}$ *las soluciones del problema (1.2) en* $\left[0, \overline{T}\right]$ *con datos iniciales* $\vec{\varphi}_\varepsilon$ *y* $\vec{\varphi}$ *para* $0 < \varepsilon < 1$, *como en el teorema 3.2. Entonces* $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \vec{u}_\varepsilon = \vec{u}$ *en* $C\left(\left[0, \overline{T}\right] : Y^s\right)$.

Antes de demostrar la dependencia continua de $\vec{u}$ respecto a $\vec{\varphi}$, es necesario aún la siguiente proposición.

Proposición 3.4. *Sean* $\varepsilon > 0$, $s > \frac{3}{2}$ *y* $\lim\limits_{n \to +\infty} \vec{\varphi}_n = \vec{\varphi}$ *en* Y^s. *Entonces, dado* $\overline{T} \in \left]0, T\right[$ *existe* $N_0 = N_0\left(\overline{T}\right)$ *tal que las soluciones* $\vec{u}_{\varepsilon,n}$ *y* $\vec{u}_\varepsilon$ *del problema (1.2) en* $\left[0, \overline{T}\right]$ *con datos iniciales* $\vec{\varphi}_{\varepsilon,n}$ *y* $\vec{\varphi}_\varepsilon$ *respectivamente, están definidas en* $\left[0, \overline{T}\right]$ *si* $n \geq N_0$. *Además, cada vez que* $n \geq N_0$ *se cumple*

$$\sup_{t \in \left[0,\overline{T}\right]} \|\vec{u}_{\varepsilon,n}(t) - \vec{u}_\varepsilon(t)\|_{Y^s} \leq C_s\left(\varepsilon^{\frac{s\nu}{1+\nu}} + \|\vec{\varphi}_{\varepsilon,n} - \vec{\varphi}_\varepsilon\|_{Y^s}\right). \tag{3.22}$$

Con los resultados anteriores estamos listos para probar la dependencia continua. Para esto consideraremos $\vec{\varphi}_{\varepsilon,n}$ y $\vec{\varphi}_\varepsilon$ las aproximaciones de Bona-Smith asociadas a $\vec{\varphi}_\varepsilon$ y $\vec{\varphi}$, respectivamente, y las soluciones $\vec{u}_{\varepsilon,n}$ y $\vec{u}_\varepsilon$ del problema (1.2) con datos iniciales $\vec{\varphi}_{\varepsilon,n}$ y $\vec{\varphi}_\varepsilon$ respectivamente.

Teorema 3.5. *Sean* $\vec{\varphi} \in Y^s$ *con* $s > \frac{3}{2}$ *y* $\vec{u} \in C([0, T] : Y^s)$ *la solución del problema de valor inicial (1.2) con dato inicial* $\vec{\varphi}$ *que satisface (2.21). Si* $\{\vec{\varphi}_n\}_{n \geq 1}$ *es una sucesión en* Y^s *convergente a* $\vec{\varphi}$ *en* Y^s *y* $\{\vec{u}_n\}_{n \geq 1}$ *es una sucesión en* $C([0, T_n] : Y^s)$ *de soluciones de (1.2) con* $\vec{u}_n(0) = \vec{\varphi}_n$.

Entonces, para todo $\overline{T} \in \left]0, T\right[$ *existe* $N_0 = N_0\left(\overline{T}\right)$ *tal que para* $n \geq N_0$*,* $\vec{u}_n$ *está definida en* $\left[0, \overline{T}\right]$ *y*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{\left[0,\overline{T}\right]} \left\|\vec{u}_n\left(t\right) - \vec{u}\left(t\right)\right\|_{Y^s} = 0. \tag{3.23}$$

