

CMC COMPLEJOS DE CADENAS DE R-MÓDULOS

*Ricardo M. Bances*¹ y *Norberto J. Chau*¹

Octubre, 2011

Resumen

La categoría de complejos de cadenas de R-módulos es una categoría de modelos cerrada. Aquí desarrollamos, de la manera más detallada posible, una demostración realizada por Dwyer W.G y Spalinski J.

MSC(2010): 18G55.

Palabras clave: *Categoría de modelos cerrada, Complejos de cadenas de R-módulos.*

1. *Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias, PUCP.*

Introducción

Una categoría de modelos cerrada, tal como la define Quillen [3], es una categoría con tres clases específicas de morfismos: fibraciones, cofibraciones y equivalencias débiles, los cuales cumplen cinco axiomas, éstos tienen su base en algunas propiedades que cumplen los espacios topológicos. Pero no solamente la categoría de los espacios topológicos es una categoría de modelos cerrada. Existen muchas otras y entre ellas está la categoría Ch_R de complejos de cadenas de R -módulos.

Este artículo desarrolla, de la manera más detallada posible, la demostración de que en efecto Ch_R es una categoría de modelos cerrada [Teorema CMC: Ch_R]. Está basada en una demostración hecha por Dwyer and Spalinski [1, Teorema 7.2].

Empezamos definiendo lo que es una categoría de modelos cerrada y enumeramos los axiomas por CM1, CM2, CM3, CM4 y CM5.

Antes de demostrar CM1 desarrollamos algunos resultados referidos a la categoría de R -módulos. Luego continuamos con las demostraciones de CM4 y CM5 por ser más rápidas de demostrar. La demostración de CM2 es un poco más extensa y la demostración de CM3 utiliza el llamado argumento del objeto pequeño y la construcción del Gluing infinito.

Empezaremos definiendo lo que es una categoría de modelos cerrada.

Categorías de Modelos Cerradas

Una **categoría de modelos cerrada (CMC)** es una categoría \mathcal{C} con tres clases distinguidas de morfismos : equivalencias débiles, fibraciones, y cofibraciones, cada una de las cuales es cerrada bajo composición y contiene a los morfismos identidad. Estas clases de morfismos son denotadas por W , Fib y Cof respectivamente.

Se requiere además que \mathcal{C} satisfaga los siguientes axiomas (ver[3]).

CM1 Límites y colímites finitos existen en \mathcal{C} .

CM2 $Fib \subset r(Cof \cap W)$ y $Cof \subset l(Fib \cap W)$, donde $r(Cof \cap W)$ es el conjunto de morfismos de $Cof \cap W$ que tienen la propiedad del levantamiento a derecha y $l(Fib \cap W)$ es el conjunto de morfismos de $Fib \cap W$ que tienen la propiedad del levantamiento a izquierda.

CM3 $\forall f \in Mor(\mathcal{C}) : f = p \circ i = p' \circ i'$ donde $p \in Fib$,
 $i \in Cof \cap W, p' \in Fib \cap W, i' \in Cof$.

CM4 Si un triángulo conmutativo dos de tres morfismos son equivalencias débiles entonces el tercero también lo es.

CM5 W, Fib y Cof son estables por retractos.

Antes de demostrar que Ch_R , la categoría de complejos de cadenas de R-módulos, es una categoría de modelos cerrada daremos algunos preliminares referidos a Mod_R la categoría de R-módulos [2].

Colímite en Mod_R

Sea $F : D \rightarrow Mod_R$ un functor donde D es una categoría pequeña.

En $\bigoplus_{d \in ob(D)} F(d) = \{(x_d)_{d \in ob(D)} : x_d \in F(d), x_d = 0 \text{ a.e}\}$

definimos la relación de equivalencia generada por $(x_d)_{d \in D} \sim (y_d)_{d \in D} \Leftrightarrow \forall d, d' \in D, \exists f : d \rightarrow d'$ talque $y_{d'} = F(f)(x_d)$.

Proposición 1

$$colim F = \frac{\bigoplus_{d \in ob(D)} F(d)}{\sim}$$

Demostración

Es evidente que $colim F$ es un R-módulo con las operaciones inducidas por las de $\bigoplus_{d \in ob(D)} F(d)$.

Para cada $d \in ob(D)$ definimos :

$$t_d : F(d) \rightarrow colim F, \quad t_d(x) = [(x_d)_{d \in ob(D)}],$$

donde $x_d = x, x_{d'} = 0$, para todo $d' \neq d$. Se demuestra fácilmente que t_d es un homomorfismo de R-módulos. Se cumple que $\forall f : d \rightarrow d'$ el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} F(d) & & \\ \downarrow F(f) & \searrow t_d & \\ F(d') & \xrightarrow{t_{d'}} & \text{colim}F \end{array}$$

En efecto: Sean $x \in F(d), y = F(f)(x) \in F(d')$.

Entonces

$$(t_{d'} \circ F(f))(x) = t_{d'}(F(f)(x)) = t_{d'}(y) = [(y_d)_{d \in \text{ob}D}],$$

donde $y_{d'} = y, y_d = 0 \forall d \neq d'$.

Por otro lado

$$t_d(x) = [(x_d)_{d \in \text{ob}D}]$$

donde $x_d = x, x_{d'} = 0$ para todo $d' \neq d$.

Pero $y_{d'} = F(f)(x_d)$ para $f : d \rightarrow d'$ y para los otros casos existe $0 : d' \rightarrow d''$ tal que $y_{d''} = F(0)(x_{d'})$.

Luego $(y_d)_{d \in \text{ob}D} \sim (x_d)_{d \in \text{ob}D}$.

Es decir $t_{d'} F(f)(x) = t_d(x)$.

Ahora supongamos que existen

$$s_d : F(d) \rightarrow X, \quad s_{d'} : F(d') \rightarrow X$$

tales que $s_{d'} \circ F(f) = s_d$.

$$\begin{array}{ccc} F(d) & \xrightarrow{s_d} & X \\ \downarrow F(f) & \searrow t_d & \nearrow t_{d'} \\ & \text{colim}F & \xrightarrow{\varphi} X \\ & \nearrow t_{d'} & \searrow s_{d'} \\ F(d') & \xrightarrow{s_{d'}} & X \end{array}$$

Definimos

$$\varphi : \text{colim}F \rightarrow X, \quad \varphi([(x_d)_{d \in \text{ob}(D)}]) = \sum_{d \in \text{ob}(D)} s_d(x_d).$$

i) φ está bien definida:

Sean $(x_d)_{d \in D} \sim (y_d)_{d \in D}$ elementos de $\text{colim}F$, entonces para todo $d, d' \in D$, existe $g : d' \rightarrow d$ tal que $x_d = F(g)(y_{d'})$.

Luego $s_d(x_d) = s_d(F(g)(y_{d'})) = s_{d'}(y_{d'})$, de donde $\sum_{d \in \text{ob}(D)} s_d(x_d) =$

$$\sum_{d' \in \text{ob}(D)} s_{d'}(y_{d'}).$$

Por lo tanto $\varphi([(x_d)_{d \in \text{ob}(D)}]) = \varphi([(y_d)_{d \in D}])$.

ii) φ es un homomorfismo de R-módulos.

Sean $(x_d)_{d \in D}, (y_d)_{d \in D} \in \bigoplus_{d \in \text{ob}(D)} F(d), \lambda \in R$.

$$\varphi([x] + [y]) = \varphi([x + y]) = \varphi([(x_d + y_d)_{d \in \text{ob}(D)}]) = \sum_{d \in \text{ob}(D)} s_d(x_d + y_d)$$

$$= \sum_{d \in \text{ob}(D)} s_d(x_d) + \sum_{d \in \text{ob}(D)} s_d(y_d) = \varphi([(x_d)_{d \in \text{ob}(D)}]) + \varphi([(y_d)_{d \in \text{ob}(D)}])$$

Luego

$$\varphi([x] + [y]) = \varphi([x]) + \varphi([y]).$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda[x]) &= \varphi([\lambda x_d]_{d \in \text{ob}(D)}) = \sum_{d \in \text{ob}(D)} s_d(\lambda x_d) \\ &= \lambda \sum_{d \in \text{ob}(D)} s_d(x_d) \\ &= \lambda \varphi([x]). \end{aligned}$$

iii) φ cumple $\varphi \circ t_d = s_d$.

En efecto:

$$(\varphi \circ t_d)(x) = \varphi([(x_d)_{d \in \text{ob}(D)}]) , \text{ donde } (x_d) = x, x_{d'} = 0, \forall d' \neq d.$$

$$(\varphi \circ t_d)(x) = \sum_{d \in \text{ob}(D)} s_d(x_d) = s_d(x).$$

iv) φ es único

Supongamos que existan dos homomorfismos de R-módulos $\varphi_1, \varphi_2 : \text{colim} F \rightarrow X$ tales que $\varphi_1 \circ t_d = s_d, \varphi_2 \circ t_d = s_d$.

Demostraremos que $\varphi_1 = \varphi_2$. En efecto : Sea $[(x_d)_{d \in \text{ob}(D)}] \in \text{colim} F, x = (x_d)_{d \in \text{ob}(D)} \in \bigoplus_{d \in \text{ob}(D)} F(d)$, se cumple : $x_d = 0$ excepto en un número finito de $d \in \text{ob}(D)$.

Asumamos que $x_{d_1}, x_{d_2}, \dots, x_{d_{r-1}}, x_{d_r}$ son diferentes de cero.

Hacemos $x_1 = (x_\delta)_{\delta \in \text{ob}(D)}, x_j = 0$ excepto cuando $\delta = d_1$,

$x_2 = (x_\delta)_{\delta \in \text{ob}(D)}, x_\delta = 0$ excepto cuando $\delta = d_2$,

y así hasta llegar a definir $x_n = (x_\delta)_{\delta \in \text{ob}(D)}, x_\delta = 0$ excepto cuando $\delta = d_n$.

Luego $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$.

Como φ_1, φ_2 son homomorfismos de R-módulos entonces

$$\begin{aligned} \varphi_1([x]) &= \varphi_1[(x_1 + x_2 + \dots + x_n)] = \varphi_1[(x_1)] + \dots + \varphi_1[(x_n)] = \\ &= (\varphi_1 \circ t_d)(x_1) + \dots + (\varphi_1 \circ t_d)(x_n) = (\varphi_2 \circ t_d)(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \\ &= (\varphi_2 \circ t_d)(x) = (\varphi_2 \circ t_d)(x) = \varphi_2([x]) \end{aligned}$$

Luego $\varphi_1 = \varphi_2$.

Límite en Mod_R

Proposición 2

Sea $F : D \rightarrow \text{Mod}_R$ un funtor donde D es una categoría pequeña.

Entonces $\text{lim} F = \{(x_d)_{d \in \text{ob}(D)} \in \prod_{d \in \text{ob}(D)} F(d) : x_d \in F(d),$

$\forall f : d \rightarrow d', x_{d'} = F(f)(x_d)\}$

Demostración

Sean $(x_d)_{d \in D}, (y_d)_{d \in D}$ elementos de $\text{lim} F, \lambda \in R$ entonces $(x_d + y_d)_{d \in D},$

$\lambda(x_d)_{d \in D} \in \lim F$.

