ENTRELAZAMIENTOS DE ÁLGEBRAS Y ÁLGEBRAS DE HOPF

Jack Denne Arce Flores[1,2]

Noviembre, 2011

Resumen

En el presente artículo estudiaremos los entrelazamientos de un álgebra asociativa con unidad A y el álgebra de polinomios de Laurent $k[y^{\pm 1}]$. Asimismo, estableceremos condiciones para las cuales es posible prolongar una extensión polinomial de A a un entrelazamiento de A con $k[y^{\pm 1}]$. Por último, presentaremos dos familias de álgebras de Hopf sobre algunos entrelazados de $k[x]$ y $k[y^{\pm 1}]$

MSC(2010): 16S10, 57T05.

Palabras clave: *Álgebras de Hopf, entrelazamientos de álgebras, aplicaciones de entrelazamiento.*

[1] *Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias, PUCP.*
[2] *Proyecto DGI - 2011-0206.*

1. Introducción

Los entrelazamientos o también llamados productos tensoriales torcidos de álgebras, fueron introducidos de manera independiente por Daisuke Tambara y Shahn Majid a inicios de los 90's bajo el nombre de estructuras de factorización de álgebras. El término *factorización de álgebras* fue rebautizado como *producto tensorial torcido* por Andreas Cap, Herman Schichl y Jiri Vanzura [3], donde también surge la idea de considerar la estructura de factorización de un álgebra como representante de una variedad producto, de esta manera muchos autores la consideran como una definición apropiada para el representante del producto cartesiano de dos variedades no conmutativas, así como análogos no conmutativos de la noción de fibrado principal estudiada por Tomasz Brzeziński y Shahn Majid.

Por otro lado, el problema de clasificación concerniente a estos temas es determinar todos los posibles productos tensoriales torcidos de A con B. El primer trabajo que ataca este problema es dado por C. Cibils [2] quien estudia y soluciona completamente el caso $B = k \times k$. En [6] se extienden los métodos desarrollados por Cibils y se cubre el caso $B = k \times \cdots \times k$ (n-veces). Por otro lado, en [4] se obtienen algunos resultados parciales para los casos donde $B = k[x]$ es el anillo de polinomios y $B = k[[x]]$ el anillo de series formales. En [1] se estudia el caso en que $B = k[y^{\pm 1}]$ es el anillo de polinomios de Laurent.

En este artículo respondemos de manera parcial a la siguiente pregunta: ¿Cuándo es posible extender un entrelazamiento de A con $k[y]$ a uno de A con $k[y^{\pm 1}]$? Mostramos además una dualidad entre los entrelazamientos triangulares superiores y los inferiores. Adicionalmente encontramos dos estructuras de álgebras de Hopf sobre algunos entrelazamientos de $k[x]$ y $k[y^{\pm 1}]$.

2. Nociones Básicas

A lo largo de este artículo reservamos el término álgebra para referirnos a las k-álgebras asociativas con unidad sobre un cuerpo k, las aplicaciones lineales son siempre k-lineales, y los productos tensoriales van a ser siempre sobre k.

2.1. Generalidades y Nociones Básicas

Un entrelazamiento o producto tensorial torcido de dos álgebras A y B, es cierta estructura de álgebra asociativa con unidad sobre el espacio vectorial $A \otimes B$, tal que las aplicaciones canónicas de inclusión

$$\iota_A : A \to A \otimes B \quad \text{y} \quad \iota_B : B \to A \otimes B$$

son morfismos de álgebras y se satisface $\mu \circ (\iota_A \otimes \iota_B) = id_{A\otimes B}$, donde μ es la multiplicación del producto tensorial torcido.
Si consideramos un producto tensorial torcido de A y B, podemos definir la aplicación lineal

$$s := \mu \circ (\iota_B \otimes \iota_A) : B \otimes A \to A \otimes B$$

la cual satisface las siguientes propiedades:

1. $s(b \otimes 1) = 1 \otimes b$ y $s(1 \otimes a) = a \otimes 1$.
2. $s \circ (id_B \otimes \mu_A) = (\mu_A \otimes id_B) \circ (id_A \otimes s) \circ (s \otimes id_A)$.
3. $s \circ (\mu_B \otimes id_A) = (id_A \otimes \mu_B) \circ (s \otimes id_B) \circ (id_B \otimes s)$.

Una aplicación que satisface estas tres condiciones es llamada *aplicación de entrelazamiento* o, en inglés, *twisting map*.

Recíprocamente, si $s : B\otimes A \to A\otimes B$ es una aplicación de entrelazamiento, entonces $A\otimes B$ se convierte en un entrelazamiento, con multiplicación definida por la siguiente aplicación

$$\mu_s := (\mu_A \otimes \mu_B) \circ (id_A \otimes s \otimes id_B).$$

El entrelazamiento asociado a la aplicación s es denotado por $A \otimes_s B$.

Los entrelazamientos de A y el álgebra de polinomios en una variable $k[y]$ son estudiados en [4], bajo el nombre de *extensiones polinomiales no conmutativas*. En este caso la aplicación de entrelazamiento $s : k[y] \otimes A \to A \otimes k[y]$ se escribe

$$s(y^r \otimes a) = \sum_{j \geq 0} \gamma_j^r(a) \otimes y^j, \tag{2.1}$$

y las propiedades que definen a s como aplicación de entrelazamiento se traducen en condiciónes sobre la familia $\{\gamma_j^1\}_{j \in \mathbb{N}_0}$, como muestra la proposición 2.1, que puede encontrarse en [4], theorem 2.1.