Demostración. Como los estimados para $\left\|\vec{u}_n\left(t\right)\right\|_{Y^s}$ son los mismos que para $\left\|\vec{u}_{\varepsilon,n}\left(t\right)\right\|_{Y^s}$, la existencia de $N_0 = N_0\left(\overline{T}\right)$ tal que $n \geq N_0$ implica que $\vec{u}_n$ está definida en $\left[0, \overline{T}\right]$, se prueba como en el teorema 3.4. Sea $\varepsilon \in \left]0, 1\right[$, entonces como en (3.21), tenemos

$$\sup_{\left[0,\overline{T}\right]} \left\|\vec{u}_{\delta,n}\left(t\right) - \vec{u}_{\varepsilon,n}\left(t\right)\right\|_{Y^s} \leq C\left(\varepsilon^{\frac{s\nu}{1+\nu}} + \left\|\vec{\varphi}_{\delta,n} - \vec{\varphi}_{\varepsilon,n}\right\|_{Y^s}\right)$$

con $0 \leq \nu < \frac{3}{2}$ y $C = C\left(s, \overline{T}, \left\|\vec{\varphi}\right\|_{Y^s}\right)$. Por lo tanto, si $\delta \to 0^+$ obtenemos

$$\sup_{\left[0,\overline{T}\right]} \left\|\vec{u}_n\left(t\right) - \vec{u}_{\varepsilon,n}\left(t\right)\right\|_{Y^s} \leq C\left(\varepsilon^{\frac{s\nu}{1+\nu}} + \left\|\vec{\varphi}_n - \vec{\varphi}_{\varepsilon,n}\right\|_{Y^s}\right).$$

Pero tenemos que $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \vec{\varphi}_{\varepsilon,n} = \vec{\varphi}_n$ en Y^s, uniformemente en n. Luego

$$\sup_{\left[0,\overline{T}\right]} \left\|\vec{u}_n\left(t\right) - \vec{u}_{\varepsilon,n}\left(t\right)\right\|_{Y^s} \to 0 \text{ cuando } \varepsilon \to 0^+ \tag{3.24}$$

uniformemente en n. Entonces, para $n \geq N_0$ consideremos,

$$\begin{aligned} \left\|\vec{u}_n\left(t\right) - \vec{u}\left(t\right)\right\|_{Y^s} \leq\ & \left\|\vec{u}_n\left(t\right) - \vec{u}_{\varepsilon,n}\left(t\right)\right\|_{Y^s} \\ & + \left\|\vec{u}_{\varepsilon,n}\left(t\right) - \vec{u}_{\varepsilon}\left(t\right)\right\|_{Y^s} + \left\|\vec{u}_{\varepsilon}\left(t\right) - \vec{u}\left(t\right)\right\|_{Y^s}. \end{aligned}$$

Así, de (3.22) sigue que

$$\begin{aligned} \left\|\vec{u}_n\left(t\right) - \vec{u}\left(t\right)\right\|_{Y^s} \leq\ & \left\|\vec{u}_n\left(t\right) - \vec{u}_{\varepsilon,n}\left(t\right)\right\|_{Y^s} \\ & + C_s\left(\varepsilon^{\frac{s\nu}{1+\nu}} + \left\|\vec{\varphi}_{\varepsilon,n} - \vec{\varphi}_{\varepsilon}\right\|_{Y^s}\right) + \left\|\vec{u}_{\varepsilon}\left(t\right) - \vec{u}\left(t\right)\right\|_{Y^s}, \end{aligned}$$

tomando el límite cuando $\varepsilon \to 0^+$, de (3.24) y la proposición 3.3 sigue que

$$\sup_{t\in\left[0,\overline{T}\right]} \left\|\vec{u}_n\left(t\right) - \vec{u}\left(t\right)\right\|_{Y^s} \leq C_s \left\|\vec{\varphi}_n - \vec{\varphi}\right\|_{Y^s}$$

de donde obtenemos (3.23) inmediatamente. □

4. Propiedades Dispersivas y Efectos Suavizantes

En esta sección se estudiará el problema lineal (2.1). En el teorema 2.2 vimos que si $s \geq 0$ es un número real cualquiera, el operador lineal $-A : Y^{s+3} \subseteq Y^s \to Y^s$ es el generador de un grupo de operadores unitarios $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ sobre Y^s tal que

$$W(t)\vec{u} = (W_1(t)u_1, W_2(t)u_2), \tag{4.1}$$

para todo $\vec{u} = (u_1, u_2) \in Y^s$, en donde para $k = 1, 2$ los operadores $W_k(t)$ son los multiplicadores de Fourier definidos por

$$\widehat{W_k(t)\,v}(\xi) = e^{\phi_k(\xi)t}\widehat{v}(\xi) \quad \text{con } \phi_k(\xi) = (-1)^{k+1} i\left(\xi^3 + \frac{1}{\xi}\right).$$