En efecto: Sea $f : d \rightarrow d'$ tales que $x_{d'} = F(f)(x_d), y_{d'} = F(f)(y_d)$, entonces

$$x_{d'} + y_{d'} = F(f)(x_d) + F(f)(y_d) = F(f)(x_d + y_d), \lambda x_{d'} = \lambda F(f)(x_d) = F(f)(\lambda x_d).$$

Por tanto $\lim F$ es un submódulo de $\prod_{d \in \text{ob}(D)} F(d)$. Definimos

$$t_d : \lim F \rightarrow F(d), \quad t_d((x_d)_{d \in \text{ob}(D)}) = x_d$$

(proyección natural). Se cumple que $\forall f : d \rightarrow d'$ el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} & & F(d) \\ & \nearrow \tau_d & \downarrow F(f) \\ \lim F & \xrightarrow{\tau_{d'}} & F(d') \end{array}$$

En efecto:

$$(F(f) \circ t_d)((x_d)_{d \in D}) = F(f)(x_d) = x_{d'} = t_{d'}((x_d)_{d \in D}).$$

Supongamos que para todo $d, d' \in \text{Ob}D$ existen $s_d : X \rightarrow F(d), s_{d'} : X \rightarrow F(d')$ tales que $F(f) \circ s_d = s_{d'}$.

$$\begin{array}{ccccc} & & & & F(d) \\ & & & \nearrow s_d & \nearrow \tau_d \\ X & \xrightarrow{\psi} & \lim F & & \downarrow F(f) \\ & & & \searrow \tau_{d'} & \searrow s_{d'} \\ & & & & F(d') \end{array}$$

Definimos

$$\psi : X \rightarrow \lim F, \quad \psi(x) = (x_d)_{d \in \text{ob}(D)}, \quad x_d = s_d(x), \forall d \in \text{ob}(D)$$

i) ψ está bien definida.

En efecto:

$$\forall f : d \rightarrow d' : x_{d'} = s_{d'}(x) = (F(f) \circ s_d)(x) = F(f)(s_d(x)) = F(f)(x_d).$$

ii) ψ cumple $t_d \circ \psi = s_d$.

$$(t_d \circ \psi)(x) = t_d(\psi(x)) = t_d((x_d)_{d \in \text{ob}D}), \text{ donde } x_d = x, x_{d'} = 0, \forall d' \neq d.$$

$$(t_d \circ \psi)(x) = x_d = s_d(x), \forall x \in X.$$

iii) Es evidente que ψ es un homomorfismo de R -módulos.

iv) ψ es único.

Supongamos que existen $\psi_1, \psi_2 : X \rightarrow \lim F$ tales que $t_d \circ \psi_1 = s_d$, $t_d \circ \psi_2 = s_d, \forall d \in \text{ob}(D)$.

Demostraremos que $\psi_1 = \psi_2$.

Sea $x \in X$ y supongamos que $\psi_1(x) = (x_d)_{d \in \text{obj}D} \in \lim F$ y $\psi_2(x) = (y_d)_{d \in \text{obj}D} \in \lim F$.

Entonces $t_d(\psi_1(x)) = t_d(\psi_2(x)), \forall d \in \text{ob}(D)$.

Luego $t_d((x_d)_{d \in \text{obj}D}) = t_d((y_d)_{d \in \text{obj}D}), \forall d \in \text{ob}(D)$.

Por lo tanto $x_d = y_d, \forall d \in \text{ob}(D)$ Es decir $\psi_1(x) = \psi_2(x), \forall x \in X$.

Colímite en Ch_R

Sea $F : D \rightarrow Ch_R$ un funtor donde D es una categoría pequeña. Para cada $f : d \rightarrow d'$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} F(d) : & \cdots & \longrightarrow & F_n(d) & \xrightarrow{\partial} & F_{n-1}(d) & \longrightarrow \cdots \\ & & & \downarrow F_n(f) & & \downarrow F_{n-1}(f) & \\ F(d') : & \cdots & \longrightarrow & F_n(d') & \xrightarrow{\partial} & F_{n-1}(d') & \longrightarrow \cdots \\ & & & & & & \\ \cdots & \longrightarrow & F_1(d) & \xrightarrow{\partial} & F_0(d) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow F_1(f) & & \downarrow F_0(f) & & \\ \cdots & \longrightarrow & F_1(d') & \xrightarrow{\partial} & F_0(d') & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Para cada $n \geq 0$ tenemos el funtor

$$F_n : D \rightarrow Ch_R, \quad d \mapsto F_n(d), \quad d \rightarrow d' \mapsto F_n(d) \rightarrow F_n(d').$$

Por lo anterior, para cada $n \geq 0$ existe $\text{colim}F_n$.

Definimos el complejo de cadenas : $\text{colim}F = (\text{colim}F_n, \partial_n)_{n \geq 0}$ donde $\partial_n : \text{colim}F_n \rightarrow \text{colim}F_{n-1}$ es el morfismo inducido por los morfismos borde de los complejos $F(d)$.

Es decir,

$$\partial_n([(x_d^n)_{d \in \text{ob}(D)}]) = [\partial_n(x_d^n)_{d \in \text{ob}(D)}].$$

Proposición 3

$\text{colim}F$ cumple las condiciones de colímite de F .

Demostración.

Para cada $d \rightarrow \text{ob}(D)$ definimos $t_d : F(d) \rightarrow \text{colim}F$ como el morfismo de complejos de cadenas $t_d = (t_d^n)_{n \geq 0}$ donde $t_d^n : F_n(d) \rightarrow \text{colim}F_n$ es el homomorfismo de R-módulos definido como antes para cada $n \geq 0$.

Usando el hecho de que $\text{colim}F_n$ cumple las condiciones de colímite de $F_n : D \rightarrow \text{Mod}_R$ para cada $n \geq 0$ se demuestra que $\text{colim}F$ cumple las condiciones de colímite para $F : D \rightarrow \text{Ch}_R$.

Límite en Ch_R

Sea $F : D \rightarrow \text{Ch}_R$ un funtor donde D es una categoría pequeña.

Similarmente al caso de colímite de F para cada $n \geq 0$ tenemos un funtor $F_n : D \rightarrow \text{Mod}_R$ para el cual sabemos que existe $\text{lim}F_n$.

Definimos el complejo de cadenas $\text{lim}F = (\text{lim}F_n, \partial_n)_{n \geq 0}$ donde $\partial_n : \text{lim}F_n \rightarrow \text{lim}F_{n-1}$ es el morfismo $\partial_n((x_d^n)_{d \in \text{ob}(D)}) = (\partial_n(x_d^n))_{d \in \text{ob}(D)}$.

Proposición 4

$\text{lim}F$ cumple las condiciones de límite de F .

Demostración.

Análoga a la de $\text{colim}F$.

Un morfismo $f = (f_n)_{n \geq 0} : M \rightarrow N$ en Ch_R es

1. Una equivalencia débil si f induce isomorfismos

$$H_n(f) : H_n(M) \rightarrow H_n(N)$$

para cada $n \geq 0$.

2. Una cofibración si para cada $n \geq 0$ el homomorfismo $f_n : M_n \rightarrow N_n$ es un monomorfismo y $Conuc(f_n)$ es un R-módulo proyectivo.
3. Una fibración si para cada $n > 0$ el homomorfismo $f_n : M_n \rightarrow N_n$ es un epimorfismo.

Entonces, con estas flechas distinguidas construimos los conjuntos W , Cof , y Fib de equivalencias débiles, cofibraciones y fibraciones respectivamente.

Teorema(CMC: Ch_R)

(Ch_R, W, Fib, Cof) es una categoría de modelos cerrada. (Ver[1, Teorema 7.2]).

Demostración

Es evidente que W, Fib son estables por composición y contienen a los isomorfismos.

Para el caso de Cof , supongamos que $f, g \in Cof$. Demostraremos que $g \circ f \in Cof$.

En efecto:

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{f} & N \\
 & \searrow & \downarrow g \\
 & & P
 \end{array}$$

$g \circ f$

Para cada $n \geq 0$, es evidente que $(g \circ f)_n = g_n \circ f_n$ es un monomorfismo pues f_n y g_n lo son.

Por otro lado se cumple que las sucesiones

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & M_n & \xrightarrow{f_n} & N_n & \longrightarrow & Conuc(f_n) \longrightarrow 0 \\
 & & & & & & \\
 0 & \longrightarrow & N_n & \xrightarrow{g_n} & P_n & \longrightarrow & Conuc(g_n) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

son exactas cortas y parten para cada $n \geq 0$. Luego

$$N_n \cong M_n \oplus \text{Conuc}(f_n), \quad P_n \cong N_n \oplus \text{Conuc}(g_n).$$

En consecuencia,

$$P_n \cong M_n \oplus \text{Conuc}(f_n) \oplus \text{Conuc}(g_n).$$

De donde

$$\frac{P_n}{M_n} \cong \text{Conuc}(f_n) \oplus \text{Conuc}(g_n)$$

es proyectivo, pues $\text{Conuc}(f_n)$ y $\text{Conuc}(g_n)$ lo son.

Es decir

$$\frac{P_n}{M_n} \cong \frac{P_n}{\text{Im}(g \circ f)_n} = \text{Conuc}(g \circ f)_n$$

es proyectivo.

También se cumple que si $f : M \rightarrow N$ es un isomorfismo entonces f es una cofibración.

En efecto: es obvio que f_n es un monomorfismo para $n \geq 0$.

Además, para $n \geq 0$

$$\text{Conuc}(f_n) = \frac{N_n}{\text{Im}f_n} = \frac{N_n}{N_n} = 0$$

es proyectivo.

Demostración de CM1

Por las proposiciones anteriores ya sabemos que para todo funtor $F : D \rightarrow Ch_R$, donde D es una categoría pequeña, existen $\lim F$, $\text{colim} F$.

Demostración de CM4

En el triángulo conmutativo

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ & \searrow & \downarrow g \\ & & P \end{array}$$

$g \circ f$

- a) Supongamos que $f, g \in W$. Demostraremos que $g \circ f \in W$.
 En efecto: para cada $n \geq 0$

$$H_n(f) : H_n(M) \rightarrow H_n(N), \quad H_n(g) : H_n(N) \rightarrow H_n(P)$$

son isomorfismos. Luego $H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f) : H_n(M) \rightarrow H_n(P)$ también es un isomorfismo.

- b) Supongamos que $g, g \circ f \in W$. Demostraremos que $f \in W$.

En efecto: para cada $n \geq 0$

$H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f)$ suryectiva y $H_n(g)$ inyectiva implican que $H_n(f)$ es suryectiva.

Por otro lado, $H_n(g \circ f)$ inyectiva implica $H_n(f)$ inyectiva.

Por lo tanto $H_n(f)$ es un isomorfismo.

- c) Supongamos que $f, g \circ f \in W$. Demostraremos que $g \in W$.

En efecto: para cada $n \geq 0$

$H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f)$ suryectiva implica $H_n(g)$ suryectiva.

Por otro lado, $H_n(g \circ f)$ inyectiva y $H_n(f)$ suryectiva implican $H_n(g)$ inyectiva.

Por lo tanto $H_n(f)$ es un isomorfismo.

Demostración de CM5

- a) W es estable por retracts.

En efecto: sea $f : M \rightarrow N$ una equivalencia débil.

Si $g : M' \rightarrow N'$ es un retracto de f demostraremos que g es una equivalencia débil.

Para cada $n \geq 0$ existe el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} M'_n & \xrightarrow{i_n} & M_n & \xrightarrow{r_n} & M'_n \\ \downarrow g_n & & \downarrow f_n & & \downarrow g_n \\ N'_n & \xrightarrow{j_n} & N_n & \xrightarrow{q_n} & N'_n \end{array}$$

Además $r_n \circ i_n = 1_{M'_n}$, $q_n \circ j_n = 1_{N'_n}$.