Antes de enunciar dicho resultado fijemos las siguientes notaciones: Dada una familia de aplicaciones lineales $(\alpha_j : A \to A)_{j \geq 0}$ y un conjunto de índices $n_1, \ldots, n_r \geq 0$, denotemos:

$$|n_1, \ldots, n_r| = n_1 + \ldots + n_r \quad \text{y} \quad \alpha_{n_1 \ldots n_r} = \alpha_{n_1} \circ \ldots \circ \alpha_{n_r}$$

y escribamos:

$$\gamma_j^0 = \delta_{j0} id \quad \text{y} \quad \gamma_j^r = \sum_{|n_1, \ldots, n_r| = j} \alpha_{n_1 \ldots n_r} \quad \text{para } r > 0, \tag{2.2}$$

donde δ_{0j} denota, como es usual, el símbolo de Kronecker. Además conviene observar que $\gamma_j^1 = \alpha_j$.

Proposición 2.1. Sea A un álgebra y $s : k[y] \otimes A \to A \otimes k[y]$ una aplicación de entrelazamiento. La ecuación:

$$s(y \otimes a) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j(a) \otimes y^j,$$

define una familia de aplicaciones $\alpha_j : A \to A$ que satisface las siguientes propiedades:

a) Para cada $a \in A$ existe $j_0 \geq 0$, tal que $\alpha_j(a) = 0$ cuando $j > j_0$.

b) $\alpha_j(1) = \delta_{j1}$.

c) Para todo $j \geq 0$ y todo a, $b \in A$,

$$\alpha_j(ab) = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r(a)\gamma_j^r(b) \tag{2.3}$$

Más aún,

$$s(y^r \otimes a) = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j^r(a) \otimes y^j$$

para todo $r \geq 0$ y $a \in A$. Por otro lado, dadas aplicaciones $\alpha_j : A \to A$ ($j \geq 0$) satisfaciendo a), b) y c), esta última fórmula define un entrelazamiento poniendo $s(1 \otimes a) = a \otimes 1$.

Observación 1. La aplicación de entrelazamiento s vía la familia de aplicaciones $\{\gamma_j^i\}_{i,j\in\mathbb{N}_0}$ permite asociar a cada elemento $a \in A$ una matriz infinita $M^s(a)$ donde $M^s(a)_{ij} = \gamma_j^i(a)$ (comparar con [5, Th. 1.10]), es decir:

$$M^s(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & . \\ \gamma_0^1(a) & \gamma_1^1(a) & \gamma_2^1(a) & . \\ \gamma_0^2(a) & \gamma_1^2(a) & \gamma_2^2(a) & . \\ \gamma_0^3(a) & \gamma_1^3(a) & \gamma_2^3(a) & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

Si $\gamma_0^1 = 0$, tenemos:

$$M^s(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & \gamma_1^1(a) & \gamma_2^1(a) & \gamma_3^1(a) & . \\ 0 & 0 & \gamma_2^2(a) & \gamma_3^2(a) & . \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_3^3(a) & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

De esta manera la representación matricial suguiere la siguiente definición:

Definición 2.2. Los entrelazamientos tales que $\gamma_0^1 = 0$ serán llamados entrelazamientos *triangulares superiores* y aquellos tales que $\gamma_i^1 = 0$ para $i \geq 2$ serán llamados *triangulares inferiores*.

Ejemplo 1. [Extensiones de Ore] Si $\alpha : A \to A$ es un endomorfismo de álgebras y $\delta : A \to A$ es una α-derivación, es decir,

$$\delta(ab) = \delta(a)b + \alpha(a)\delta(b),$$

entonces existe un único entrelazamiento $s : k[y] \otimes A \to A \otimes k[y]$ tal que

$$s(y \otimes a) = \delta(a) \otimes 1 + \alpha(a) \otimes y \quad \text{para todo } a \in A.$$

Es decir, $\gamma_0^1 = \delta$ y $\gamma_1^1 = \alpha$. El producto tensorial torcido $A \otimes_s k[y]$ es isomorfo a la extensión de Ore $A[y; \alpha, \delta]$

3. Entrelazamientos de A y $k[y^{\pm 1}]$

En esta sección presentamos los entrelazamientos de un álgebra A y el álgebra de polinomios de Laurent $k[y^{\pm 1}]$. En este caso la aplicación de entrelazamiento

$$s : k[y^{\pm 1}] \otimes A \to A \otimes k[y^{\pm 1}]$$

puede ser determinada por los morfismos $\gamma_j^r : A \to A$ definidos por la siguiente ecuación:

$$s(y^r \otimes a) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \gamma_j^r(a) \otimes y^j. \tag{3.1}$$

De esta manera las condiciones impuestas sobre s se traducen en las siguientes condiciones sobre las aplicaciones γ_j^r, donde $r, j \in \mathbb{Z}$:

Proposición 3.1. Un conjunto de aplicaciones $\gamma_j^r : A \to A$ define un entrelazamiento si y solamente si las siguientes propiedades son satisfechas:

a) $\gamma_j^0 = \delta_{j0} id.$

b) $\gamma_j^r(1) = \delta_{jr}.$

c) Para todo r, $j \in \mathbb{Z}$, se tiene:

$$\gamma_j^r(ab) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k^r(a)\gamma_j^k(b).$$

d) Para todo r, $k \in \mathbb{Z}$ se tiene:

$$\gamma_j^{r+k} = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \gamma_l^r \circ \gamma_{j-l}^k.$$

e) Para cada $a \in A$ y r fijos existen $N = N(a,r)$ y $M = M(a,r)$ tal que

$$\gamma_j^r(a) = 0 \quad \text{para todo} \quad j > N(a,r) \text{ o } j < M(a,r).$$

Prueba. Para los detalles ver [1].

$\square$

Observación 2. El item d) sugiere que podemos obtener las aplicaciones γ_j^r a partir de composiciones de las aplicaciones:

$$\gamma_j^1 \text{ cuando } r > 0 \qquad\qquad \gamma_j^{-1} \text{ cuando } r < 0.$$

Definamos $\alpha_j := \gamma_j^1$ y $\beta_j := \gamma_{-j}^{-1}$ para $j \in \mathbb{Z}$, entonces

$$s(y \otimes a) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \alpha_i(a) \otimes y^i, \quad s(y^{-1} \otimes a) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \beta_j(a) \otimes y^{-j}.$$

Así, para todo $a \in A$ se tienen las siguientes igualdades:

$$a \otimes 1 = \sum_{i,\, j\in\mathbb{Z}} \alpha_i(\beta_j(a)) \otimes y^{i-j} = \sum_{i,\, j\in\mathbb{Z}} \beta_i(\alpha_j(a)) \otimes y^{j-i}.$$

Esta igualdad muestra que las familias $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ y $\{\beta_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ satisfacen las siguientes relaciones de compatibilidad:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \circ \beta_{k+l} = \delta_{0,l} id_A, \quad \text{para todo } \; l \in \mathbb{Z} \tag{3.2}$$

$$\sum_{r\in\mathbb{Z}} \beta_r \circ \alpha_{r+s} = \delta_{0,s} id_A, \text{ para todo } s \in \mathbb{Z}. \tag{3.3}$$

Para dos familias de aplicaciones

$$\alpha_i : A \to A, \ i \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad \beta_j : A \to A, \ j \in \mathbb{Z}$$

e índices $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{Z}$; consideremos las siguientes notaciones:

$|n_1, \ldots, n_r| = n_1 + \ldots + n_r, \beta_{n_1 \ldots n_r} = \beta_{n_1} \circ \ldots \circ \beta_{n_r} \alpha_{n_1 \ldots n_r} = \alpha_{n_1} \circ \ldots \circ \alpha_{n_r}.$

Con estos datos podemos construir aplicaciones $\gamma_j^r : A \to A$. Para esto escribamos: $\gamma_j^0 = \delta_{0j} id_A$,

$$\gamma_j^{-r} = \sum_{|n_1,\ldots,n_r|=j} \beta_{n_1\ldots n_r} \text{ para } r > 0, \ \gamma_j^r = \sum_{|n_1,\ldots,n_r|=j} \alpha_{n_1\ldots n_r} \text{ para } r > 0. \tag{3.4}$$

Observemos que $\gamma_j^{-1} = \beta_j$ y $\gamma_j^1 = \alpha_j$.

En resumen obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 3.2. Sea A un álgebra y $s : k[y^{\pm 1}] \otimes A \to A \otimes k[y^{\pm 1}]$ una aplicación de entrelazamiento. Las ecuaciones:

$$s(y \otimes a) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha_j(a) \otimes y^j, \qquad s(y^{-1} \otimes a) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \beta_j(a) \otimes y^j$$

definen dos familias de aplicaciones $\alpha_j, \beta_j : A \to A$ que satisfacen las siguientes propiedades:

a) Las condiciones de compatibilidad 3.2 y 3.3

b) Para cada $a \in A$ existen $i_0 \leq 0$ y $j_0 \geq 0$, tal que $\alpha_j(a) = 0, \ \beta_j(a) = 0$ cuando $j < i_0$ y $j > j_0$.

c) $\alpha_j(1) = \delta_{j1} = \beta_j(1)$.

d) Para todo $j \geq 0$ y todo a, $b \in A$,

$$\alpha_j(ab) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} \alpha_r(a)\gamma_j^r(b), \text{ y } \beta_j(ab) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} \beta_r(a)\gamma_j^{-r}(b),$$

donde γ_j^r se definen en (3.4).

Más aún,

$$s(y^r \otimes a) = \sum_{j=0} \gamma_j^r(a) \otimes y^j$$

para todo $r \in \mathbb{Z}$ y $a \in A$.

Por otro lado, dadas aplicaciones $\alpha_j, \beta_j : A \to A$ ($j \in \mathbb{Z}$) satisfaciendo a), b), c) y d), esta última fórmula define un entrelazamiento.