Además, cualquiera sea $\vec{\varphi} = (\varphi, \psi) \in Y^{s+3}$ la función

$$\vec{u}(\cdot) = W(\cdot)\vec{\varphi} : [0, +\infty[\to Y^s$$

definida por

$$\vec{u}(t) = W(t)\vec{\varphi}$$

es la única solución del problema de valor inicial (2.1). De este modo, si $\vec{u} = (u, v)$ y $\vec{\varphi} = (\varphi, \psi)$ tenemos

$$u(t) = \left(e^{t\phi_1(\xi)}\widehat{\varphi}(\xi)\right)^{\vee}(x) \quad \text{y} \quad v(t) = \left(e^{t\phi_2(\xi)}\widehat{\varphi}(\xi)\right)^{\vee}(x). \tag{4.2}$$

Como $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ es un grupo de operadores unitarios sobre Y^s, para cualquier $s \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\|W(t)\vec{u}\|_{Y^s} = \|\vec{u}\|_{Y^s}, \tag{4.3}$$

en consecuencia, ningún efecto suavizante se puede esperar del grupo $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ en los espacios H^s, de ahí la necesidad de buscarlos en otros espacios.

Veamos la propiedad dispersiva en los espacios L^p del grupo $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ definido por (4.1).

Proposición 4.1. *Sea $h_k(\alpha,\xi) = \alpha\xi + \phi_k(\xi)$, $k = 1, 2$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\phi_k(\xi) = (-1)^{k+1}\left(\xi^3 + \frac{1}{\xi}\right)$. Entonces para $t > 0$ y $k = 1, 2$ se cumple que*

$$\sup_{\alpha\in\mathbb{R}}\left|\int_{\mathbb{R}} e^{ith_k(\alpha,\xi)}d\xi\right| \leq C\,|t|^{-1/2}\,, \tag{4.4}$$

donde $C = C(\alpha)$.

Demostración. Derivando dos veces a h_k respecto de ξ tenemos para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

$$h_k'(\alpha,\xi) = \alpha + \phi_k'(\xi) = \alpha + (-1)^{k+1}\left(3\xi^2 - \frac{1}{\xi^2}\right)$$

y

$$h_k''(\alpha,\xi) = \phi_k''(\xi) = (-1)^{k+1}\,2\left(3\xi + \frac{1}{\xi^3}\right).$$

Por tanto, las proposiciones 1.4 y 1.5 implican

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}} e^{ith_k(\alpha,\xi)}d\xi\right| &\leq \left|\int_{\varepsilon\leq|\xi|\leq 1} e^{ith_k(\alpha,\xi)}d\xi\right| + \left|\int_{|\xi|\geq 1} e^{ith_k(\alpha,\xi)}d\xi\right| \\
&\leq C\,|t|^{-1/2} + 4\left(\min_{|\xi|\geq 1}|th_k''(\xi)|\right)^{-1/2} \\
&\leq C\,|t|^{-1/2} + 4\,|t|^{-1/2}\left(\min_{|\xi|\geq 1}|h''(\xi)|\right)^{-1/2} \\
&\leq C\,|t|^{-1/2}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.2. *Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y $2 < q < \infty$ y $\varphi \in L^p$, entonces para $k = 1, 2$ se cumple que*

$$\|W_k(t)\varphi\|_{L^q} \leq Ct^{-(1/2-1/p)}\,\|\varphi\|_{L^p}\,. \tag{4.5}$$

donde $C = C(p)$ es una constante.