Del diagrama anterior se obtiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} H_n(M') & \xrightarrow{H_n(i)} & H_n(M) & \xrightarrow{H_n(r)} & H_n(M') \\ \downarrow H_n(g) & & \downarrow H_n(f) & & \downarrow H_n(g) \\ H_n(N') & \xrightarrow{H_n(j)} & H_n(N) & \xrightarrow{H_n(q)} & H_n(N') \end{array}$$

Además se cumplen $H_n(r) \circ H_n(i) = 1_{H_n(M')}$, $H_n(q) \circ H_n(j) = 1_{H_n(N')}$, por la funtorialidad de H_n .

Por otro lado sabemos que $\exists H_n(f)^{-1}$ pues $f \in W$.

Afirmamos: $\exists H_n(g)^{-1}$ y

$$H_n(g)^{-1} = H_n(r)H_n(f)^{-1}H_n(j).$$

$$\begin{aligned} \text{En efecto: } H_n(g) \circ H_n(g)^{-1} &= H_n(g)H_n(r)H_n(f)^{-1}H_n(j) = \\ &= H_n(q)H_n(f)H_n(f)^{-1}H_n(j) = H_n(q)H_n(j) = \\ &= H_n(q \circ j) = 1_{H_n(N')}. \end{aligned}$$

Por tanto $H_n(g)$ es un isomorfismo y así $g \in W$.

b) *Fib* es estable por retracts. En efecto: sea $f : M \rightarrow N$ una fibrición.

Si $g : M' \rightarrow N'$ es un retracto de f demostraremos que g es una fibrición.

Si g es un retracto de f , para cada $n \geq 0$, existe el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} M'_n & \xrightarrow{i_n} & M_n & \xrightarrow{r_n} & M'_n \\ \downarrow g_n & & \downarrow f_n & & \downarrow g_n \\ N'_n & \xrightarrow{j_n} & N_n & \xrightarrow{q_n} & N'_n \end{array}$$

Además $r_n \circ i_n = 1_{M'_n}$, $q_n \circ j_n = 1_{N'_n}$.

Se cumple: para cada $n \geq 1$, $f_n : M_n \rightarrow N_n$ es un epimorfismo.

Demostraremos que para cada $n \geq 1$, $g_n : M'_n \rightarrow N'_n$ es un epimorfismo. Sean $h_n, h'_n : N'_n \rightarrow Z_n$ tales que $h'_n \circ g_n = h_n \circ g_n : M'_n \rightarrow Z_n$

en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 M'_n & \xrightarrow{i_n} & M_n & \xrightarrow{r_n} & M'_n \\
 \downarrow g_n & & \downarrow f_n & & \downarrow g_n \\
 N'_n & \xrightarrow{j_n} & N_n & \xrightarrow{q_n} & N'_n \xrightarrow{h_n} Z_n \\
 & & & & \xrightarrow{h'_n}
 \end{array}$$

tal que $r_n \circ i_n = 1_{M'_n}$, $q_n \circ j_n = 1_{N'_n}$.

Se cumple:

$$h'_n \circ \underbrace{q_n \circ r_n} = h_n \circ \underbrace{q_n \circ r_n}$$

$$h'_n \circ \underbrace{q_n \circ f_n} = h_n \circ \underbrace{q_n \circ f_n}$$

pero f_n es epimorfismo, entonces $h'_n \circ q_n = h_n \circ q_n$.

También q_n es epimorfismo ya que $q_n \circ j_n = 1_{N'_n}$. Luego $h'_n = h_n$.

Por lo tanto g_n es un epimorfismo.

c) *Cof* es estable por retracts.

Supongamos que $f \in Cof$. Demostraremos que $g \in Cof$.

En efecto: si g es un retracto de f , existe un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 M'_n & \xrightarrow{i_n} & M_n & \xrightarrow{r_n} & M'_n \\
 \downarrow g_n & & \downarrow f_n & & \downarrow g_n \\
 N'_n & \xrightarrow{j_n} & N_n & \xrightarrow{q_n} & N'_n
 \end{array}$$

tales que $r_n \circ i_n = 1_{M'_n}$, $q_n \circ j_n = 1_{N'_n}$.

c₁) Sea $n \geq 0$, demostraremos que $f_n : M_n \rightarrow N_n$ es un monomorfismo.

Sean $k_n, k'_n : Z_n \rightarrow M'_n$ tales que $f_n \circ k_n = g_n \circ k'_n : M'_n \rightarrow Z_n$ en

el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 Z & \xrightarrow{k_n} & M'_n & \xrightarrow{i_n} & M_n & \xrightarrow{r_n} & M'_n \\
 & \xrightarrow{k'_n} & \downarrow g_n & & \downarrow f_n & & \downarrow g_n \\
 & & N'_n & \xrightarrow{j_n} & N_n & \xrightarrow{q_n} & N'_n
 \end{array}$$

tales que $r_n \circ i_n = 1_{M'_n}$, $q_n \circ j_n = 1_{N'_n}$. Se cumple:

$$j_n \circ g_n \circ k_n = j_n \circ g_n \circ k'_n$$

$$f_n \circ i_n \circ k_n = f_n \circ i_n \circ k'_n$$

pero $f_n \circ i_n$ es monomorfismo, entonces $k_n = k'_n$.

Por lo tanto f_n es un epimorfismo.

c₂) Sea $n \geq 0$, demostraremos que $Conuc(f_n)$ es un módulo proyectivo.

En efecto: haciendo $C_n = Conuc(f_n)$, $C'_n = Conuc(g_n)$ se obtiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 M'_n & \xrightarrow{i_n} & M_n & \xrightarrow{r_n} & M'_n \\
 \downarrow g_n & & \downarrow f_n & & \downarrow g_n \\
 N'_n & \xrightarrow{j_n} & N_n & \xrightarrow{q_n} & N'_n \\
 \downarrow \pi'_n & & \downarrow \pi_n & & \downarrow \pi'_n \\
 C'_n & \xrightarrow{j_n^*} & C_n & \xrightarrow{q_n^*} & C'_n
 \end{array}$$

donde π_n y π'_n son las proyecciones naturales.

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & C'_n & & \\
 & \swarrow \varphi_n & \downarrow \alpha_n & & \\
 A_n & \xrightarrow{\beta_n} & B_n & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

donde $\beta_n : A_n \rightarrow B_n$ es un epimorfismo y $\alpha_n : C'_n \rightarrow B_n$ es cualquier homomorfismo.

Para demostrar que C'_n es proyectivo basta demostrar la existencia de un homomorfismo $\varphi_n : C'_n \rightarrow A_n$ tal que $\beta_n \circ \varphi_n = \alpha_n$.

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & C_n & & \\
 & & \uparrow j_n^* & \uparrow q_n^* & \\
 & & C'_n & & \\
 \tilde{\varphi}_n \swarrow & & \downarrow \alpha_n & & \\
 A_n & \xrightarrow{\beta_n} & B_n & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Como C_n es proyectivo entonces existe $\tilde{\varphi}_n : C_n \rightarrow A_n$ tal que

$$\beta_n \circ \tilde{\varphi}_n = \alpha_n \circ q_n^*.$$

$$\text{Definimos } \varphi_n = \tilde{\varphi}_n \circ j_n^*$$

$$\varphi_n \text{ cumple: } \beta_n \circ \varphi_n = \underbrace{\beta_n \circ \tilde{\varphi}_n}_{\alpha_n \circ q_n^*} \circ j_n^* = \underbrace{\alpha_n \circ q_n^*}_{\alpha_n} \circ j_n^* = \alpha_n.$$

Demostración de CM2a)

Sea el diagrama de complejos de cadenas conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{g} & X \\
 i \downarrow & & \downarrow p \\
 B & \xrightarrow{h} & Y
 \end{array}$$

donde $i \in \text{Cof}$, $p \in \text{Fib} \cap W$. Demostraremos que existe un levantamiento $f : B \rightarrow X$ tal que $f \circ i = g$, $p \circ f = h$.

Si $p \in \text{Fib}$ entonces $p_n : X_n \rightarrow Y_n$ es un epimorfismo para todo $n \geq 1$.

Afirmación 1.

$p_0 : X_0 \rightarrow Y_0$ es un epimorfismo.

En efecto:

Dado el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 X : & \cdots & \xrightarrow{\partial_2^X} & X_1 & \xrightarrow{\partial_1^X} & X_0 & \\
 & & & \downarrow p_1 & & \downarrow p_0 & \\
 Y : & \cdots & \xrightarrow{\partial_2^Y} & Y_1 & \xrightarrow{\partial_1^Y} & Y_0 &
 \end{array}$$

Construimos el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & Im\partial_1^X & \longrightarrow & X_0 & \longrightarrow & \frac{X_0}{Im\partial_1^X} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \tilde{p}_0 & & \downarrow p_0 & & \downarrow (p_0)_* \\
 0 & \longrightarrow & Im\partial_1^Y & \longrightarrow & Y_0 & \longrightarrow & \frac{Y_0}{Im\partial_1^Y} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

donde las filas son exactas, los cuadrados son conmutativos, \tilde{p}_0 es la restricción de p_0 a $Im\partial_1^X$ y $(p_0)_*$ es el homorfismo inducido por p_0 .

En seguida demostramos que \tilde{p}_0 es un epimorfismo.

En efecto: Sea $z \in Im\partial_1^Y$, existe $y \in Y_1$ tal que $\partial_1^Y(y) = z$.

Como p_1 es epimorfismo existe $x \in X_1$ tal que $p_1(x) = y$.

Luego $\partial_1^X(x) \in Im\partial_1^X$ cumple:

$$\tilde{p}_0(\partial_1^X(x)) = \partial_1^Y(p_1(x)) = \partial_1^Y(y) = z \in Im\partial_1^Y,$$

pues p es morfismo de cadenas, y así $p_0 \circ \partial_1^X = \partial_1^Y \circ p_1$. Luego \tilde{p}_0 es un epimorfismo.

Ahora $(p_0)_*$ es epimorfismo pues $p \in W$.

Aplicando el lema de los cinco (ver[2]) :

Como \tilde{p}_0 y $(p_0)_*$ son epimorfismos entonces p_0 es un epimorfismo.

Por lo tanto $p_n : X_n \rightarrow Y_n$ es un epimorfismo para todo $n \geq 0$ Como consecuencia de la afirmación 1 obtenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{j} X \xrightarrow{p} Y \longrightarrow 0$$

donde $K = Nucp$ y j es la inclusión.

Afirmación 2.

K es acíclico.

En efecto, una parte de la sucesión exacta larga de homología correspondiente a la sucesión exacta corta anterior es la siguiente

$$H_{n+1}(X) \xrightarrow{p_{n+1}^*} H_{n+1}(Y) \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(K) \xrightarrow{j_n^*} H_n(X) \xrightarrow{p_n^*} H_n(Y)$$

Como p_{n+1}^* es epimorfismo y p_n^* es monomorfismo entonces $H_n(K) = 0$, para todo $n \geq 0$. Por tanto K es acíclico.

Ahora construiremos el morfismo requerido $f = (f_n)_{n \geq 0}$, $f_n : B_n \rightarrow X_n$ por inducción sobre n .

Para $n = 0$, consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} A : & \cdots & \xrightarrow{\partial_2^A} & A_1 & \xrightarrow{\partial_1^A} & A_0 & \\ & & & \downarrow i_1 & & \downarrow i_0 & \\ & & & B_1 & \xrightarrow{\partial_1^B} & B_0 & \\ B : & \cdots & \xrightarrow{\partial_2^B} & & & & \end{array}$$

Como $i : A \rightarrow B$ es una cofibración, entonces $i_0 : A_0 \rightarrow B_0$ es un monomorfismo y $Conuc\ i_0 = \frac{B_0}{Im\ i_0}$ es proyectivo.