Ejemplo 2. Sea $q \in k^*$ y $A = k[x]$ el álgebra de polinomios en una variable, entonces las aplicaciones

$$\alpha_1(x) = qx, \quad \beta_1(x) = q^{-1}x \quad \text{y} \quad \alpha_i = 0 = \beta_i, \quad i \neq 1$$

definen un entrelazamiento de $k[x]$ y $k[y^{\pm 1}]$, vía el corolario 3.2. Por otro lado, $H = k[x] \otimes_s k[y^{\pm 1}]$ puede ser considerada como el álgebra generada por y, y^{-1}, x, sujeta a las relaciones: $yx = qxy, \quad yy^{-1} = 1 = y^{-1}y$.

Observación 3. En el ejemplo 2 conviene resaltar que las aplicaciones $\{\alpha_i\}_{i\geq 0}$ y $\{\beta_j\}_{j\geq 0}$ vía la proposición 2.1 definen entralazamientos de A con $k[y]$ y de A con $k[y^{-1}]$, respectivamente.

La siguiente definición recoge a los entrelazamientos con esta propiedad.

Definición 3.3. Un entrelazamiento de A y $k[y^{\pm 1}]$ será llamado *separable*, si las aplicaciones $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ y $\{\beta_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ asociadas vía el corolario 3.2, satisfacen las siguientes condiciones:

1. Si $i < 0$, entonces $\alpha_i = \beta_i = 0$,

2. Las aplicaciones $\{\alpha_i\}_{i\geq 0}$ y $\{\beta_j\}_{j\geq 0}$, vía la proposición 2.1, definen entralazamientos de A con $k[y]$ y de A con $k[y^{-1}]$, respectivamente.

Observación 4. Si las aplicaciones $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ y $\{\beta_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ definen un entrelazamiento separable de A y $k[y^{\pm 1}]$ vía el corolario 3.2, entonces las ecuaciones de compatibilidad (3.2) y (3.3) se convierten en las siguientes:

$$\sum_{k\geq 0} \alpha_k \circ \beta_{k+l} = \delta_{0,l} id_A \ \forall \ \ l \in \mathbb{Z} \tag{3.5}$$

$$\sum_{k\geq 0} \beta_k \circ \alpha_{k+l} = \delta_{0,l} id_A \ \forall \ \ l \in \mathbb{Z}. \tag{3.6}$$

Como puede observarse, ambas ecuaciones pueden ser presentadas de manera matricial, por ejemplo la ecuación 3.5 se escribe de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & . \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & . \\ 0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & . \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_0 & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \beta_0 & 0 & 0 & 0 & . \\ \beta_1 & \beta_0 & 0 & 0 & . \\ \beta_2 & \beta_1 & \beta_0 & 0 & . \\ \beta_3 & \beta_2 & \beta_1 & \beta_0 & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} id & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & id & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & id & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & id & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

El siguiente resultado muestra una especie de dualidad entre los entrelazamientos triangulares inferiores y los triangulares superiores, pero antes recordemos que una aplicación $\delta : A \to A$ es localmente nilpotente, si para cada $a \in A$ existe $n_a \in \mathbb{N}$ tal que $\delta^n(a) = 0$ para todo $n \geq n_a$.

Teorema 3.4. Supongamos que las aplicaciones α_0 y α_1 definen un entrelazamiento triangular inferior de A y $k[y]$, con α_1 un automorfismo de álgebras y tal que la aplicación $\delta := -\alpha_0 \circ \alpha_1^{-1}$ es localmente nilpotente. Entonces las aplicaciones:

$$\beta_0 = 0, \ \ \beta_1 = \alpha_1^{-1}, \ \ \beta_{j+1} = \beta_1 \circ \delta^j, \ j \geq 1,$$

definen un entrelazamiento triangular superior de A y $k[y^{-1}]$ vía las ecuaciones (3.4) y la aplicación $t : k[y^{-1}] \otimes A \to A \otimes k[y^{-1}]$ definida por la ecuación

$$t(y^{-r} \otimes a) = \sum_{j \leq 0} \gamma_j^{-r} \otimes y^j.$$

Más aún, las aplicaciones $\{\alpha_i\}_i$ y $\{\beta_j\}_j$ satisfacen las ecuaciones de compatibilidad y de esta manera definen un entrelazamiento de A y $k[y^{\pm 1}]$.

Observación 5. Poniendo $\eta_j^r := \gamma_{-j}^{-r}$, se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $\beta_1(ab) = \beta_1(a)\eta_1^1(b)$,

2. $\eta_j^r = \displaystyle\sum_{l=1}^{j+1-r} \eta_l^1 \circ \eta_{j-l}^{r-1}$,

3. $-\alpha_1^{-1} \circ \alpha_0 \circ \beta_r = \beta_{r+1}$.

Antes de probar el teorema veamos el siguiente lema:

Lema 3.5. $\eta_{j+1}^r = \alpha_1^{-1} \circ \eta_j^{r-1} - \alpha_1^{-1} \circ \alpha_0 \circ \eta_j^r$.