Demostración. Por la ecuación (4.3) sigue que $W_k(t)$ es un operador lineal de tipo fuerte $(2,2)$ y norma $M_0 = 1$, es decir,

$$\|W_k(t)\varphi\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2}. \tag{4.6}$$

Además, para $k = 1, 2$ podemos escribir,

$$\begin{aligned} W_k(t)\varphi &= \left(e^{t\phi_k(\xi)}\widehat{\varphi}(\xi)\right)^{\vee}(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}e^{(-1)^{k+1}it\left(\xi^3+\frac{1}{\xi}\right)}\widehat{\varphi}(\xi)\,d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi+(-1)^{k+1}it\left(\xi^3+\frac{1}{\xi}\right)}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi y}\varphi(y)\,dy\right)d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi(x-y)+(-1)^{k+1}it\left(\xi^3+\frac{1}{\xi}\right)}d\xi\right)\varphi(y)\,dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\varphi(y)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{it\left[\xi\left(\frac{x-y}{t}\right)+(-1)^{k+1}\left(\xi^3+\frac{1}{\xi}\right)\right]}d\xi\right)dy. \end{aligned}$$

Por consiguiente, usando la desigualdad (4.4), obtenemos

$$\begin{aligned} |W_k(t)\varphi| &\le \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}|\varphi(y)|\left|\left(\int_{\mathbb{R}} e^{it\left[\xi\left(\frac{x-y}{t}\right)+(-1)^{k+1}\left(\xi^3+\frac{1}{\xi}\right)\right]}d\xi\right)\right|dy \\ &\le \frac{1}{2\pi}C|t|^{-1/2}\int_{\mathbb{R}}|\varphi(y)|\,dy \\ &= C|t|^{-1/2}\|\varphi\|_{L^1}, \end{aligned}$$

de donde, $W_k(t)$ es un operador lineal de tipo fuerte $(1,\infty)$ y norma $M_1 \le C|t|^{-1/2}$, esto es,

$$\|W_k(t)\varphi\|_{L^\infty} \le C|t|^{-1/2}\|u_k\|_{L^1}. \tag{4.7}$$

Combinando (4.6) y (4.7) con el Teorema de Riesz-Thorin, obtenemos que $W_k(t)$ es un operador lineal de tipo (p_θ, q_θ) con $\frac{1}{p_\theta}+\frac{1}{q_\theta}=1$, $\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{q_0}$, $2<q_0<\infty$ y norma $M_\theta \le M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}$. Por tanto,

$$\frac{\|W_k(t)\varphi\|_{L^{q_\theta}}}{\|\varphi\|_{L^{p_\theta}}} \le M_\theta \le M_0^{1-\theta}M_1^{\theta} \le (1)^{1-\theta}\left(C|t|^{-1/2}\right)^{\theta} \le C|t|^{-\theta/2}.$$

de donde obtenemos (4.5) después de escribir p y q en vez de p_θ y q_θ. □

El siguiente resultado describe la propiedades suavizantes globales de tipo Strichartz del grupo $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$.

Teorema 4.3. *Si p y q son números reales positivos tales que*

$$2 \leq p \leq \infty \quad y \quad \frac{2}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}, \tag{4.8}$$

y $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = \frac{1}{q}+\frac{1}{q'} = 1$, entonces para $k = 1, 2$ se cumplen las desigualdades

$$\|W_k(\cdot_t) f\|_{L_t^q L_x^p} = \left(\int_{\mathbb{R}} \|W_k(t) f(\cdot_x)\|_{L_x^p}^q \, dt\right)^{1/q} \leq C \|f\|_{L_x^2} \tag{4.9}$$

$$\left\|\int_{\mathbb{R}} W_k(\cdot_t - \tau) g(\cdot_x, t) \, dt\right\|_{L_t^q L_x^p} \leq C \|g\|_{L_t^{q'} L_x^{p'}} \tag{4.10}$$

y

$$\left\|\int_{\mathbb{R}} W_k(\cdot_t) g(\cdot_x, t) \, dt\right\|_{L_x^2} \leq C \|g\|_{L_t^{q'} L_x^{p'}} \tag{4.11}$$

en donde $C = C(p)$ es una constante.