Luego la sucesión

$$0 \longrightarrow Im\ i_0 \longrightarrow B_0 \longrightarrow \frac{B_0}{Im\ i_0} \longrightarrow 0$$

es exacta corta y parte.

Por tanto $B_0 \cong A_0 \oplus P_0$ donde $A_0 = Im\ i_0$, $P_0 = Conuc\ i_0 = \frac{B_0}{Im\ i_0}$ es módulo proyectivo.

Por otro lado se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A_0 & \xrightarrow{g_0} & X_0 \\ & \downarrow i_0 & \downarrow p_0 \\ P_0 & \xrightleftharpoons[\pi_0]{j_0} & B_0 \xrightarrow{h_0} Y_0 \end{array}$$

donde j_0 es la inclusión tal que $j_0 \circ \pi_0 = 1_{B_0}$.
Luego en el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & P_0 & & \\
 & \swarrow k_0 & \downarrow h_0 \circ j_0 & & \\
 X_0 & \xrightarrow{p_0} & Y_0 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

existe $k_0 : P_0 \rightarrow X_0$ tal que $p_0 \circ k_0 = h_0 \circ j_0$ pues P_0 es un módulo proyectivo.

Ahora consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & B_0 \cong A_0 \oplus P_0 & & \\
 & \nearrow i_0 & \downarrow f_0 & \nwarrow j_0 & \\
 A_0 & & & & P_0 \\
 & \searrow g_0 & \downarrow & \swarrow k_0 & \\
 & & X_0 & &
 \end{array}$$

Existe un único morfismo $f_0 = (g_0, k_0)$ tal que cumple:

- i) $f_0 \circ i_0 = (g_0, k_0) \circ i_0 = g_0$,
 - ii) $p_0 \circ f_0 = p_0 \circ (g_0, k_0) = (p_0 \circ g_0, p_0 \circ k_0) = (h_0 \circ i_0, h_0 \circ j_0) = h_0 \circ (i_0, j_0) = h_0$,
- pues $(h_0 \circ (i_0, j_0))(a_0, b_0) = h_0 \circ (i_0(a_0), j_0(b_0)) = h_0(a_0, b_0)$,
 $\forall (a_0, b_0) \in B_n$
 entonces $h_0 \circ (i_0, j_0) = h_0$. Además se tiene el cuadrado conmutativo.

$$\begin{array}{ccc}
 B_0 & \xrightarrow{f_0} & X_0 \\
 0 \downarrow & & \downarrow 0 \\
 0 & \xrightarrow{0} & 0
 \end{array}$$

Asumamos que para $0 < k < n$ han sido construidos homomorfismos $f_k : B_k \rightarrow X_k$ con las siguientes propiedades:

$$\begin{array}{ccc}
 A_k & \xrightarrow{g_k} & X_k \\
 \downarrow i_k & \nearrow f_k & \downarrow p_k \\
 B_k & \xrightarrow{h_k} & Y_k
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 B_k & \xrightarrow{\partial_k^B} & B_{k-1} \\
 \downarrow f_k & & \downarrow f_{k-1} \\
 X_k & \xrightarrow{\partial_k^X} & X_{k-1}
 \end{array}$$

i) $\partial_k^X \circ f_k = f_{k-1} \circ \partial_k^B, 1 \leq k < n,$

ii) $p_k \circ f_k = h_k, 0 \leq k < n,$

iii) $f_k \circ i_k = g_k, 0 \leq k < n.$

Construiremos entonces f_n que cumpla i), ii) y iii). Para ello repetimos el mismo argumento que para $n = 0$.

Es decir, consideramos el digrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 A_n & \xrightarrow{g_n} & X_n \\
 \downarrow i_n & & \downarrow p_n \\
 B_n & \xrightarrow{h_n} & Y_n
 \end{array}$$

y obtenemos la sucesión exacta corta que parte

$$0 \longrightarrow \text{Im } i_n \xrightarrow{j} B_n \xrightarrow{p} \frac{B_n}{\text{Im } i_n} \longrightarrow 0.$$

Por tanto $B_n = A_n \oplus P_n$ donde $A_n = \text{Im } i_n, P_n = \text{Conuc } i_n = \frac{B_n}{\text{Im } i_n}$ es módulo proyectivo.

Por otro lado se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 & & A_n \xrightarrow{g_n} X_n \\
 & & \downarrow i_n \\
 P_n & \xrightleftharpoons[\pi_n]{j_n} & B_n \xrightarrow{h_n} Y_n \\
 & & \downarrow p_n
 \end{array}$$

donde j_n es la inclusión tal que $j_n \circ p_n = 1_{B_n}$. Luego en el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & P_n & & \\
 & & \downarrow h_n \circ j_n & & \\
 & \swarrow k_n & & \searrow & \\
 X_n & \xrightarrow{p_n} & Y_n & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

existe $k_n : P_n \rightarrow X_n$ tal que $p_n \circ k_n = h_n \circ j_n$ pues P_n es un módulo proyectivo.

Ahora consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & B_n \cong A_n \oplus P_n & & \\
 & \nearrow i_n & & \nwarrow j_n & \\
 A_n & & & & P_n \\
 & \searrow g_n & & \swarrow k_n & \\
 & & X_n & & \\
 & & \downarrow \tilde{f}_n & &
 \end{array}$$

Existe un único morfismo $\tilde{f}_n = (g_n, k_n)$ tal que cumple:

ii) $p_n \circ \tilde{f}_n = p_n \circ (g_n, k_n) = (p_n \circ g_n, p_n \circ k_n) = (h_n \circ i_n, h_n \circ j_n) = h_n \circ (i_n, j_n) = h_n,$

iii) $\tilde{f}_n \circ i_n = (g_n, k_n) \circ i_n = g_n,$

pues $(h_n \circ (i_n, j_n))(a_n, b_n) = h_n \circ (i_n(a_n), j_n(b_n)) = h_n(a_n, b_n),$

$\forall (a_n, b_n) \in B_n$

entonces $h_n \circ (i_n, j_n) = h_n.$

En conclusión hemos construido un morfismo \tilde{f}_n que cumple ii) y iii) pero no necesariamente cumple i).

Mejoraremos la construcción de \tilde{f} para que ello ocurra.

Definamos el homomorfismo $\varepsilon_n : B_n \rightarrow X_{n-1}$ mediante

$$\varepsilon_n := \partial_n^X \circ \tilde{f}_n - f_{n-1} \circ \partial_n^B.$$

Se tiene entonces el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 B : & \cdots & \xrightarrow{\partial_{n+1}^B} & B_n & \xrightarrow{\partial_n^B} & B_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}^B} & B_{n-2} & \xrightarrow{\partial_{n-2}^B} & \cdots \\
 f \downarrow & & & \tilde{f}_n \downarrow & \searrow \varepsilon_n & \downarrow f_{n-1} & \searrow \varepsilon_{n-1} & \downarrow f_{n-2} & & \\
 X : & \cdots & \xrightarrow{\partial_{n+1}^X} & X_n & \xrightarrow{\partial_n^X} & X_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}^X} & X_{n-2} & \xrightarrow{\partial_{n-2}^X} & \cdots
 \end{array}$$

Afirmación 3.

ε_n cumple

i) $\partial_{n-1}^X \circ \varepsilon_n = 0$

En efecto:

$$\begin{aligned}
 \partial_{n-1}^X \circ \varepsilon_n &= \partial_{n-1}^X \circ (\partial_n^X \circ \tilde{f}_n - f_{n-1} \circ \partial_n^B) = \\
 &= \underbrace{\partial_{n-1}^X \circ \partial_n^X}_{=0} \circ \tilde{f}_n - \underbrace{\partial_{n-1}^X \circ f_{n-1}}_{=0} \circ \partial_n^B = 0 - f_{n-2} \circ \underbrace{\partial_{n-1}^B \circ \partial_n^B}_{=0} = -f_{n-2} \circ 0 = 0
 \end{aligned}$$

ii) $p_{n-1} \circ e_n = 0$.

En efecto :

$$\begin{aligned}
 p_{n-1} \circ \varepsilon_n &= p_{n-1} \circ (\partial_n^X \circ \tilde{f}_n - f_{n-1} \circ \partial_n^B) = \\
 &= \underbrace{p_{n-1} \circ \partial_n^X}_{=0} \circ \tilde{f}_n - \underbrace{p_{n-1} \circ f_{n-1}}_{=0} \circ \partial_n^B = \partial_n^Y \circ \underbrace{p_n \circ \tilde{f}_n}_{=h_{n-1}} - h_{n-1} \circ \partial_n^B = \partial_n^Y \circ h_n - h_{n-1} \circ \partial_n^B = 0
 \end{aligned}$$

$h_n - h_{n-1} \circ \partial_n^B = 0$ iii) $\varepsilon_n \circ i_n = 0$.

En efecto:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_n \circ i_n &= (\partial_n^X \circ \tilde{f}_n - f_{n-1} \circ \partial_n^B) \circ i_n = \partial_n^X \circ \tilde{f}_n \circ i_n - f_{n-1} \circ \partial_n^B \circ i_n = \\
 &= \partial_n^X \circ g_n - f_{n-1} \circ i_{n-1} \circ \partial_n^A = \partial_n^X \circ g_n - g_{n-1} \circ \partial_n^A = 0.
 \end{aligned}$$

Por otro lado, del diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 K_n & \xrightarrow{\partial_n^K} & K_{n-1} \\
 j_n \downarrow & & \downarrow j_{n-1} \\
 X_n & \xrightarrow{\partial_n^X} & X_{n-1}
 \end{array}$$

se deduce que $Im \partial_n^K \cong j_{n-1}(\partial_n^K) \subset Im \partial_n^X$.

Afirmación 4.

Sea $b \in B$. Entonces $\varepsilon_n(b) \in Z_{n-1} = Nuc\partial_{n-1}^K$

En efecto:

$$\partial_{n-1}^K \varepsilon_n(b) \in Im\partial_{n-1}^K \subset Im\partial_{n-1}^X$$

Luego $\partial_{n-1}^K \varepsilon_n(b) = \partial_{n-1}^X \varepsilon_n(b)$

Pero $\partial_{n-1}^X \varepsilon_n(b) = 0$ por la propiedad i) que cumple ε .

En consecuencia $\varepsilon(b) \in Nuc\partial_{n-1}^K = Z_{n-1}(K)$.

Por la afirmación 4 podemos garantizar que ε_n induce el homomorfismo

$$\varepsilon' : \frac{B_n}{Imi_n} \rightarrow Z_{n-1}(K), \quad \varepsilon'_n(\bar{b}) = \varepsilon_n(b)$$

ε' está bien definida pues $\varepsilon_n(b) \in Z_{n-1}^K$ y además

$$\varepsilon'_n(\bar{b}) = \varepsilon_n(\bar{c}) \Rightarrow b - c \in Imi_n \subset Nuc \varepsilon_n \Rightarrow \varepsilon_n(b - c) = 0 \Rightarrow \varepsilon_n(b) = \varepsilon_n(c)$$

Relación entre ε_n y ε'_n

Del diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} B_n & & & & \\ \pi_n \downarrow & \searrow \varepsilon_n & & & \\ P_n = \frac{B_n}{Imi_n} & \xrightarrow{\varepsilon'_n} & Z_{n-1}^K & \xrightarrow{j_{n-1}} & X_{n-1} \end{array}$$

se deduce que $\varepsilon_n = j_{n-1} \circ \varepsilon'_n \circ \pi_n$

Como K es acíclico entonces $H_n(K) = 0$ y como P_n es proyectivo en el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & P_n & & \\ & \swarrow \varepsilon''_n & \downarrow \varepsilon'_n & & \\ K_n & \xrightarrow{\partial_n^K} & Z_{n-1}^K & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

existe $\varepsilon''_n : P_n \rightarrow K_n$ tal que $\partial_n^K \circ \varepsilon''_n = \varepsilon'_n$.