Prueba.

$$\begin{aligned}
\eta_{j+1}^r &= \sum_{l=1}^{j+2-r} \eta_l^1 \circ \eta_{j+1-l}^{r-1} = \sum_{l=2}^{j+2-r} \eta_l^1 \circ \eta_{j+1-l}^{r-1} + \eta_1^1 \circ \eta_j^{r-1} \\
&= \alpha_1^{-1} \circ \eta_j^{r-1} - \sum_{l=2}^{j+2-r} \alpha_1^{-1} \circ \alpha_0 \circ \eta_{l-1}^1 \circ \eta_{j+1-l}^{r-1} \\
&= \alpha_1^{-1} \circ \eta_j^{r-1} - \alpha_1^{-1} \circ \alpha_0 \circ \left(\sum_{l=1}^{j+1-r} \eta_l^1 \circ \eta_{j-l}^{r-1} \right) \\
&= \alpha_1^{-1} \circ \eta_j^{r-1} - \alpha_1^{-1} \circ \alpha_0 \circ \eta_j^r
\end{aligned}$$

□

Veamos ahora que las aplicaciones $\{\beta_j\}_j$ definen un entrelazamiento:

Prueba del Teorema 3.4.

a) Tenemos: $\delta(1) = -\alpha_0 \circ \alpha_1^{-1}(1) = 0$, por lo tanto: $\beta_j(1) = \delta_{j1}$.

b) Debido a que la aplicación δ es localmente nilpotente, tenemos satisfecha la siguiente condición: Dado $a \in A$ existe n_a de manera que:
$$\beta_{j+1}(a) = \beta_1 \circ \delta^j(a) = 0, \text{ si } j > n_a.$$

c) Debemos verificar que para todo a, $b \in A$ se satisface:
$$\beta_j(ab) = \sum_{r\geq 1} \beta_r(a)\eta_j^r(b).$$

En efecto, para $j = 0$ la igualdad es trivial y además la observación anterior muestra que es válida para $j = 1$. Para $j > 1$ se procede por inducción:

$$\begin{aligned}
\beta_{j+1}(ab) &= -\alpha_1^{-1} \circ \alpha_0 \circ \beta_j(ab) = -\alpha_1^{-1} \circ \alpha_0 \left(\sum_{r\geq 1} \beta_r(a)\eta_j^r(b)\right) \\
&= \sum_{r\geq 1} -\alpha_1^{-1} \circ (\alpha_0 \circ \beta_r(a)\eta_j^r(b) + \alpha_1 \circ \beta_r(a)\alpha_0 \circ \eta_j^r(b)) \\
&= \sum_{r\geq 2} \beta_r(a)\alpha_1^{-1} \circ \eta_j^{r-1}(b) + \sum_{r\geq 1} \beta_r(a)(-\alpha_1^{-1} \circ \alpha_0 \circ \eta_j^r(b)) \\
&= \beta_1(a)(-\alpha_1^{-1} \circ \alpha_0 \circ \eta_j^1(b)) \\
&\quad + \sum_{r\geq 2}\beta_r(a)(\alpha_1^{-1} \circ \eta_j^{r-1}(b) - \alpha_1^{-1} \circ \alpha_0 \circ \eta_j^r(b)) \\
&= \beta_1(a)\eta_{j+1}^1(b) + \sum_{r\geq 2} \beta_r(a)\eta_{j+1}^r(b).
\end{aligned}$$

De esta manera las aplicaciones $\{\beta_i\}_i$ definen un entrelazamiento.

Bajo las hipótesis sobre las aplicaciones $\{\alpha_i\}_i$ y $\{\beta_j\}_j$ las condiciones de compatibilidad se reducen a verificar:

$$\alpha_0 \circ \beta_0 + \alpha_1 \circ \beta_1 = id, \quad \alpha_1 \circ \beta_0 = 0, \quad \alpha_0 \circ \beta_l + \alpha_1 \circ \beta_{l+1} = 0, \ \ l \geq 1$$

$$\beta_0 \circ \alpha_0 + \beta_1 \circ \alpha_1 = id, \quad \beta_s \circ \alpha_0 + \beta_{s+1} \circ \alpha_1 = 0, \quad \beta_0 \circ \alpha_1 = 0, \ \ s \geq 1$$

lo cual es un cálculo directo. Por ejemplo

$$\beta_s \circ \alpha_0 + \beta_{s+1} \circ \alpha_1 = \beta_1 \circ \delta^{s-1} \circ (\alpha_0 + \delta \circ \alpha_1) = 0$$

y

$$\begin{aligned} \alpha_0 \circ \beta_j + \alpha_1 \circ \beta_{j+1} \quad &= \alpha_0 \circ \beta_1 \circ \delta^{j-1} + \alpha_1 \circ \beta_1 \circ \delta^j \\ &= (\alpha_0 \circ \beta_1 + \delta) \circ \delta^{j-1} = 0. \end{aligned}$$

□

Consideremos ahora el entrelazamiento triangular superior de A y $k[y]$ asociado a las aplicaciones $\{\alpha_i\}_{i\geq 0}$, $(\alpha_0 = 0)$ y supongamos que α_1 es un automorfismo. Además, si denotamos $\delta := \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2$ y suponemos que se satisface la siguiente condición:

$$\alpha_{i+1} = \alpha_1 \circ \delta^i, \ \ i \geq 2. \tag{3.7}$$

Se obtiene que la aplicación δ es localmente nilpotente y además satisface:

$$\delta(ab) = \delta(a)\alpha_1(b) + a\delta(b).$$

Entonces encontramos el siguiente resultado recíproco al teorema 3.4:

Teorema 3.6. Si las aplicaciones $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ definen un entrelazamiento triangular superior de A y $k[y]$ y la aplicación $\delta := \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2$ satisface las ecuaciones (3.7), entonces las aplicaciones :

$$\beta_0 := -\delta \circ \alpha_1^{-1} \ \text{ y } \ \beta_1 := \alpha_1^{-1}$$

definen un entrelazamiento triangular inferior de A y $k[y^{-1}]$. Más aún, las aplicaciones $\{\alpha_i\}_i$ y $\{\beta_j\}_j$ satisfacen las condiciones de compatibilidad y de esta manera definen un entrelazamiento de A y $k[y^{\pm 1}]$.

El siguiente resultado muestra otra forma de obtener entrelazamientos entre A y $k[y^{\pm 1}]$. Además, cabe resaltar que estos nuevos entrelazamientos en su mayoría no provienen de entrelazamientos triangulares superiores ni inferiores.

Teorema 3.7. Sea s un entrelazamiento de A y $k[y]$ definido por $(\gamma_j^i)_{i,j\in\mathbb{N}_0}$. Supongamos que existe $n > 1$ tal que $\gamma_j^n = \delta_{n,j} id_A, \ \ \forall j \in \mathbb{N}_0$. Entonces se tiene:

a) Para todo i, $j \geq 0$

$$\gamma_j^i = \gamma_{j+n}^{i+n} \tag{3.8}$$

b) Si definimos:

$$\gamma_j^i = \begin{cases} 0, & \text{cuando } i \geq 0, \ j < 0, \\ \\ \gamma_{j+kn}^{i+kn}, & \text{cuando } i < 0, \ \text{para algún}\, k \,\text{tal que} \ \ i + kn \geq 0, \end{cases} \tag{3.9}$$

entonces las aplicaciónes $\{\gamma_j^i\}_{i\,j\in\mathbb{Z}}$ definen un entrelazamiento $\bar{s}$ de A y $k[y^{\pm 1}]$

En particular, si definimos $\beta_j := \gamma_{n-j}^{n-1}$ para $j \in \mathbb{Z}$, entonces $\bar{s}$ es separable si y solo si $\beta_j = 0$ para $j < 0$.

Antes de iniciar la prueba del teorema veamos la siguiente observación que ayudará a la prueba.

Observación 6. Las aplicaciones $(\gamma_j^i)_{i,j\in\mathbb{Z}}$ y $(\gamma_j^i)_{i,j\in\mathbb{N}_0}$ satisfacen

$$\gamma_j^i = 0 \ \text{ si } j < n \left[\!\!\left[\frac{i}{n} \right]\!\!\right]. \tag{3.10}$$

Prueba. Veamos:

i) Para todo i, $j \geq 0$ se tiene:

$$\gamma_{j+n}^{i+n} = \sum_{l=0}^{j+n} \gamma_l^n \circ \gamma_{j+n-l}^i = \sum_{l=0}^{j+n} \delta_{n,l} id_A \circ \gamma_{j+n-l}^i = \sum_{l=0}^{j+n} \delta_{n,l} \gamma_{j+n-l}^i = \gamma_j^i.$$

ii) Debido al item i) y la ecuación 3.10 se safisfacen a) y b) de la proposición 3.1. Ahora reescribamos las leyes de composición y producto para $(\gamma_j^i)_{i,j\in\mathbb{N}_0}$ con ayuda de la ecuación 3.10:

a) Ley de composición

$$\begin{aligned} \gamma_j^{r+s} &= \gamma_{j+kn+pn}^{r+s+kn+pn} = \sum_{l=0}^{j+kn+pn} \gamma_l^{r+kn} \circ \gamma_{j+kn+pn-l}^{s+pn} \\ &= \sum_{l=n\left[\!\left[\frac{r}{n}\right]\!\right]+kn}^{j+kn-n\left[\!\left[\frac{s}{n}\right]\!\right]} \gamma_l^{r+kn} \circ \gamma_{j+kn+pn-l}^{s+pn} \\ &= \sum_{w=n\left[\!\left[\frac{r}{n}\right]\!\right]}^{j-n\left[\!\left[\frac{s}{n}\right]\!\right]} \gamma_{w+kn}^{r+kn} \circ \gamma_{j+pn-w}^{s+pn}. \end{aligned}$$

b) Ley de producto

$$\begin{aligned} \gamma_j^r(ab) &= \gamma_{j+kn}^{r+kn}(ab) = \sum_{s\geq n\left[\!\left[\frac{r+kn}{n}\right]\!\right]} \gamma_s^{r+kn}(a)\gamma_{j+kn}^s(b) \\ &= \sum_{s\geq n\left[\!\left[\frac{r}{n}\right]\!\right]+kn} \gamma_s^{r+kn}(a)\gamma_{j+kn}^s(b) \\ &= \sum_{w\geq n\left[\!\left[\frac{r}{n}\right]\!\right]} \gamma_{w+kn}^{r+kn}(a)\gamma_{j+kn}^{w+kn}(b). \end{aligned}$$

De aquí se deducen fácilmente las leyes de composición y producto para $\bar{s}$, es decir c) y d) de la proposición 3.1

Por último, para cada $a \in A$ y $r \geq 0$ fijos existe $N := N(a, r)$ tal que

$$\gamma_j^r(a) = 0 \quad \text{para todo} \quad j > N(a, r).$$

Esto, conjuntamente con la ecuación 3.10 y el item i), muestran que se satisface el item e) de la proposición 3.1.

Por lo tanto las aplicaciones $(\gamma_j^i)_{i,j \in \mathbb{Z}}$ definen un entrelazamiento de A y $k[y^{\pm 1}]$

$\square$

Ahora construiremos ejemplos para este tipo de entrelazamientos. Para este fin es conveniente mencionar el siguiente resultado que puede encontrarse en [4], teorema 4.1, concerniente a los entrelazamientos entre A y $k[y]/(y^2)$.

Teorema 3.8. Sea A un álgebra y $s : \frac{k[y]}{(y^2)} \otimes A \to A \otimes \frac{k[y]}{(y^2)}$ un entrelazamiento. Entonces las aplicaciones θ_0 y θ_1 asociadas satisfacen:

i) θ_1 es un morfismo de álgebras.

ii) $\theta_0(ab) = \theta_0(a)b + \theta_1(a)\theta_0(b)$, es decir, θ_0 es una θ_1-derivación.

iii) $\theta_0^2 = \theta_0 \circ \theta_0 = 0$ y $\theta_0 \circ \theta_1 = -\theta_1 \circ \theta_0$.

Recíprocamente, si las aplicaciones θ_0, θ_1 satisacen i) - iii), entonces determinan un entrelazamiento entre A y $k[y]/(y^2)$.

Ahora, consideremos el entrelazamiento triangular inferior entre A y $k[y]$ asociado a estas aplicaciones θ_0, θ_1, que satistacen las hipótesis del teorema 3.8, se tienen los siguientes resultados:

Corolario 3.9. Si θ_1 es un automorfismo de A y denotamos $\delta := -\theta_0 \circ \theta_1^{-1}$ entonces

$$\delta = \theta_1^{-1} \circ \theta_0 \ \text{ y } \ \delta^2 = 0.$$

Más aún, el entrelazamiento triangular superior de A y $k[y^{-1}]$ asociado, vía el teorema 3.4, es definido por las aplicaciones:

$$\beta_0 = 0, \ \beta_1 = \theta_1^{-1}, \ \ \beta_2 = \beta_1 \circ \delta, \ \ \beta_i = 0, \ i \geq 3.$$

Corolario 3.10. Si $\theta_1^2 = id$, entonces

$$\beta_0 = 0, \ \beta_1 = \theta_1, \ \ \beta_2 = \theta_0, \ \ \beta_i = 0, \ i \geq 3.$$

Por otro lado, cuando $\theta_1^2 = id$, las propiedades de las aplicaciones θ_0 y θ_1 permiten definir entrelazamientos de la siguiente manera:

Sea $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subset 2\mathbb{N} \cup \{0\}$ y $C = \{a_1, \ldots, a_k\} \subset k$, entonces definamos las aplicaciones $\alpha_i : A \to A$, por:

$$\alpha_i := \begin{cases} \theta_1, & \text{si } i = 1, \\ \\ a_i\theta_0, & \text{cuando } i \in I, \\ \\ 0, & i \notin I \end{cases}$$

Observación 7. Si $i \neq 1$, entonces se cumple:

$$\alpha_i(ab) = \alpha_1(a)\alpha_i(b) + \alpha_i(a)b, \text{ para todo } \ a, \, b \in A.$$

Además las aplicaciones γ_j^i asociadas a $\{\alpha_i\}_i$ satisfacen las siguientes condiciones:

1. Si $i \in 2\mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces:

$$\gamma_j^i = \delta_{ij} id.$$

2. Si $i \notin 2\mathbb{N}$, entonces:

$$\gamma_j^i = \begin{cases} 0, & \text{si } j+1 < i, \\ \\ \alpha_{j-i+1}, & \text{cuando } j+1 \geq i \end{cases} .$$

Proposición 3.11. Las aplicaciones α_i verifican la siguiente ecuación:

$$\alpha_i(ab) = \sum_{j \geq 0} \alpha_j(a)\gamma_i^j(b), \text{ para todo } \ a,\, b \in A.$$

Prueba. Los detalles se pueden encontrar en la proposición 4.2.13 en [1].

□

En resumen tenemos el siguiente resultado:

Proposición 3.12. Las aplicaciones $\{\alpha_i\}_i$ definen un entrelazamiento de A y $k[y]$.

Por ejemplo, si consideramos $n = 2$ e $I = \{0, 2\}$, las siguientes aplicaciones definen un entrelazamiento entre A y $k[y^{\pm 1}]$:

- $\alpha_0 = \theta_0,\ \alpha_1 = \theta_1,\ \ \alpha_2 = \theta_0,$
- $\beta_0 = \theta_0,\ \beta_1 = \theta_1,\ \ \beta_2 = \theta_0,$

que, expresado como matriz, se escribe:

$$\begin{pmatrix} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & \\ & . & \theta_0 & \theta_1 & \theta_0 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & \\ & . & 0 & 0 & id & 0 & 0 & . & . & . & . & . & \\ (\beta_i) & . & 0 & 0 & \theta_0 & \theta_1 & \theta_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & \\ & . & 0 & 0 & 0 & 0 & id & 0 & 0 & 0 & 0 & . & \\ & . & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_0 & \theta_1 & \theta_0 & 0 & 0 & . & (\alpha_i) \\ & . & . & . & . & . & 0 & 0 & id & 0 & 0 & . & \\ & . & . & . & . & . & 0 & 0 & \theta_0 & \theta_1 & \theta_0 & . & \\ & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & \end{pmatrix}.$$

4. El Caso $A = k[x]$ y Álgebras de Hopf

En esta sección volvemos al ejemplo 2, es decir, consideramos $q \in k^*$ y H el álgebra generada por y, y^{-1}, x sujeta a las siguientes relaciones:

$$yx = qxy, \quad yy^{-1} = 1 = y^{-1}y.$$

En muchos textos se define una estructura de álgebra de Hopf sobre H, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rclrclrcl} \Delta(x) & = & x \otimes y + 1 \otimes x, & \varepsilon(x) & = & 0, & S(x) & = & -xy^{-1} \\ \Delta(y) & = & y \otimes y, & \varepsilon(y) & = & 1, & S(y) & = & y^{-1} \end{array}$$

Como vimos en la sección anterior, el álgebra subyacente H es en realidad un entrelazamiento de la forma $k[x] \otimes_s k[y^{\pm 1}]$.

El último resultado de este trabajo, corresponde a construir dos estructuras de álgebras de Hopf sobre $k[x] \otimes_s k[y^{\pm 1}]$ para lo cual debemos considerar la aplicación de entrelazamiento

$$s : k[y^{\pm 1}] \otimes k[x] \to k[x] \otimes k[y^{\pm 1}]$$

definida por las aplicaciones $\{\alpha_i\}_i$ y $\{\beta_j\}_j$ asociadas a los conjuntos $I \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $C \subset k$ y las aplicaciones

$$\theta_0(x) = 1, \;\; \theta_1(x) = -x.$$

Teorema 4.1. El álgebra $k[x] \otimes_s k[y^{\pm 1}]$ tiene una estructura de álgebra de Hopf si definimos:

a) Para $I = \{m\} \subset 2\mathbb{N} \cup \{0\}$, $C = \{a_m = 1\}$,

la comultiplicación:

$$\Delta(x) = x \otimes y^{m-1} + y^{m-1} \otimes x - \frac{1}{2} y^{m-1} \otimes y^{m-1}, \;\; \Delta(y) = y \otimes y,$$

la counidad y antípoda:

$$\varepsilon(x) = 1/2, \;\; \varepsilon(y) = 1, \;\; S(x) = y^{2-m}xy^{-m}, \;\; S(y) = y^{-1}.$$

b) Para $I = \{n, m\} \subset 2\mathbb{N} \cup \{0\}, n \neq m$, $C = \{a_n = a_m = 1\}$,

la comultiplicación:

$$\Delta(x) = x \otimes y^{m-1} + y^{n-1} \otimes x - y^{n-1} \otimes y^{m-1}, \;\; \Delta(y) = y \otimes y,$$

la counidad y antípoda:

$$\varepsilon(x) = 1, \;\; \varepsilon(y) = 1, \;\; S(x) = y^{2-n}xy^{-m}, \;\; S(y) = y^{-1}.$$

Prueba. Los detalles pueden encontrarse en teorema 4.3.1 en [1].

□

Referencias

[1] Arce, J.: *Álgebras de Hopf, Dualidad y Productos Torcidos.* Tesis de Maestria, PUCP, 2011.

[2] Cibils, C.: *Non-commutive duplicates of finite sets*, Journal of Algebra and its Applications., Vol 5(3)(2006) 361-377.

[3] Cap, A., Schichl, H. and Vanzura, J.: *On twisted tensor products of algebras.* Communications in Algebra, 23:4701-4735, (1995).

[4] Guccione, J. A., Guccione, J. J. and Valqui, C.: *Twisted planes*, Communications in Algebra, Vol 38 (5) (2010) 1930-1956.

[5] Guccione, J. A. Guccione, J. J. and Valqui, C.: *Non commutative polynomial truncated extensions*, arXiv:1008.4076v2.

[6] Jara, P., López Peña, J., Navarro, G. and Stefan, D.: *On the classification of twisting maps between k^n and k^m*, Journal of Algebra and Representation Theory,14 (5), pp. 869-895 (2011).

Abstract

We will study the twisted tensor product of unital associative algebras and the algebra of Laurent polynomials $k[y^{\pm 1}]$. Moreover, we will establish conditions to extend the polynomial extensions of A to a twisted tensor product with $k[y^{\pm 1}]$. Finally, we present two families of Hopf algebras on some twisted tensor products of $k[x]$ with $k[y^{\pm 1}]$.

Keywords: Hopf's algebras, Twisted tensor products, Twisting maps.

Jack Denne Arce Flores
Sección Matemáticas
Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú
`jarcef@pucp.edu.pe`