Demostración. Por el teorema de Fubini tenemos

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} (W_k(t) f)(x) g(x,t) \, dx \, dt = \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}} W_k(t) g(x,t) \, dt\right) dx.$$

Usando dualidad y la definición de supremo,

$$\begin{aligned}
&\|h(\cdot_x, \cdot_t)\|_{L_t^q L_x^p} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} \|h(\cdot_x, t)\|_{L_x^p}^q \, dt\right)^{1/q} \\
&= \sup\left\{\left|\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} h(x,t) \; w(x,t) \, dx \, dt\right| : w \in L_t^{q'} L_x^{p'} \text{ y } \|w\|_{L_t^{q'} L_x^{p'}} = 1\right\}
\end{aligned}$$

podemos demostrar que (4.9) y (4.11) son equivalentes. Por el teorema de Fubini, la desigualdad integral de Minkowski y la desigualdad de Hölder obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\|W(\cdot_t) f\|_{L_t^q L_x^p} \\
&= \frac{1}{\|g\|_{L_t^{q'} L_x^{p'}}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}} W(t) g(x,t)\, dt \right) dx \right| \\
&= \frac{1}{\|g\|_{L_t^{q'} L_x^{p'}}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \left| \int_{\mathbb{R}} W(t) g(x,t)\, dt \right| dx \\
&\leq \frac{1}{\|g\|_{L_t^{q'} L_x^{p'}}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} W(t) g(x,t)\, dt \right|^2 dx \right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{\|g\|_{L_t^{q'} L_x^{p'}}} \|f\|_{L_x^2} \left\| \int_{\mathbb{R}} W(t) g(\cdot_x, t)\, dt \right\|_{L_x^2}.
\end{aligned}
$$

Un argumento debido a Tomas y el teorema de Fubini implican que

$$
\begin{aligned}
&\left\| \int_{\mathbb{R}} W_k(t) g(\cdot_x, t)\, dt \right\|_{L_x^2}^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} W_k(t) g(x,t)\, dt \right) \overline{\left(\int_{\mathbb{R}} W_k(\tau) g(x,\tau)\, d\tau \right)} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} W_k(t) \left(\int_{\mathbb{R}} W_k(-\tau) \overline{g(x,\tau)} d\tau \right) g(x,t)\, dt dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} W_k(t-\tau) \overline{g(x,\tau)} d\tau \right) g(x,t)\, dx dt \\
&= \|g\|_{L_t^{q'} L_x^{p'}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} h(x,t) \frac{g(x,t)}{\|g\|_{L_t^{q'} L_x^{p'}}} dx dt.
\end{aligned}
$$

donde

$$
h(x,t) = \int_{\mathbb{R}} W_k(t-\tau) \overline{g(x,\tau)} d\tau.
$$

Notemos que por dualidad

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} h\left(x,t\right)\frac{g\left(x,t\right)}{\left\|g\right\|_{L_t^{q'}L_x^{p'}}}dxdt \\
&\leq \sup\left\{\left|\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} h\left(x,t\right)w\left(x,t\right)dx\,dt\right| : w\in L_t^{q'}L_x^{p'} \text{ y } \left\|w\right\|_{L_t^{q'}L_x^{p'}}=1\right\} \\
&= \left\|h\right\|_{L_t^{q}L_x^{p}},
\end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned}
\left\|\int_{\mathbb{R}} W_k\left(t\right)g\left(\cdot_x,t\right)dt\right\|_{L_x^2}^2 &\leq \left\|g\right\|_{L_t^{q'}L_x^{p'}}\left\|h\right\|_{L_t^{q}L_x^{p}} \\
&= \left\|g\right\|_{L_t^{q'}L_x^{p'}}\left\|\int_{\mathbb{R}} W_k\left(\cdot_t-\tau\right)\overline{g\left(\cdot_x,\tau\right)}d\tau\right\|_{L_t^{q}L_x^{p}}.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\left\|W_k\left(\cdot_t\right)f\right\|_{L_t^{q}L_x^{p}} \leq \frac{1}{\left\|g\right\|_{L_t^{q'}L_x^{p'}}^{1/2}}\left\|f\right\|_{L_x^2}\left\|\int_{\mathbb{R}} W_k\left(\cdot_t-\tau\right)\overline{g}\left(\cdot_x,\tau\right)d\tau\right\|_{L_t^{q}L_x^{p}}.$$

Por lo tanto, el problema se reduce a probar (4.10).