Finalmente en el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 B_n & \xrightarrow{\pi_n} & P_n \\
 & \searrow^{\varepsilon''_n} & \downarrow^{\varepsilon'_n} \\
 & & K_n \xrightarrow{\partial_n^K} Z_{n-1}^K \\
 & \searrow^{\varepsilon'''_n} & \downarrow^{j_n} \\
 & & X_n \xrightarrow{\partial_n^X} X_{n-1} \\
 & & \downarrow^{j_{n-1}} \\
 & & X_{n-1}
 \end{array}$$

Definimos $\varepsilon'''_n : B_n \rightarrow X_n$ mediante $\varepsilon'''_n := j_n \circ \varepsilon''_n \circ \pi_n$.

Afirmación 5.

El morfismo $f_n = \tilde{f}_n - \varepsilon'''_n$ es el levantamiento $f_n : B_n \rightarrow X_n$ que estamos buscando.

En efecto f_n cumple las propiedades i) , ii) y iii)

i) Se sabe que $\varepsilon_n := \partial_n^X \circ \tilde{f}_n - f_{n-1} \circ \partial_n^B$.

Luego $f_{n-1} \circ \partial_n^B = \partial_n^X \circ \tilde{f}_n - \varepsilon_n$.

Por otro lado $f_n = \tilde{f}_n - \varepsilon'''_n \Rightarrow \tilde{f}_n = f_n + \varepsilon'''_n$.

Así,

$$\begin{aligned}
 f_{n-1} \circ \partial_n^B &= \partial_n^X \circ \tilde{f}_n - \varepsilon_n = \partial_n^X \circ (f_n + \varepsilon'''_n) - \varepsilon_n \\
 &= \partial_n^X \circ f_n + \partial_n^X \circ \varepsilon'''_n - \varepsilon_n = \partial_n^X \circ f_n + \partial_n^X \circ (j_n \circ \varepsilon''_n \circ \pi_n) - \varepsilon_n = \\
 &= \partial_n^X \circ f_n + \partial_n^X \circ j_n \circ \varepsilon''_n \circ \pi_n - \varepsilon_n = \partial_n^X \circ f_n + j_{n-1} \circ \partial_n^K \circ \varepsilon''_n \circ \pi_n - \varepsilon_n = \\
 &= \partial_n^X \circ f_n + j_{n-1} \circ \varepsilon'_n \circ \pi_n - \varepsilon_n = \partial_n^X \circ f_n + \varepsilon_n - \varepsilon_n.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$f_{n-1} \circ \partial_n^B = \partial_n^X \circ f_n.$$

ii)

$$p_n \circ f_n = p_n \circ (\tilde{f}_n - \varepsilon'''_n) = p_n \circ \tilde{f}_n - p_n \circ \varepsilon'''_n = h_n - \underbrace{p_n \circ j_n \circ \varepsilon''_n \circ \pi_n}_0.$$

Por lo tanto

$$p_n \circ f_n = h_n.$$

iii)

$$f_n \circ i_n = (f_n - \varepsilon_n''') \circ i_n = f_n \circ i_n - \varepsilon_n''' \circ i_n = g_n - j_n \circ \varepsilon_n'' \circ \underbrace{\pi_n \circ i_n}_0.$$

Por lo tanto

$$f_n \circ i_n = g_n.$$

Antes de continuar con la demostración del teorema daremos algunos resultados previos.

Sea A un R -módulo, para $n \geq 1$ definimos el objeto $D_n(A)$ de Ch_R como el complejo de cadenas

$$(D_n(A))_k := \begin{cases} 0, & \text{si } k \neq n, n-1 \\ A, & \text{si } k = n, n-1 \end{cases}$$

donde el operador borde $\partial_k = 1_A : A \rightarrow A$, para $k = n$ y $\partial_k = 0$, para $k \neq n$. A este complejo se le suele llamar el **disco** de A .

Lema 1

Sea A un R -módulo, M un objeto de Ch_R .

Entonces el morfismo

$$\begin{aligned} \varphi : Hom_{Ch_R}(D_n(A), M) &\rightarrow Hom_{Mod_R}(A, M_n) \\ f = (f_n)_{n \geq 0} &\mapsto f_n \end{aligned}$$

es un isomorfismo en la categoría de Conjuntos (biyección).

Demostración

Inyectividad

Sean $f = (f_n)_{n \geq 0}$ y $g = (g_n)_{n \geq 0}$ elementos de $Hom_{Ch_R}(D_n(A), M)$ tales que $\varphi(f) = \varphi(g)$.

Entonces $f_n = g_n$. Resta demostrar que $f_{n-1} = g_{n-1}$.

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 D_n(A) : & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{1_A} & A & \longrightarrow & 0 & \cdots \\
 & & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & \\
 & & & f \Downarrow g & & f_n \Downarrow g_n & & f_{n-1} \Downarrow g_{n-1} & & & \\
 M : & \cdots & \longrightarrow & M_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}^M} & M_n & \xrightarrow{\partial_n^M} & M_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}^M} & M_{n-2} & \cdots
 \end{array}$$

Como el diagrama es conmutativo se sigue

$$f_{n-1} = f_{n-1} \circ 1_A = \partial_n^M \circ f_n = \partial_n^M \circ g_n = g_{n-1} \circ 1_A = g_{n-1}.$$

Por tanto $f = g$.

Surjectividad

Sea $h_n : A \rightarrow M_n$ un homomorfismo de R -módulos. Definimos el morfismo de complejos $h : D_n(A) \rightarrow M$

$$h_k := \begin{cases} 0, & \text{si } k = n \\ \partial_n^M \circ h_n, & \text{si } k = n - 1 \\ 0, & \text{si } k \neq n, n - 1 \end{cases}$$

h cumple $\varphi(h) = h_n$.

Observación 1

El lema implica que si A un R -módulo proyectivo entonces $D_n(A)$ es lo que podríamos llamar un complejo de cadenas proyectivo. Esto significa que si $p : M \rightarrow N$ es un epimorfismo de complejos de cadenas (o aún un epimorfismo en grados mayores ó iguales que 1) entonces cualquier aplicación $f : D_n(A) \rightarrow N$ levanta sobre p una aplicación $g : D_n(A) \rightarrow M$. En efecto: supongamos que A un R -módulo proyectivo y sea el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & D_n(A) & \\
 & & g \swarrow \cdots & \downarrow f & \\
 M & \xrightarrow{p} & N & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

donde $p : M \rightarrow N$ es un epimorfismo de complejos de cadenas. En el grado n se tiene el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & A & \\
 & & & \downarrow f_n & \\
 & g_n \swarrow & & & \\
 M_n & \xrightarrow{p_n} & N_n & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

donde p_n es un epimorfismo y A un R-módulo proyectivo. Luego existe $g_n : A \rightarrow M_n$ tal que $p_n \circ g_n = f_n$. En el grado $n - 1$ definimos :

$$g_{n-1} : A \rightarrow M_{n-1}, \quad g_{n-1} = \partial_n^M \circ g_n.$$

Luego definimos $g = (g_k)_{k=0}$, con $g_k = 0$ si $k \neq n, n - 1$. Se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 D_n(A) : & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{1_A} & A & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\
 & & & \downarrow g_{n+1} & & \downarrow g_n & & \downarrow g_{n-1} & & \downarrow & & \\
 f \downarrow & & & & & & & & & & & \\
 M : & \cdots & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{\partial_{n+1}^M} & M_n & \xrightarrow{\partial_n^M} & M_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}^M} & M_{n-2} & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

g cumple

$$p_n \circ g_n = f_n, p_{n-1} \circ g_{n-1} = p_{n-1} \circ \partial_n^M \circ g_n = \partial_n^N \circ p_n \circ g_n = \partial_n^N \circ f_n = f_{n-1}.$$

Observemos que para $n = 0$ se tiene el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & A & \\
 & & & \downarrow f_0 & \\
 & g_0 \swarrow & & & \\
 M_0 & \xrightarrow{p_0} & N_0 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Supongamos que p_0 no fuera epimorfismo, construiremos g_0 de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & A & & \\
 & & & & \downarrow g_1 & \searrow \partial_1^M \circ g_1 & \\
 \cdots & \longrightarrow & M_2 & \xrightarrow{\partial_2^M} & M_1 & \xrightarrow{\partial_1^M} & M_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow p_2 & & \downarrow p_1 & & \downarrow p_0 \\
 \cdots & \longrightarrow & N_2 & \xrightarrow{\partial_2^N} & N_1 & \xrightarrow{\partial_1^N} & N_0 \longrightarrow 0
 \end{array}$$

donde g_1 ya ha sido construido cuando $n = 1$. Definimos $g_0 = \partial_1^M \circ g_1$, se cumple $p_0 \circ g_0 = p_0 \circ \partial_1^M \circ g_1 = \partial_1^N \circ p_1 \circ g_1 = \partial_1^N \circ f_1 = f_0$.

Similarmente, cualquier suma de complejos de cadenas de la forma $\bigoplus_i D_{n_i}(A_i)$ es un complejo de cadenas proyectivo si cada A_i es un R-módulo proyectivo.

Lema 2

Supongamos que P es un objeto acíclico de Ch_R tal que cada P_k es un R-módulo proyectivo. Entonces cada módulo $Z_k(P) (k \geq 0)$ es proyectivo y P es isomorfo, como complejo de cadenas a $\bigoplus_{k \geq 1} D_k(Z_{k-1}(P))$.

Demostración.

Sea

$$P : \dots P_{k+1} \xrightarrow{\partial_{k+1}^P} P_k \xrightarrow{\partial_k^P} P_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}^P} \dots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\partial_1^P} P_0 \rightarrow 0$$

tal que $Im \partial_{k+1}^P = Nuc \partial_k^P$ y que P_k es proyectivo para todo $k \geq 0$, es decir, P es acíclico.

Para cada $k \geq 1$ definimos el complejo $P^{(k)}$ de la siguiente manera:

$$(P^{(k)})_j = \begin{cases} P_j & \text{si } j \geq k \\ B_{k-1}(P) = Im \partial_k^P & \text{si } j = k - 1 \\ 0 & \text{si } j \leq k - 2 \end{cases}$$

Es decir,

$$P^{(k)} : \dots \longrightarrow P_{k+2} \xrightarrow{\partial_{k+2}^P} P_{k+1} \xrightarrow{\partial_{k+1}^P} P_k \xrightarrow{\partial_k^P} \text{Im}\partial_k \longrightarrow 0$$

el cuál es acíclico y además $P^1 = P$.

Sean el morfismo inclusión

$$\begin{array}{ccccccccccc} P^{(k+1)} : & \dots & P_{k+2} & \xrightarrow{\partial_{k+2}^P} & P_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}^P} & \text{Im}\partial_{k+1}^P & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ P^{(k)} : & \dots & P_{k+2} & \xrightarrow{\partial_{k+2}^P} & P_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}^P} & P_k & \xrightarrow{\partial_k^P} & \text{Im}\partial_k^P & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

y el complejo cociente correspondiente:

$$\frac{P^{(k)}}{P^{(k+1)}} : \dots \rightarrow 0 \longrightarrow \frac{P_k}{\text{Im}\partial_{k+1}^P} \xrightarrow{\bar{\partial}_k^P} \text{Im}\partial_k^P \longrightarrow 0 .$$

Por otro lado:

$$D_k(Z_{k-1}(P)) : \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow Z_{k-1}(P) \xrightarrow{1_{Z_{k-1}(P)}} Z_{k-1}(P) \longrightarrow 0 .$$

Luego se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} P_k & \xrightarrow{\partial_k^P} & \text{Im}\partial_k^P \\ \pi_k \downarrow & \nearrow \cong & \\ \frac{P_k}{\text{Im}\partial_{k+1}^P} & & \end{array}$$

Pero $Z_{k-1}(P) = \text{Nuc}\partial_{k-1} = \text{Im}\partial_k$.

Luego $Z_{k-1}(P) \cong \frac{P_k}{\text{Im}\partial_{k+1}^P}$.

Por lo tanto

$$\frac{P^{(k)}}{P^{(k+1)}} \cong D_k(Z_{k-1}(P)).$$

Es evidente que $Z_0(P) = P_0$ es proyectivo. Por la nota del Lema 1 si $Z_0(P)$ es proyectivo entonces $D_1(Z_0(P))$ es proyectivo.

Por lo tanto

$$\frac{P^{(1)}}{P^{(2)}} \cong D_1(Z_0(P))$$

es proyectivo.

Esto implica que

$$P = P^{(1)} \cong P^{(2)} \oplus D_1(Z_0(P)).$$

Se sabe que un sumando directo de un proyectivo es proyectivo, entonces se sabe que $P^{(2)}$ es proyectivo y al ser también acíclico cumple las condiciones del lema 2 pero se anula en el grado cero.

Repitiendo el argumento anterior para

$$P^{(2)} : \quad \cdots \longrightarrow P_4 \xrightarrow{\partial_4^P} P_3 \xrightarrow{\partial_3^P} P_2 \xrightarrow{\partial_2^P} \text{Im} \partial_2^P \longrightarrow 0$$

se logra el isomorfismo

$$P^{(2)} \cong P^{(3)} \oplus D_2(Z_1(P)).$$

$P^{(3)}$ es proyectivo (sumando directo de $P^{(2)}$ proyectivo) pero se anula en el grado 1. Reemplazando en el isomorfismo anterior se obtiene

$$P \cong P^{(3)} \oplus D_2(Z_1(P)) \oplus D_1(Z_0(P)).$$

Continuando con este argumento para $P^{(3)}$ y así sucesivamente para $P^{(k)}$ ($k \geq 1$) se obtiene

$$P \cong P^{(k)} \oplus D_{k-1}(Z_{k-2}(P)) \oplus \cdots \oplus D_2(Z_1(P)) \oplus D_1(Z_0(P))$$

donde $P^{(k)}$ es proyectivo y se anula en el grado $k - 2$.

Por lo tanto

$$P \cong \bigoplus_{k=1}^{+\infty} D_{k-1}(Z_{k-2}(P)).$$

Observación 2

- a) En el último paso de la demostración hemos usado el siguiente resultado para complejos de cadenas.

Sean A, B dos complejos de cadenas, se cumple:

$$A = B \Leftrightarrow A^{\leq N} = B^{\leq N}$$

para todo N número natural y donde el complejo $X^{\leq N}$ se define como

$$X^{\leq N} : \quad \cdots \longrightarrow X_{N+2} \xrightarrow{\partial_{n+2}^X} X_{N+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}^X} X_N \longrightarrow 0 .$$

En el caso de la demostración anterior hemos hecho

$$A^{\leq k-1} = P^{(k)}, \quad B^{\leq k-1} = 0 .$$

- b) El Lema 2 afirma que si P es un objeto acíclico de Ch_R con la propiedad que cada P_k es un R -módulo proyectivo, entonces P es un complejo de cadenas proyectivo en el sentido del Lema 1.

Ahora estamos en condiciones de realizar la

Demostración de CM2b)

En efecto, sea el diagrama de complejos de cadenas conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & X \\ i \downarrow & \nearrow \varphi & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

donde $i \in Cof \cap W, p \in Fib$.

Demostraremos que existe un levantamiento $\varphi : B \rightarrow X$ tal que $p \circ g = h, \varphi \circ i = g$.

Por definición de cofibración i es monomorfismo y el conúcleo $P = (B/(Imi))$ es un complejo de cadenas con $P_n = \frac{B_n}{Imi_n}$ proyectivo para todo $n \geq 0$.

Construimos la sucesión exacta corta de complejos

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} P \longrightarrow 0 .$$

Una parte de la sucesión exacta larga de homología correspondientes es:

$$H_n(A) \xrightarrow{i_n^*} H_n(B) \xrightarrow{\pi_n^*} H_n(P) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_{n-1}^*} H_{n-1}(B)$$

Como $i \in W$ entonces i_n^* es isomorfismo $\forall n \geq 0$.

Luego $H_n(P) = 0$, para todo $n \geq 1$.

Para $n = 0$ se tiene

$$H_0(A) \xrightarrow{i_0^*} H_0(B) \xrightarrow{\pi_0^*} H_0(P) = \frac{P_0}{Im \partial_1^P} \longrightarrow 0.$$

$Im i_0^* = H_0(B) = Nuc \pi_0^*$, es decir $\pi_0^* = 0$. Por tanto, $H_0(P) = Im \pi_0^* = 0$.

Por la observación 2b) se concluye que P es un complejo de cadenas proyectivo en el sentido del Lema 1.

De manera que $B \cong A \oplus P$ en el diagrama

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightleftharpoons[\pi]{q} P \longrightarrow 0$$

donde q es el split tal que $p \circ q = i \circ id_P$. Sea el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \swarrow \varphi_i & \downarrow h \circ q \\ X & \xrightarrow{p} & Y \longrightarrow 0 \end{array}$$

Existe $\tilde{\varphi} : P \rightarrow X$ tal que $p \circ \tilde{\varphi} = h \circ q$. Luego se tiene el diagrama :

$$\begin{array}{ccccc} & & B \cong A \oplus P & & \\ & \nearrow i & & \nwarrow q & \\ A & & & & P \\ & \searrow g & & \swarrow \tilde{\varphi} & \\ & & X & & \end{array}$$

φ (vertical arrow from $B \cong A \oplus P$ to X)

Existe $\varphi = (g, \tilde{\varphi}) : B \Rightarrow X$ tal que

$$\varphi \circ i = g, \quad \varphi \circ q = \tilde{\varphi}$$

φ es el levantamiento que estábamos buscando.

En efecto, $p \circ \varphi = p \circ (g, \tilde{\varphi}) = (p \circ g, p \circ \tilde{\varphi}) = (h \circ i, h \circ q) = h \circ (i, q) = h$.

Además, por lo anterior $\varphi \circ i = g$.

La demostración de **CM3** la daremos usando un argumento llamado argumento del objeto pequeño, el cual es debido a Quillen D.G.

En lo que sigue asumiremos que \mathcal{C} es una categoría con todos los colímites pequeños.

Dado un funtor $B : Z^+ \rightarrow \mathcal{C}$ y un objeto A de \mathcal{C} , los morfismos naturales $t_n : B(n) \rightarrow \text{colim}(B)$ inducen morfismos

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B(n)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \text{colim}(B)),$$

los cuales son los suficientemente compatibles para los diversos n para dar un morfismo canónico

$$\text{colim}_n \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B(n)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \text{colim} B(n)).$$

En efecto, el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & B(n) & \xleftarrow{f} & A \\
 & \swarrow t_n & & \\
 \text{colim} B & & & \\
 & \nwarrow t_{n+1} & & \\
 & & B(n+1) &
 \end{array}$$

es conmutativo $\forall n \in Z^+$.

$\forall n \in Z^+$ definimos

$$t_n^* : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B(n)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \text{Colim}(B)), \quad t_n^*(f) = t_n \circ f.$$

Sea el funtor

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B(-)) : Z^+ \rightarrow \text{Set}$$

$\text{colim}_n \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B(n))$ existe y además se tiene el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & & H_n \\
 & \xleftarrow{t_n^*} & \swarrow s_n \\
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \text{colim}(B)) & \xleftarrow{\varphi} & \text{colim}_n \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B(n)) \\
 & \xleftarrow{t_{n+1}^*} & \swarrow s_{n+1} \\
 & & H_{n+1} \\
 & & \downarrow B^*(\alpha)
 \end{array}$$

donde $H_n = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B(n)), H_{n+1} = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B(n+1))$ y $B^*(\alpha) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1_A, \alpha)$, con $\alpha : B(n) \rightarrow B(n+1)$.

Los t_n^* cumplen : $(t_{n+1}^* \circ B^*(\alpha))(f) = t_{n+1}^*((B^*(\alpha) \circ f)) = t_{n+1} \circ B(\alpha) \circ f = t_{n+1} B(\alpha) \circ f = t_n \circ f = t_n(f)$.

Luego existe un único

$$\varphi : \text{colim}_n \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B(n)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \text{Colim}(B)).$$

En este caso

$$\text{colim}_n \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B(n)) = \frac{\bigcup_{\text{disjunta}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B(n))}{\sim}.$$

Luego φ está definida mediante $\varphi([f_n]) = t_n \circ f_n$, donde $f_n : A \rightarrow B(n)$.

Un objeto A de \mathcal{C} es **secuencialmente pequeño** si para todo funtor $B : Z^+ \rightarrow \mathcal{C}$ la aplicación canónica φ anterior es una biyección.

Observación 3

Un conjunto es secuencialmente pequeño si y sólo si es finito.

Un R-módulo es secuencialmente pequeño si tiene una presentación finita, es decir, es isomorfo al conúcleo de un morfismo entre dos R-módulos libres finitamente generados.

En particular, R es secuencialmente pequeño. (Basta considerar $h : R \rightarrow R$, $h = 0$ pues en este caso $\text{conuc}(h) = \frac{R}{\text{Im}h} = \frac{R}{0} \cong R$.)

Un objeto M de Ch_R es secuencialmente pequeño si y sólo si un número finito de los módulos M_n son diferentes de cero y cada M_n tiene una presentación finita. (En este caso se usa el hecho de que $\text{colim}_n \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B(n)) \cong \text{colim}_n B(n) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \text{colim} B(n))$)

Construcción del Gluing Infinito

Sea $\mathcal{F} = f_i : A_i \rightarrow B_{i \in I}$ una familia de morfismos en \mathcal{C} .

Supongamos que $p : X \rightarrow Y$ es un morfismo en \mathcal{C} . Deseamos factorizar p de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & X' \\ & \searrow p & \downarrow \\ & & Y \end{array}$$

de tal modo que el morfismo $X \rightarrow X'$ tenga la propiedad de levantamiento a derecha (RLP) con respecto a todas las aplicaciones de \mathcal{F} .

Por supuesto que podríamos elegir $X' = Y$, pero la segunda meta es encontrar una factorización en la cual X' esté tan próximo a X como sea razonablemente posible.