Entonces

$$\begin{aligned}
\left\|\int_{\mathbb{R}} W_k\left(\cdot_t-\tau\right)\overline{g}\left(\cdot_x,\tau\right)d\tau\right\|_{L_x^{p}} &\leq \int_{\mathbb{R}}\left\|W_k\left(\cdot_t-\tau\right)\overline{g}\left(\cdot_x,\tau\right)\right\|_{L_x^{p}}d\tau \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}}\left|t-\tau\right|^{-\alpha}\left\|g\left(\cdot_x,\tau\right)\right\|_{L_x^{p'}}d\tau,
\end{aligned}$$

con $\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}\right)$. El Teorema de la Integral Fraccionaria implica

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}}\left\|\int_{\mathbb{R}} W_k\left(\cdot_t-\tau\right)\overline{g}\left(\cdot_x,\tau\right)d\tau\right\|_{L_x^{p}}^{q}dt\right)^{1/q} &\leq C\left\|\int_{\mathbb{R}}\frac{\left\|g\left(\cdot_x,\tau\right)\right\|_{L_x^{p'}}}{\left|t-\tau\right|^{1-(1-\alpha)}}d\tau\right\|_{L_t^{q}} \\
&\leq C\left\|\left\|g\right\|_{L_x^{p'}}\right\|_{L_t^{q'}} \\
&= C\left\|g\right\|_{L_t^{q'}L_x^{p'}}
\end{aligned}$$

donde $\frac{1}{q'} = \frac{1}{q} + (1-\alpha)$ y $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, entonces $\frac{2}{q} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{p}\right)$. El resultado ahora sigue. $\square$

En particular, (4.9) nos dice que si $f \in L^2$, entonces $W_k(t) f \in L^p$ para algún $p \in [2, \infty]$ para casi todo $t \in \mathbb{R}$. Por ejemplo, si $p = \infty$ y $q = 4$, para $f \in L^2$ tenemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \|W_k(t) f\|_{L_x^\infty}^4\right)^{1/4} \leq C \|f\|_{L_x^2},$$

lo cual implica que $W_k(t) f \in L^\infty$ para casi todo $t \in \mathbb{R}$.

Hemos probado el teorema 4.3 sobre el intervalo $\mathbb{R}$, sin embargo, el mismo argumento usado en la prueba muestra que los resultados son válidos para cualquier intervalo de tiempo $[-T, T]$.

Corolario 4.4. *Si los pares ordenados (p_0, q_0) y (p_1, q_1) satisfacen la condición (4.8) del teorema 4.3, entonces para todo $T > 0$ tenemos*

$$\left(\int_0^T \left\|\int_0^t W_k(t-\tau) g(\cdot_x, \tau)\, d\tau\right\|_{L_x^{p_1}}^{q_1} dt\right)^{1/q_1} \leq C \left(\int_0^T \|g(\cdot_x, t)\|_{L_x^{p_0'}}^{q_0'} dt\right)^{1/q_0'}$$

con $C = C(p_0, p_1)$.

Demostración. Los puntos $\left(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{q_0}\right)$, $\left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1}\right)$ están en el segmento de recta que contienen a los puntos $P\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $Q\left(0, \frac{1}{4}\right)$. En efecto, la recta que contiene a P y Q es $L : y = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)$, entonces

$$\left(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{q_0}\right) \in L \Leftrightarrow \frac{1}{q_0} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{2}{q_0} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p_0}$$

y

$$\left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1}\right) \in L \Leftrightarrow \frac{1}{q_1} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{2}{q_1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p_1},$$

relaciones que satisfacen (4.8).

Sin pérdida de generalidad, asumamos que $p_0 \in [2, p_1[$, entonces para $0 \le t \le T$ tenemos

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_0^T \left\|\int_0^t W_k(t-\tau)\, g(\cdot_x,\tau)\, d\tau\right\|_{L_x^{p_1}}^{q_1} dt\right)^{\frac{1}{q_1}} \\
&\qquad = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left\|\int_{-\infty}^{\infty} W_k(t-\tau)\, g(\cdot_x,\tau)\, \chi_{[0,t]}(\tau)\, d\tau\right\|_{L_x^{p_1}}^{q_1} dt\right)^{\frac{1}{q_1}} \\
&\qquad \le c\left(\int_{-\infty}^{\infty} \left\|g(\cdot_x,\tau)\, \chi_{[0,t]}(\tau)\, d\tau\right\|_{L_x^{p_1'}}^{q_1'} dt\right)^{\frac{1}{q_1'}} \\
&\qquad \le c\left(\int_0^T \left\|g(\cdot_x,\tau)\, d\tau\right\|_{L_x^{p_1'}}^{q_1'} dt\right)^{\frac{1}{q_1'}}
\end{aligned}
$$

Por otro lado, como $W_k(t)$ es una isometría tenemos

$$
\begin{aligned}
& \left\|\int_0^t W_k(t-\tau)\, g(\cdot_x,\tau)\, d\tau\right\|_{L_x^2} \\
= \; & \left\|\int_{-\infty}^{+\infty} W_k(s)\, g(\cdot_x,-s)\, \chi_{[-t,0]}(s)\, ds\right\|_{L_x^2} \\
\le \; & c\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left\|g(\cdot_x,-s)\, \chi_{[-t,0]}(s)\right\|_{L_x^{p_1'}}^{q_1'} ds\right)^{1/q_1'} \\
= \; & c\left(\int_{-t}^{0} \left\|g(\cdot_x,-s)\right\|_{L_x^{p_1'}}^{q_1'} ds\right)^{1/q_1'} \\
= \; & c\left(\int_0^t \left\|g(\cdot_x,\tau)\right\|_{L_x^{p_1'}}^{q_1'} d\tau\right)^{1/q_1'}
\end{aligned}
$$

por lo que

$$
\sup_{[0,T]} \left\|\int_0^t W_k(t-\tau)\, g(\cdot_x,\tau)\, d\tau\right\|_{L_x^2} \le c\left(\int_0^T \left\|g(\cdot_x,\tau)\right\|_{L_x^{p_1'}}^{q_1'} d\tau\right)^{1/q_1'} .
$$

Usando esas estimativas y la desigualdad de Hölder tenemos

$$\left(\int_0^T \left\|\int_0^t W_k\left(t-\tau\right) g\left(\cdot_x,\tau\right) d\tau\right\|_{L_x^{p_0}}^{q_0} dt\right)^{\frac{1}{q_0}} \leq c\left(\int_0^T \left\|g\left(\cdot_x,\tau\right)\right\|_{L_x^{p_1'}}^{q_1'} d\tau\right)^{1/q_1'}.$$

Para terminar la prueba, un argumento de dualidad nos permite escribir la desigualdad

$$\left(\int_0^T \left\|\int_0^t W_k\left(t-\tau\right) g\left(\cdot_x,\tau\right) d\tau\right\|_{L_x^{p_1}}^{q_1} dt\right)^{\frac{1}{q_1}} \leq c\left(\int_0^T \left\|g\left(\cdot_x,\tau\right)\right\|_{L_x^{p_0'}}^{q_0'} d\tau\right)^{1/q_0'},$$

esto prueba el corolario. □

Referencias

[1] Ablowitz, M. J., Kaup, D. J., Newel, A. C., Segur, H.: *Nonlinear evolution equations of physical significance.* Phys. Rev. Lett., 31, (1973), 125-127.

[2] Ablowitz, M. J., Kaup, D. J., Newel, A. C., Segur, H.: *The inverse scattering transform Fourier analysis for nonlinear problems.* Studies in Apll. Math., 53, (1974), 249-315.

[3] Bezerra, F.: Ph. D. Thesis, IMPA, Rio de Janeiro (1995).

[4] Brézis, H.: *Analyse fonctionelle. Théorie et applications.* Masson, Paris (1983).

[5] Bona, J., Smith, R.: *The initial-value problem for the Korteweg-de Vries equation.* Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A **278** (1975), 555-601.

[6] Cazenave, T., Haraux, A.: *An introduction to semilinear evolution equations.* Oxford University Press, New York (1998).

[7] Iorio Jr, R. J.: *On the Cauchy problem for the Benjamin-Ono equation.* Comm. PDE, 11, (1986), 1031-1081.

[8] Iorio Jr, R. J.: *KdV, BO and friends in weighted Sobolev spaces.* Functional Analytical Methods for PDE. Lect. Notes in Math., 1450, (1990).

[9] Kato, T.: *Quasi-linear equations of evolution, with applications to partial differential equations.* Lecture and Notes in Mathematics, **448** (1975), 25-70.

[10] Kato, T., Fujita, H.: *On the non-stationary Navier-Stokes system.* Red. Sem. Mat. Uni. Padova, **32** (1962), 243-260.

[11] Kato, T. y Ponce, G.: *Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations.* Comm. Pure Appl. Math. 41 (1988), 891-907.

[12] Kenig, C.E., Ponce, G. and Vega, L.: *Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations.* Indiana U. Math. J. 40 (1991), 33-69.

[13] Kenig, C.E., Ponce, G. and Vega, L.: *Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via contraction principle.* Comm. Pure Appl. Math. 46 (1993), 527-620.

[14] Liu, Y., Varlamov, V.: *Cauchy problem for the Ostrovsky equation.* Discrete and continuous dynamical systems. Vol. 10, No. 3 (2004), 731-753.

[15] Pazy, A.: *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Apllied Mathematical Sciences, 44. Springer Verlag, New York (1983).

[16] Panthee, M.: *Properties of Solutions to Some Nonlinear Dispersive Models.* Ph. D. Thesis, IMPA, Rio de Janeiro (2004).

[17] Saut, J. C.: *Remarks on the generalized Kadomtsev-Petviashvili equations.* Indiana Univ. Math. J., 42 (1993), 1011-1026.

Abstract

The objective of this paper is to study certain properties of real solutions of an initial value problem of the form

$$\begin{cases} \partial_t u - iP_1\left(D\right)u + f_1\left(u,v\right)\partial_x u + f_2\left(u,v\right)\partial_x v = 0 \\ \partial_t g - iP_2\left(D\right)v + f_2\left(u,v\right)\partial_x u + f_3\left(u,v\right)\partial_x u = 0 \\ u\left(x,0\right) = \varphi\left(x\right) \\ v\left(x,0\right) = \psi\left(x\right), \end{cases}$$

where $u = u\left(x,t\right)$ and $v = v\left(x,t\right)$ are real-valued functions, $\left(x,t\right) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[$, $P_k\left(D\right)$ with $k = 1,2$ are pseudo-differential operators and f_j, with $j = 1,2,3$ are real functions defined on $\mathbb{R}^2$. More precisely, considering the case in which the operators $P_k\left(D\right)$ with $k = 1,2$ are defined by $\widehat{P_k\left(D\right)}\,u\left(\xi\right) = \left(-1\right)^{k+1}\left(\xi^3 + \frac{1}{\xi}\right)\widehat{u}\left(\xi\right)$, $f_1\left(u,v\right) = 3u^2 - v^2$, $f_2\left(u,v\right) = -2uv$ and $f_3\left(u,v\right) = -u^2 + 3v^2$, is shown that the initial value problem obtained is locally well formulated in Sobolev spaces $X^s \times X^s$ with $s > 3/2$, using parabolic regularization to prove the local existence and uniqueness, and so-called Bona-Smith approaches to show the continuous dependence of the solution with respect to initial data. Furthermore, using a dispersive property of the group associated with the linear problem and the ideas developed by Kenig-Ponce-Vega, are tested softening properties of Strichartz type.

Keywords: Parabolic regularization; estimates of Bona-Smith; Ostrovsky equation; local smoothing effect.

A. Mendoza Uribe
Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Agraria La Molina
`amendoza@lamolina.edu.pe`

J. Montealegre Scott
Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú
`jmscott@pucp.edu.pe`