Para cada $i \in I$ consideremos el conjunto $S(i)$ de todas los pares de morfismos (g, h) tales que el siguiente diagrama (*) conmuta

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{g} & X \\ f_i \downarrow & & \downarrow p \\ B_i & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

Para cada $i \in I$ existe el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{(g,h) \in S(i)} A_i & \longleftarrow & A_i \\ & \searrow +g & \downarrow g \\ & & X \end{array}$$

Luego, haciendo variar $i \in I$ se obtiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i \in I} \coprod_{(g,h) \in S(i)} A_i & \longleftarrow & A_i \\ & \searrow +_{i \in I} +g & \downarrow g \\ & & X \end{array}$$

Del mismo modo se obtiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \coprod_{i \in I} & \coprod_{(g,h) \in S(i)} & B_i \longleftarrow B_i \\
 & & \searrow^{+i \in I + h} \quad \downarrow h \\
 & & Y
 \end{array}$$

Definimos la construcción del gluing $G^1(\mathcal{F}, p)$ como el objeto de \mathcal{C} dado por el diagrama pushout

$$\begin{array}{ccc}
 \coprod_i & \coprod_{(g,h)} & A_i^{+i+(g,h)g} \longrightarrow X \\
 \sqcup \sqcup f_i \downarrow & & \downarrow i_1 \\
 \coprod_i & \coprod_{(g,h)} & B_i \longrightarrow G^1(\mathcal{F}, p)
 \end{array}$$

En realidad $G^1(\mathcal{F}, p)$ es el coproducto fibrado de $+i +_{(g,h)} g$ y $\sqcup_i f_i$ y se denota por

$$G^1(\mathcal{F}, p) = X \sqcup_A (\sqcup_{i \in I} \sqcup_{(g,h) \in S(i)} B_i),$$

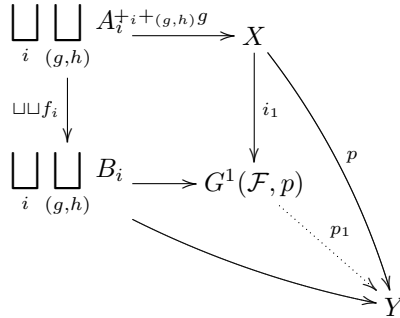
donde $A = \sqcup_{i \in I} \sqcup_{(g,h) \in S(i)} A_i$.

Esto nos recuerda la construcción de un complejo singular, estamos pegando una copia de B_i a X por medio de los A_i para cada diagrama conmutativo (*).

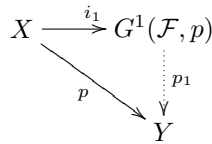
Como se indica, existe un morfismo natural

$$i_1 : X \rightarrow G^1(\mathcal{F}, p)$$

Aplicamos la definición de coproducto cartesiano al diagrama



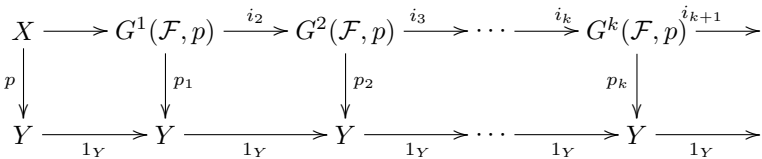
Se cumple que $p \circ (+ + g) = (+ + h) \circ \sqcup \sqcup f_i$. Luego existe $p_1 : G^1(\mathcal{F}, p) \rightarrow Y$ tal que $p_1 \circ i_1 = p$. También se puede obtener p_1 considerando que $G^1(\mathcal{F}, p)$ es el colímite de $+ + g$ y $\sqcup \sqcup f_i$. Luego se tiene el diagrama



Ahora repetimos el proceso: para $k > 1$ definimos objetos $G^k(\mathcal{F}, p)$ y aplicaciones $p_k : G^k(\mathcal{F}, p) \rightarrow Y$ inductivamente haciendo

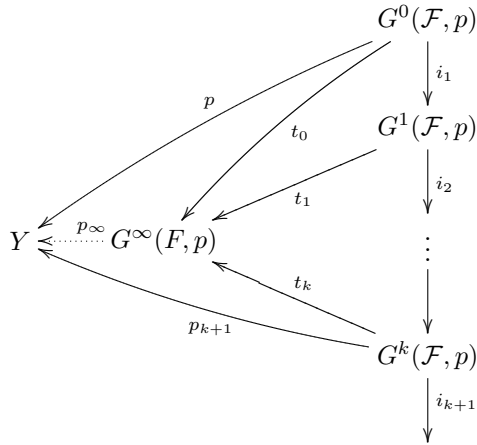
$$G^k(\mathcal{F}, p) = G^1(\mathcal{F}, p_{k-1}), \quad p_k = (p_{k-1})_1.$$

Así obtenemos el diagrama conmutativo:



Definimos $G^\infty(F, p) = \text{colim}_k G^k(F, p)$ donde $G^0(F, p) = X$ y lo llamaremos la construcción **gluing infinito**.

Se tiene el siguiente diagrama



Por propiedad universal de colímite existe $p_\infty : G^\infty(\mathcal{F}, p) \rightarrow Y$ tal que $p_\infty \circ i_\infty = p$. donde $i_\infty = t_0$

Proposición 5

En la situación anterior, supongamos que para cada $i \in I$ el objeto A_i de \mathcal{C} es secuencialmente pequeño.

Entonces el morfismo $p_\infty : G^\infty(\mathcal{F}, p) \rightarrow Y$ tiene la propiedad RLP con respecto a cada uno de los morfismos de la familia \mathcal{F} .

Demostración.

Consideremos un diagrama conmutativo que proporciona uno de los problemas de levantamiento en cuestión:

$$\begin{array}{ccc}
 A_i & \xrightarrow{g} & G^\infty(\mathcal{F}, p) \\
 f_i \downarrow & & \downarrow p_\infty \\
 B_i & \xrightarrow{h} & Y
 \end{array}$$

Puesto que A_i es secuencialmente pequeño, significa que la función

$$\varphi : \text{colim}_k \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A_i, G^k(\mathcal{F}, p)) \rightarrow \text{Hom}_B(A_i, G^\infty(\mathcal{F}, p))$$

$$[g_k] \mapsto t_k \circ g_k$$

es una biyección, donde $g_k : A_i \rightarrow G^k(\mathcal{F}, p)$, $t_k : G^k(\mathcal{F}, p) \rightarrow G^\infty(\mathcal{F}, p)$.
 Luego para cada $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A_i, G^\infty(\mathcal{F}, p))$ existe $[g_k]$ con $g_k : A_i \rightarrow G^k(\mathcal{F}, p)$ tal que $t_k \circ g_k = g$.

Llamemos $g_k = g'$. Por lo tanto el diagrama anterior se puede extender al siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} A_i & \xrightarrow{g'} & G^k(\mathcal{F}, p) & \xrightarrow{i_{k+1}} & G^{k+1}(\mathcal{F}, p) & \xrightarrow{t_{k+1}} & G^\infty(\mathcal{F}, p) \\ f_i \downarrow & & \downarrow p_k & & \downarrow p_{k+1} & & \downarrow p_\infty \\ B_i & \xrightarrow{h} & Y & \xrightarrow{1_Y} & Y & \xrightarrow{1_Y} & Y \end{array}$$

en el cual la compuesta de la fila superior es g . Además el diagrama es conmutativo.

En efecto, sabemos que $p_\infty \circ g = h \circ f_i$.

Pero $p_\infty \circ g = p_\infty \circ t_k \circ g' = p_k \circ g'$. Por lo tanto $p_k \circ g' = h \circ f_i$.

Ahora el par (g', h) contribuye como un índice más en la construcción de $G^{k+1}(\mathcal{F}, p)$ a partir de $G^k(\mathcal{F}, p)$ de la siguiente manera:

Construcción de $G^k(\mathcal{F}, p)$

$$S(i) : \begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{g} & G^k(\mathcal{F}, p) \\ f_i \downarrow & & \downarrow p_k \\ B_i & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

para todo (g, h) tal que el diagrama es conmutativo.

Para cada i se tienen los diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} \sqcup A_i & \xleftarrow{\alpha_i} & A_i \\ & \searrow +g & \downarrow g \\ & & G^k(\mathcal{F}, p) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \sqcup B_i & \xleftarrow{\beta_i} & B_i \\ & \searrow +h & \downarrow h \\ & & Y \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \bigsqcup_i \bigsqcup_{(g,h)} A_i & \xrightarrow{++g} & G^k(\mathcal{F}, p) \\
 \bigsqcup \sqcup f_i \downarrow & & \downarrow i_{k+1} \\
 \bigsqcup_i \bigsqcup_{(g,h)} B_i & \xrightarrow{q} & G^{k+1}(\mathcal{F}, p)
 \end{array}$$

Pero el cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 A_i & \xrightarrow{g'} & G^k(\mathcal{F}, p) \\
 f_i \downarrow & & \downarrow p_k \\
 B_i & \xrightarrow{h} & Y
 \end{array}$$

contribuye en la construcción de $G^{k+1}(\mathcal{F}, p)$.

Se tiene el morfismo $\beta_i : B_i \rightarrow \bigsqcup \sqcup B_i$ correspondiente al par (g', h) , lo cual, a su vez, da lugar al morfismo $B_i \rightarrow G^{k+1}(\mathcal{F}, p)$.

Finalmente, el morfismo $\varphi = t_{k+1} \circ q \circ \beta_i : B_i \rightarrow G^{+\infty}(\mathcal{F}, p)$ es el levantamiento deseado.

En efecto

En realidad $q \circ \beta_i$ es la restricción de q a B_i .

Por otro lado, $q \circ \bigsqcup \sqcup f_i = i_{k+1} \circ ++g$.

Si restringimos $++g$ a A_i se obtiene

$$q \circ \beta_i \circ f_i = q \circ \bigsqcup \sqcup f_i = i_{k+1} \circ ++g \upharpoonright_{A_i} = i_{k+1} \circ ++g'.$$

Por lo tanto

$$\varphi \circ f_i = t_{k+1} \circ q \circ \beta_i \circ f_i = t_{k+1} \circ i_{k+1} \circ g' = g$$

$$p_\infty \circ \varphi = p_\infty \circ t_{k+1} \circ q \circ \beta_i = p_{k+1} \circ q \circ \beta_i = ++h \circ \beta_i = h$$

correspondiente al par (g', h) .

Antes de demostrar la condición **CM3** desarrollaremos unos resultados

previos adicionales.

Para $n \geq 1$ definimos el complejo de cadenas llamado n-disco:

$$D^n = D_n(R) : \quad \cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{\partial_{n+1}=0} R \xrightarrow{\partial_n=1_R} R \xrightarrow{\partial_{n-1}=0} 0 \longrightarrow \cdots$$

Para $n \geq 0$ definimos el complejo llamado n-esfera:

$$S^n : \quad \cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{\partial_{n+1}=0} R \xrightarrow{\partial_n=0} 0 \xrightarrow{\partial_{n-1}=0} 0 \longrightarrow \cdots$$

Existe una inclusión obvia $j_n : S^{n-1} \rightarrow D^n$ para $n \geq 1$

$$\begin{array}{ccccccccccc} S^{(n-1)} : & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & R & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ D^{(n)} : & \cdots & \longrightarrow & R & \xrightarrow{1_R} & R & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

la cual viene a ser la identidad de la copia de R en el grado n-1.

Además convenimos que D^0 y S^{-1} son los complejos nulos y el morfismo $j_0 : S^{-1} \rightarrow D^0$ es el morfismo cero.

Observación 4

Los complejos de cadenas D^n y S^n son secuencialmente pequeños.

Proposición 6

Un morfismo $f : X \rightarrow Y$ en Ch_R es

- a) una fibración \Leftrightarrow tiene la RLP con respecto a los morfismos $0 \rightarrow D^n$ para todo $n \geq 1$, y
- b) una fibración acíclica \Leftrightarrow tiene la RLP con respecto a los morfismos $j_n : S^{n-1} \rightarrow D^n$ para todo $n \geq 0$ y

Demostración de a)

Suficiencia

Sabemos que R es proyectivo entonces, por la observación 1, $D^n(R)$ también es proyectivo.

Por otro lado, si f es una fibración entonces f es un epimorfismo (aún

considerando los grados $n \geq 1$.

Luego en el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 0 & \longrightarrow & X \\
 \downarrow & \nearrow l & \downarrow f \\
 D^n(R) & \xrightarrow{h} & Y \\
 & & \downarrow \\
 & & 0
 \end{array}$$

existe el levantamiento $l : D^n(R) \rightarrow X$ que cumple $f \circ l = h$.

Necesidad

Supongamos que $f : X \rightarrow Y$ cumple la propiedad RLP con respecto a los morfismos $0 \rightarrow D^n$ para todo $n \geq 1$.

Demostraremos que $f_n : X_n \rightarrow Y_n$ es un epimorfismo para todo $n \geq 1$.

En efecto: para $n \geq 1$ se cumple que f tiene la propiedad RLP con respecto al morfismo $0 \rightarrow D^n$.

Es decir en todo diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccc}
 0 & \longrightarrow & X \\
 \downarrow & \nearrow l & \downarrow f \\
 D^n(R) & \xrightarrow{h} & Y
 \end{array}$$

existe el levantamiento $l : D^n(R) \rightarrow X$ que cumple $f \circ l = h$.

Sea $y \in Y_n$, definiremos un morfismo $h : D^n \rightarrow Y$ de la siguiente manera.

En el grado n se tiene el diagrama correspondiente

$$\begin{array}{ccc}
 0 & \longrightarrow & X_n \\
 \downarrow & \nearrow l_n & \downarrow f_n \\
 R & \xrightarrow{h_n} & Y_n
 \end{array}$$

Definimos $h_n : R \rightarrow Y_n$ mediante $h_n(1) = y$.

El cuadrado es conmutativo y entonces existe $l_n : R \rightarrow X_n$ tal que

$$f_n \circ l_n = h_n$$

Luego $f(l_n(1)) = h_n(1) = y$

Hacemos $x = l_n(1) \in X$ y se cumple $f_n(x) = y$ y por lo tanto f_n es epimorfismo.

Demostración de b)

Necesidad

Sea el diagrama

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{g} & X \\ j \downarrow & & \downarrow f \\ D^n(R) & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

Es evidente que S^{n-1} es un complejo acíclico tal que en cada grado se tiene un módulo proyectivo entonces por la observación 2b) se sigue que S^{n-1} es un complejo de cadenas proyectivo.

Por otro lado f es un epimorfismo en el sentido de complejos de cadenas pues por definición $f_n : X_n \rightarrow Y_n$ es epimorfismo para $n \geq 1$ y, además, como f es equivalencia débil, $f_0 : X_0 \rightarrow Y_0$ es epimorfismo ya que $(f_0)_* : H_0(X) \rightarrow H_0(Y)$ es un isomorfismo (Afirmación 1).

Luego el diagrama anterior se puede extender a

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{g} & X \\ j \downarrow & \nearrow l & \downarrow f \\ D^n(R) & \xrightarrow{h} & Y \\ & & \downarrow \\ & & 0 \end{array}$$

Finalmente usando la observación 2b) se concluye que existe el levantamiento $l : D^n(R) \rightarrow X$ tal que $f \circ l = h$

Suficiencia

Supongamos que $f : X \rightarrow Y$ cumple la propiedad RLP con respecto a los morfismos $j_n : S^{n-1} \rightarrow D^n$ para todo $n \geq 0$. Demostraremos que $f \in Fib \cap W$.

Primero demostraremos que $f \in Fib$.

Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & X_n \\ j \downarrow & & \downarrow f_n \\ R & \xrightarrow{h_n} & Y_n \end{array}$$

Igual que en la demostración de a) usando el hecho de que f tiene la RLP entonces f_n es epimorfismo.

Demostraremos ahora que $f = (f_m)$ es una equivalencia débil, es decir $f_m^* : H_m(X) \rightarrow H_m(Y)$ es un isomorfismo.

Demostraremos primero que f_m^* es suryectivo.

Sea $[y_m] \in H_m[Y]$

Usamos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} S^m & \xrightarrow{\alpha} & X \\ j \downarrow & & \downarrow f \\ D^{m+1} & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

haciendo $\alpha = 0, \beta_{m-1} = 0, \beta_m(1) = y_m$ se tiene que el diagrama es conmutativo y, por hipótesis, existe el morfismo $l : D^{m+1} \rightarrow X$ tal que $f \circ l = h$

$$\begin{array}{ccccccc} D^{m+1} : & \cdots & \longrightarrow & R & \longrightarrow & R & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ \downarrow & & & \downarrow l_{m+1} & & \downarrow l_m & & \downarrow l_{m-1} & & \\ X : & \cdots & \longrightarrow & X_{m+1} & \xrightarrow{\partial_{m+1}^X} & X_m & \xrightarrow{\partial_m^X} & X_{m-1} & \xrightarrow{\partial_{m-1}^X} & \cdots \end{array}$$

En el grado m

$f_m \circ l_m = \beta_m$. Por lo tanto $f_m(l_m(1)) = \beta_m(1) = y_m$.

Haciendo $x_m = l_m(1)$ se cumple

$$\partial_m^X(x_m) = \partial_m^X(l_m(1)) = l_{m-1}(\partial_m^{D^{m+1}}(1)) = 0.$$

La clase $[x_m] \in H_m(X)$ cumple $f_m^*([x_m]) = [f_m(x_m)] = [y_m]$.

Para la buena definición se demuestra que $f_m(x_m) - y_m \in \text{Im} \partial_m^Y$.

En efecto $\partial_m^Y(f_m(x_m) - y_m) = \partial_m^Y(f_m(x_m)) - \partial_m^Y(y_m) =$
 $= f_{m-1}(\partial_m^X(x_m)) - \partial_m^Y(y_m) = f_{m-1}(0) - \partial_m^Y(y_m) - \partial_m^Y(y_m) \in \text{Im} \partial_m^Y$.

Demostremos ahora que f_m^* es inyectivo.

En efecto supongamos que $[x_m] \in H_n(X)$ es tal que

$$f_m^*([x_m]) = [f_m(x_m)] = 0.$$

Debemos demostrar que $x_m \in \partial_{m+1}^X$.

En efecto, se cumple $y_m = f_m(x_m) \in \text{Im} \partial_{m+1}^Y$. Entonces existe $y_{m+1} \in Y_{m+1}$ tal que $\partial_{m+1}^Y(y_{m+1}) = y_m$. Para esto usaremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} S^m & \xrightarrow{\alpha} & X \\ j \downarrow & & \downarrow f \\ D^{m+1} & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

Construimos los morfismos α, β , de manera que en el grado $m + 1$, $\alpha_{m+1} = 0, \beta_{m+1} = 0$ y, en el grado m , $\alpha_m(1) = x_m, \beta = \partial_{m+1}^Y \circ \beta_{m+1}$ se tiene que el diagrama es conmutativo y por hipótesis existe el morfismo $l : D^{m+1} \rightarrow X$ tal que $f \circ l = h$.

En el grado $m + 1$ se tiene el homomorfismo $l_{m+1} : R \rightarrow X_{m+1}$.

Se cumple $f_{m+1} \circ l_{m+1} = \beta_{m+1}$.

Luego $f_{m+1}(l_{m+1}(1)) = \beta_{m+1}(1) = y_{m+1}$.

Haciendo $x_{m+1} = l_{m+1}(1)$ se cumple

$$\partial_{m+1}^X(x_{m+1}) = \partial_{m+1}^X(l_{m+1}(1)) = l_m(1) = x_m.$$

Es decir $x_m \in \partial_{m+1}^X$.

Demostración de CM3a)

Sea $f : X \rightarrow Y$ debemos demostrar que se puede factorizar en la forma

$f = p' \circ i'$ donde $p' \in Fib \cap W$, $i' \in Cof$.

En efecto, sea la familia $\mathcal{F} = \{j_n : S^{n-1} \rightarrow D^n\}_{n \geq 0}$.

Por el argumento del objeto pequeño existen homomorfismos

$$X \xrightarrow{i_\infty} G^\infty(\mathcal{F}, f) \xrightarrow{f_\infty} Y.$$

Usando las proposiciones 4) y 5) se demuestra de inmediato que f_∞ es una fibración acíclica. Resta demostrar que i_∞ es una cofibración.

En efecto en cada grado n , $X_n \rightarrow G_n^\infty(\mathcal{F}, f)$ es la inclusión (por lo tanto un monomorfismo) pues en este caso $G_n^\infty(\mathcal{F}, f) = \bigoplus_{k \geq 0} G_n^k(\mathcal{F}, f)$

Por otro lado sabemos que por construcción

$$\frac{G_n^\infty(\mathcal{F}, f)}{X_n} \cong \bigoplus R$$

el cual es proyectivo.

Pero $X_n \cong Imi_\infty$. Por lo tanto

$$Conuci_\infty = \frac{G^\infty(\mathcal{F}, f)}{Imi_\infty} \simeq \bigoplus R$$

es proyectivo.

Demostración de CM3b)

Sea $f : X \rightarrow Y$ debemos demostrar que se puede factorizar en la forma

$f = p \circ i$ donde $p \in Fib$, $i' \in Cof \cap W$

La demostración es muy parecida a la anterior.

En efecto sea la familia $\mathcal{F}' = \{0 \rightarrow D^n\}_{n \geq 0}$.

Por el argumento del objeto pequeño existen homomorfismos

$$X \xrightarrow{i_\infty} G^\infty(\mathcal{F}', f) \xrightarrow{f_\infty} Y$$

Usando las proposiciones 4) y 5) se demuestra de inmediato que f_∞ es una fibración. Resta demostrar que i_∞ es una cofibración acíclica.

Repitiendo el argumento en la demostración de CM3a) se tiene que en cada grado n , $X_n \rightarrow G_n^\infty(\mathcal{F}', f)$ es la inclusión (por lo tanto un monomorfismo). También se cumple

$$\frac{G_n^\infty(\mathcal{F}', f)}{Imi_\infty} \simeq \bigoplus R.$$

Entonces se tiene la sucesión exacta corta que parte

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{1_\infty} G \xrightarrow{\pi} \bigoplus R \longrightarrow 0$$

donde $G = G^\infty(\mathcal{F}', f)$

La sucesión exacta de homología correspondiente es

$$\dots H_{n+1}(\bigoplus R) \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(X) \xrightarrow{(i_\infty^*)_n} H_n(G) \xrightarrow{\pi_n^*} H_n(\bigoplus R) \dots \quad .$$

Pero $H_{n+1}(\bigoplus R) = H_n(\bigoplus R) = 0$. Entonces

$$(i_\infty^*)_n : H_n(X) \rightarrow H_n(G^\infty(\mathcal{F}', f))$$

es un isomorfismo y, por lo tanto, i_∞ es una equivalencia débil.

Referencias

- [1] Dwyer, W.G. and Spalinski: “*Homotopy theories and model categories*”, Handbook of algebraic topology, 1(1995)29-36 .
- [2] Mac Lane, S.: “*Categories for the Working Mathematicians*”, Graduate Texts in Mathematics, Springer, Berlín, 5(1971).
- [3] Quillen, D.G.: “*Homotopical Algebra*”, Lectures Notes in Mathematics, Springer-Verlag- Berlín-Heidelberg-New York, 43(1967)5,5.1-5.5.

Abstract

Ch_R category of R-modules chain complexes is a closed models category. We develop as detailed as possible a proof by W.G., Dwyer and J. Spalinski.

Ricardo M. Bances y Norberto J. Chau

Keywords: Closed Models Category, R-modules chain Complexes.

Ricardo M. Bances
rbances@pucp.edu.pe

Norberto J. Chau
jchau@pucp.edu.pe

Sección Matemáticas
Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú