COMPLECIÓN NO ARQUIMEDEANA

Henry Zorrilla Masías[1]

Setiembre, 2011

Resumen

En la teoría de espacios normados no arquimedeanos sobre cuerpos valuados, la propiedad de ser esféricamente completo es de vital importancia en varios contextos y juega un rol importante en algunos temas clásicos del Análisis Funcional. En el presente trabajo estudiamos las compleciones esféricas en el contexto ultramétrico. Primero introducimos los complejos p-ádicos, el análogo de los números complejos, el cual desafortunadamente no es esféricamente completo. Después, y debido a lo anterior, construimos su compleción esférica, cuerpo que resulta ser también algebraicamente cerrado.

MSC(2010): 26E30, 12J25.

Palabras clave: *Cuerpo valuado no arquimedeano, espacio vectorial normado, esféricamente completo, algebraicamente cerrado, compleción esférica, extensión inmediata.*

1. *Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias, PUCP.*

1. Introducción

Como el cuerpo de números reales $\mathbb{R}$, el cuerpo de $\mathbb{Q}_p$ puede construirse a partir de los números racionales $\mathbb{Q}$ como su compleción con respecto a una cierta norma. Para ello fijemos un primo p, por el teorema fundamental de la aritmética, para cada $a \in \mathbb{Z}$ existe un único n natural tal que $a = p^n r$, con $(r, p) = 1$. En base a esto definimos la **valuación p-ádica** de un número racional x como la asignación $v_p : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ dada por

$$v_p(x) = \begin{cases} \max\{n \in \mathbb{Z} : p^n | x\} & \text{si } x \in \mathbb{Z}^*, \\ v_p(a) - v_p(b) & \text{si } x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}, \\ \infty & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Valiéndonos de tal valuación, definimos de manera natural una norma vía $\|x\|_p = p^{-v_p(x)}$ (por convención aceptamos $\|0\|_p = p^{-\infty} = 0$). Lógicamente, esto representa una norma multiplicativa en el sentido estricto. Así, la **métrica p-ádica** en $\mathbb{Q}$ estará dada por $d_p(x, y) = \|x - y\|_p$. Efectivamente, la norma p-ádica $\|.\|_p$ es no arquimedeana y por ende la métrica que induce es ultramétrica.

Mediante un argumento de categoría de Baire usando la numerabilidad de $\mathbb{Q}$ y el hecho de que $(\mathbb{Q}, \|.\|_p)$ no tiene ningún punto aislado podemos ver que $\mathbb{Q}$ con la norma p-ádica no es completo. Será su compleción la que dará vida al cuerpo de los **números p-ádicos**. La valuación extendida en $\mathbb{Q}_p$ también se denota por $\|.\|_p$.

Si consideramos la ecuación $x^2 - p$, vemos que no podemos obtener una raíz en $\mathbb{Q}_p$. Ya que si $\alpha \in \mathbb{Q}_p$ fuera raíz, tendríamos $\|\alpha\|_p = p^{-\frac{1}{2}}$, pero sabemos que la norma de un número p-ádico es una potencia entera de p, un absurdo. Por lo que $\mathbb{Q}_p$ no es algebraicamente cerrado no obstante esto lo podemos solucionar en su clausura algebraica $\mathbb{Q}_p^a$.

Desafortunadamente, en [2] se puede ver que $\mathbb{Q}_p^a$ no es completo, puesto que no es un espacio de Baire y todo espacio métrico completo es de Baire. Debido a ello, trabajaremos en la compleción topológica de la clausura algebraica de $\mathbb{Q}_p$ con su valuación $\|.\|_p$, conjunto al que llamaremos cuerpo de los **complejos p-ádicos** y denotaremos por $\mathbb{C}_p$. Gracias al Lema de Krasner $\mathbb{C}_p$ es algebraicamente cerrado puesto que *la compleción de la clausura algebraica de un cuerpo no arquimedeano K es algebraicamente cerrada.*

Así $\mathbb{C}_p$, en algún sentido, es la extensión más pequeña completa y algebraicamente cerrada de $\mathbb{Q}_p$ y su valuación es densa, puesto que $\|\mathbb{C}_p^*\| = \{p^n : n \in \mathbb{Q}\}$ es denso en $(0, \infty)$.

Lema 1.1. *Existen sucesiones decrecientes de bolas cerradas en $\mathbb{C}_p$ cuya intersección es vacía.*

Demostración. Fijemos una colección $\{a_n\}_n$ densa en $\mathbb{C}_p$. Por ejemplo, podemos enumerar la clausura algebraica de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{C}_p$. Además consideremos una sucesión decreciente $\{r_n\}_n$ de números reales tal que $1 > r_1 > r_2 > \ldots > \frac{1}{2}$. Consideremos la relación de equivalencia en $\mathbb{C}_p$ definida por

$$a \sim_1 b \qquad \text{si } \|b - a\| \leq r_1,$$

cuyas clases son bolas cerradas de diámetro r_1. Es obvio que podemos ubicar una clase de equivalencia B_1 tal que $a_1 \notin B_1$. Repitiendo este procedimiento con la relación de equivalencia en B_1 definida por

$$a \sim_2 b \qquad \text{si } \|b - a\| \leq r_2,$$

encontramos una bola $B_2 \subset B_1$ de diámetro r_2 tal que $a_2 \notin B_2$. Esto se debe al hecho de que B_1 no puede ser cubierto por una única bola de radio $r_2 < r_1$. Continuando con esta construcción inductivamente notamos que B_i se descompone en más de una clase respecto a $\sim_{i+1}$, y por tanto en alguna de ellas no aparece a_{i+1}. Así obtenemos una sucesión decreciente de bolas cerradas $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ en $\mathbb{C}_p$ para las cuales se cumple $diam(B_n) = r_n$ y $a_n \notin B_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Veremos a continuación que la intersección $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ es vacía. En efecto, si por el absurdo suponemos $b \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$, tenemos $B_n = B_{r_n}[b]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pues todo punto es un centro. Nótese que ello implica $B_{\frac{1}{2}}(b) \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Sin embargo, ninguno de los a_n está contenido en el abierto no vacío $B_{\frac{1}{2}}(b)$, lo cual contradice la densidad de la sucesión $\{a_n\}_n$. $\square$

Por lo que el cuerpo $\mathbb{C}_p$, como indica el Lema anterior, no es esféricamente completo, puesto que un espacio ultramétrico V es **esféricamente completo** si cada sucesión decreciente de bolas $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ en V tiene intersección no vacía.

Dado $K^* = K - \{0\}$ el grupo multiplicativo de K, sea $\|K^*\| = \{\|\lambda\| : \lambda \in K^*\}$ el subgrupo multiplicativo de $(0, \infty)$ (los números reales positivos), al mismo que llamaremos **grupo de valuación** de K. Debido a la desigualdad triangular fuerte, el disco cerrado unitario $B_K[0] = \{x \in K : \|x\| \leq 1\}$ de K además de ser multiplicativamente cerrado es aditivamente cerrado. Así, $B_K[0]$ es un anillo conmutativo con identidad y el disco unitario abierto $B_K(0) = \{x \in K : \|x\| < 1\}$ resulta ser un ideal maximal en $B_K[0]$. Por lo que $B_K[0]/B_K(0)$ es un cuerpo, llamado el **cuerpo de clase residual** de K, habitualmente denotado por k.

Recordemos que un grupo abeliano G es **divisible** cuando para cada $g \in G$ y m entero no nulo existe h tal que $h^m = g$. A partir de ello podemos constatar los siguientes resultados que dejamos en manos del lector.

Proposición 1.2. *Sea K un cuerpo valuado no arquimedeano algebraicamente cerrado. Entonces su cuerpo de clase residual es algebraicamente cerrado y su grupo de valuación es divisible.*

Proposición 1.3. *Sea L una extension algebraica de K. Entonces el cuerpo de clase residual l de L es una extension algebraica de k. El cuerpo de clase residual de una clausura algebraica de K es una clausura algebraica de k.*

2. Compleción no Arquimedeana

A continuación, dado un cuerpo K no arquimedeano encontremos su compleción esférica. Para ello primeramente incrustemos un espacio vectorial normado dentro de un espacio vectorial normado esféricamente completo.

Dados E, F espacios vectoriales normados con $E \neq \{0\}$, para toda transformación lineal $T : E \to F$ definimos su norma

$$\|T\| = \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in E, x \neq 0\right\}.$$

No descartaremos la posibilidad $\|T\| = \infty$ (pero este caso no es de interés para nosotros, así que no lo abordaremos). Pongamos

$$L(E; F) = \{T : E \to F : T \text{ es transformación lineal y } \|T\| < \infty\}$$

para referirnos al conjunto de las transformaciones lineales continuas.

En particular $E^* = L(E, K)$ será el K-dual de E y $L(E) = L(E, E)$ el espacio de los endomorfismos continuos.

Lema 2.1. *Sea $\varphi : E \to K$ una transformación lineal y $\alpha \geq 0$. Entonces $\|\varphi\|_{E^*} \leq \alpha$ si y sólo si $\|\varphi(x)\|_K \leq \alpha\|x\|_E$ para todo $x \in E$.*

Demostración. Empecemos con $\|\varphi\|_{E^*} \leq \alpha$. Como para $x \neq 0$ se cumple

$$\frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|} \leq \sup\left\{\frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|} : x \in E, x \neq 0\right\} = \|\varphi\|_{E^*} \leq \alpha,$$

se tiene $\|\varphi(x)\|_K \leq \|\varphi\|_{E^*}\|x\|_E \leq \alpha\|x\|_E$.

Recíprocamente, para $x \neq 0$ se tiene $\dfrac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|} \leq \alpha$, y como $\|\varphi\|_{E^*}$ es por definición el supremo, obtenemos $\|\varphi\|_{E^*} \leq \alpha$. $\square$

El siguiente Lema será de utilidad para probar que $L(E, F)$ es esféricamente completo, cuando F es esféricamente completo. Los detalles pueden ser consultados en [4].

Lema 2.2. *Sean E y F espacios vectoriales normados, con F esféricamente completo. Tomemos un subespacio lineal $D \subset E$ y $S \in L(D, F)$. Sea $\mathcal{T} \subset L(E, F)$ no vacío. Supongamos que para los $U \in \mathcal{T}$ existen valores $r_U > 0$ que satisfacen*

a) $\|U - V\| \leq \max\{r_U, r_V\}$ *para U, $V \in \mathcal{T}$;*

b) $\|Sx - Ux\| \leq r_U\|x\|$ *para $U \in \mathcal{T}$, $x \in D$.*

Entonces existe una extensión $\overline{S} \in L(E, F)$ de S tal que para cada $U \in \mathcal{T}$ se tiene

$$\left\|\overline{S} - U\right\| \leq r_U.$$

Corolario 2.3. *Si E y F son espacios vectoriales normados con F esféricamente completo, entonces $L(E, F)$ es esféricamente completo.*

Demostración. Sean $B_{r_1}(S_1) \supset B_{r_2}(S_2) \supset \ldots$ bolas en $L(E, F)$. Tomemos $D = \{0\}$, $\mathcal{T} = \{S_n : n \in \mathbb{N}\}$, $r_{S_n} = r_n$ y apliquemos la proposición anterior para obtener $\overline{S}$ sujeto a $\left\|\overline{S} - S_n\right\| \leq r_n$; es decir, $\overline{S} \in \bigcap B_{r_n}(S_n)$. $\square$

En particular, si K es esféricamente completo, entonces E^* es esféricamente completo.

Para cada espacio vectorial normado E de un cuerpo K definimos:

$$\begin{aligned}\pi_E : E &\to E^{**}\\ x &\to \pi_E(x) : E^* \to K\\ &\qquad s \to \pi_E(x)S = Sx.\end{aligned}$$

En [1] podemos encontrar el siguiente resultado bien conocido para obtener que π_E es una isometría.

Teorema 2.4 (Ingleton)**.** *Si E es un espacio normado sobre un cuerpo K esféricamente completo y D es un subespacio de E, entonces para cada funcional lineal continua $f \in D^*$ existe una extensión lineal continua $g \in E^*$ de f para la cual se cumple $\|g\| = \|f\|$.*

Proposición 2.5. *La aplicación canónica π_E es continua, lineal y satisface $\|\pi_E\| \leq 1$.*

Demostración. Primero veamos la linealidad. Si x, $y \in E$ y α, $\lambda \in K$ con $S \in E^*$, entonces $\pi_E(\alpha x + \lambda y)S = S(\alpha x + \lambda y) = \alpha S(x) + \lambda S(y) = \alpha\pi_E(x)S + \lambda\pi_E(y)S$, por lo que π_E es lineal. Asimismo, para $x \in E$ y $S \in E^*$ se tiene $\|\pi_E(x)S\|_K = \|S(x)\|_K \leq \|S\|_{E^*}\|x\|_E$. Debido al Lema 2.1 esto implica $\|\pi_E(x)\|_{E^*} \leq \|x\|_E$ y con ello nuevamente por el Lema 2.1 se obtiene $\|\pi_E\| \leq 1$. En consecuencia, π_E es continua. $\square$

Mediante el siguiente resultado observamos que cada espacio vectorial normado E sobre un cuerpo K esféricamente completo puede ser incrustado isométricamente en un espacio de Banach esféricamente completo.

Corolario 2.6. *Cuando E es un subespacio de Banach no arquimedeano y K es esféricamente completo, la aplicación canónica π_E es una isometría.*

Demostración. Se tiene $\|\pi_E(\widehat{x})\| \leq \|\widehat{x}\|$, lo cual implica $\|\pi_E(0)\| = 0$. Tomemos $\widehat{x} \neq 0$. Para el subespacio $\langle\widehat{x}\rangle \subset E$, generado por $\widehat{x}$, definamos

$\varphi(\lambda\widehat{x}) = \lambda$, transformación que tiene norma

$$\sup_{\lambda\neq 0} \frac{\|\varphi(\lambda\widehat{x})\|}{\|\lambda\widehat{x}\|} = \frac{1}{\|\widehat{x}\|}.$$

Como $\|\varphi\| = \dfrac{1}{\|\widehat{x}\|}$, el teorema de Ingleton garantiza la existencia de $\overline{\varphi}_x \in E^*$ tal que $\|\overline{\varphi}_x\| = \dfrac{1}{\|\widehat{x}\|}$ y $\overline{\varphi}_x(\widehat{x}) = 1_K$. Gracias a ello obtenemos $\pi_E(\widehat{x})\overline{\varphi}_x = \varphi(\widehat{x}) = 1_K$, lo cual implica $1 = \|\pi(\widehat{x})\overline{\varphi}_x\| \leq \|\pi(\widehat{x})\|\|\overline{\varphi}_x\| = \|\pi(\widehat{x})\|\dfrac{1}{\|\widehat{x}\|}$; es decir, obtenemos $\|\widehat{x}\| \leq \|\pi(\widehat{x})\|$, por lo que π_E es una isometría. $\square$

En el caso que K no sea esféricamente completo, más adelante lo incrustaremos dentro un cuerpo esféricamente completo. Así habremos logrado incrustar E dentro de un espacio esféricamente completo.

Dado E, un espacio vectorial normado sobre K, ponemos $\langle y\rangle = \{\lambda y : \lambda \in K\}$, el menor subespacio que contiene a y, y de esta forma se satisface $dist(x, \langle y\rangle) = \text{ínf}\{\|x - \lambda y\| : \lambda \in K\}$. Decimos que x es **ortogonal** a y, si cumple $dist(x, \langle y\rangle) = \|x\|$ y, de ser así, escribimos $x\perp y$. Sea E un espacio vectorial y D un subespacio lineal de E. Llamamos a E **extensión inmediata** de D, si 0 es el único elemento de E que es ortogonal a D. En este caso, equivalentemente en [3] se puede constatar que para cada elemento no nulo $a \in E$ existe un $b \in D$ con $\|a-b\| < \|a\|$, propiedad que puede tomarse como definición alternativa.

Lema 2.7. *Sean $E_0 \subset E_1 \subset E_2$ espacios vectoriales ultramétricos. Supongamos que E_1 sea extensión inmediata de E_0. Entonces E_2 es extensión inmediata de E_0 si y sólo si E_2 es extensión inmediata de E_1.*

Demostración. Suponemos primero que E_2 es extensión inmediata de E_0. Para $x \in E_2$ existe $y \in E_0$ tal que $\|x - y\| < \|x\|$. Como $E_0 \subset E_1$ se tiene $y \in E_1$, así E_2 resulta extensión inmediata de E_1.

Recíprocamente, si $a \in E_2$ existe un $b \in E_1$ con $\|a - b\| < \|a\|$ y esto a su vez implica $\|a\| = \|b\|$. Por otro lado, existe un $c \in E_0$ con $\|b - c\| < \|b\|$. Con ello se tiene $\|a - c\| \leq$ máx$\{\|a - b\|, \|b - c\|\} <$ máx$\{\|a\|, \|b\|\} = \|a\|$ pues $\|a\| = \|b\|$, y con ello E_2 resulta extensión inmediata de E_0. $\square$

Corolario 2.8. *Sea $\{E_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una sucesión creciente de extensiones inmediatas de D. Entonces $\bigcup E_\alpha$ es una extensión inmediata de D.*

Demostración. Si $x \in \bigcup E_\alpha$, entonces $x \in E_{\alpha_0}$ para algún α_0. Como E_{α_0} es extensión inmediata existe $y \in D$ tal que $\|x - y\| < \|x\|$. Con ello $\bigcup E_\alpha$ resulta extensión inmediata de D. $\square$

El siguiente resultado será clave para garantizar la existencia de la compleción esférica.

Proposición 2.9. *Ningún espacio vectorial esféricamente completo acepta extensión inmediata.*

Demostración. Sea V esféricamente completo y $a \notin V$. Basta mostrar que existe $x_0 \in V$ tal que $\|a - x_0\| = d = dist(a, V)$ pues de este modo a resulta ser ortogonal a V. En efecto, sea d_n una sucesión decreciente a d. Entonces existe $x_n \in V$ tal que $\|x_n - a\| \leq d_n$; es decir, $x_n \in B_{d_n}[a]$. Como todo punto es un centro se tiene $B_{d_n}[x_n] = B_{d_n}[a]$ y con ello $B_{d_1}[x_1] \supset B_{d_2}[x_2] \supset \ldots$ será una sucesión encajada de bolas. Como esto implica $B_{d_1}[x_1] \cap V \supset B_{d_2}[x_2] \cap V \supset \ldots$ y V es esféricamente completo, podemos tomar $x_0 \in \bigcap B_{d_n}[x_n] \cap V$. Nuevamente, como todo punto es un centro, se obtiene $B_{d_n}[x_0] = B_{d_n}[x_n] = B_{d_n}[a]$ y con ello $\|x_0 - a\| \leq d_n$ para todo n; es decir, $\|x_0 - a\| \leq d$. Por otro lado, como $x_0 \in V$ y $dist(a, V) = d$ se ha de tener $d \leq \|x_0 - a\| \leq d$ y con ello la igualdad buscada. $\square$

Ahora nos dedicaremos por un instante a ver las implicaciones de tener un cuerpo esféricamente completo.

Si L es un cuerpo valuado que contiene a K, donde la valuación de K y L coinciden en K, entonces obviamente el grupo de valuación de K está contenido en el grupo de valuación de L y existe un homomorfismo natural inyectivo entre los cuerpo de clase residual de K y L. Sin pérdida de generalidad aceptamos entonces que el cuerpo de clase residual k es un subcuerpo de l.

Proposición 2.10. *Sea L un cuerpo valuado que es una extensión de K, entonces (como espacio normado) L es una extensión inmediata de K si y sólo si K y L tienen el mismo grupo de valuación y el mismo cuerpo de clase residual.*

Demostración. Primero supondremos que los cuerpos tienen el mismo grupo de valuación y el mismo cuerpo de clase residual. Sea $x \in L$ no nulo. Elijamos $z \in K$ con $\|x\| = \|z\|$. Como $\left\|\frac{x}{z}\right\| = 1$, existe $y \in K$ sujeto a $\frac{x}{z} \sim y$ en l. Con ello se logra $\left\|\frac{x}{z} - y\right\| < 1$ y por tanto $\|x - yz\| < \|z\| = \|x\|$. Como $yz \in K$, tenemos la propiedad buscada.

Recíprocamente, sea $x \in L$ no nulo. Por ser L extensión inmediata, existe $y \in K$ tal que $\|x - y\| < \|x\|$, así obtenemos $\|x\| = \|y\|$, y conseguimos $\|L^*\| = \|K^*\|$. Por otro lado como siempre se tiene $k \subset l$, probaremos sólo la otra inclusión. Para ello sea $\overline{x} \in l$ no trivial. Como $\|x\| = 1$, existe $y \in K$ con $\|x - y\| < 1 = \|x\|$; y esto lógicamente implica $\overline{x} = \overline{y} \in k$. □

Una **compleción esférica** de un espacio vectorial normado E es un par $\langle F, T\rangle$ que consiste:

i) F es un espacio esféricamente completo;

ii) $T : E \to F$ es una isometría lineal;

iii) F no tiene un subespacio lineal propio esféricamente completo.

En lo que sigue mostremos que cada espacio normado admite una compleción esférica y que la compleción esférica es, en esencia, única.

Lema 2.11. *Sean F una extensión inmediata de un espacio normado E y H un espacio de Banach esféricamente completo dentro del cual está sumergido E. Entonces id_E puede extenderse a una isometría lineal de F en H.*

Demostración. El teorema de Ingleton garantiza que id_E se extiende a $T \in L(F, H)$ con $\|T\| \leq 1$. Bastará ver que T es ya una isometría en F. Por definición de extensión inmediata, para $a \neq 0$ en F existe $x \in E$ tal que $\|x - a\| < \|a\|$, lo cual implica $\|x\| = \|a\|$. Ello a su vez conduce a $\|Tx - Ta\| \leq \|T\|\|x - a\| < \|a\| = \|x\| = \|Tx\|$. Pero gana el más fuerte, así que si hay empate debemos tener $\|Ta\| = \|Tx\|$. De lo anterior se pasa finalmente a $\|Ta\| = \|Tx\| = \|x\| = \|a\|$. $\square$

Fleischer garantiza que cada espacio vectorial normado sobre K admite una compleción esférica. Dos compleciones esféricas de un espacio vectorial normado son isomorfas.

Gracias a ello, podemos hablar de compleción esférica de un espacio normado. Puesto que dos compleciones esféricas son isomorfas, podemos denotar tal extensión de E por $\widetilde{E}$.

Corolario 2.12. *La compleción esférica de E es una extensión inmediata de E y recíprocamente, cada extensión inmediata esféricamente completa de E es una compleción esférica de E.*

Como consecuencia, cada extensión esféricamente completa de un espacio vectorial normado E contiene a la compleción de dicho espacio y cada extensión inmediata está contenida en la compleción esférica de E.

Corolario 2.13. *Si un espacio normado no admite extensión inmediata propia, entonces es esféricamente completo.*

Ahora veamos qué ocurre cuando queremos completar un cuerpo no arquimedeano. Para ello decimos que un cuerpo valuado K es **maximal** si ningún cuerpo es extensión inmediata de K.

Un teorema debido a Kaplansky garantiza que un cuerpo K es maximal si y sólo si es esféricamente completo. Nos ahorraremos los pormenores de la demostración, la cual se puede consultar en [4]. Así el nexo entre el concepto de maximalidad y compleción esférica está dada.

Como consecuencia se tiene que un cuerpo valuado L que contiene a K es su compleción si y sólo si L es maximal y extensión inmediata de K. En particular, dos cuerpos maximales que son extensiones inmediatas de K son isomorfos como espacios vectoriales normados.

Se tiene que si K es algebraicamente cerrado, entonces lo mismo es cierto de su cuerpo de clase residual, mientras su grupo de valuación es divisible. Para K esféricamente completo podemos mostrar lo recíproco mediante el siguiente teorema.

Teorema 2.14. *Sea K esféricamente completo con cuerpo de clase residual algebraicamente cerrado y grupo de valuación divisible. Entonces K es algebraicamente cerrado.*

Demostración. Por hipótesis podemos asumir que k es algebraicamente cerrado y Γ es divisible. Sea L la clausura algebraica de K. Por la Proposición 1.3 el cuerpo de clase residual de L es también k. Debido a la divisibilidad de Γ, el grupo de valuación de L es Γ. Por lo expuesto concluimos que L es extensión inmediata de K. Como K es esféricamente completo, se tiene $L = K$, ya que en caso contrario L sería una extensión inmediata propia, lo cual es imposible debido a la maximalidad de K. $\square$

Ahora es fácil mostrar que la compleción esférica de un cuerpo algebraicamente cerrado es algebraicamente cerrado; es decir, dado K algebraicamente cerrado y L un cuerpo valuado esféricamente completo que es una extensión inmediata de K, entonces L es algebraicamente cerrado.

En el caso que el cuerpo K no sea algebraicamente cerrado, entonces en algún cuerpo maximal que sea extensión inmediata de K

podemos tomar un cuerpo maximal M conteniendo a K tal que K sea algebraicamente cerrado en M. Así M contiene un subcuerpo que es extensión inmediata de K. Por lo que, dado M algebraicamente cerrado y esféricamente completo conteniendo a K, si L es un maximal entre los subcuerpos de M que son extensiones inmediatas de K, entonces L es esféricamente completo.

Referencias

[1] Perez-Garcia, C., Schikhof, W. H.: *Locally Convex Spaces Over Non-Archimedean Valued Fields*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 119, (2010).

[2] Robert, Alain M.: *A Course in p-adic Analysis*, Springer-Verlag, New York, (2000).

[3] Van Rooij, A. C. M.: *Non-Archimedean Functional Analysis*, Marcel Dekker, New York, (1978).

[4] Zorrilla, Henry: *Compleción esférica de los números complejos p-ádicos*, Tesis de Maestría. Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, (2011).

Abstract

In the theory of normed vector spaces over non-archimedean fields, the property of being spherically complete is crucial in several contexts and plays an important role in some aspects of Functional Analysis. In this work we introduce the spherical completions in the context of ultrametric spaces. With that in mind, we first introduce the p-adics complex numbers, the analog of $\mathbb{C}$, field that, unfortunately is not spherically complete. For that reason we construct its spherical completion, field that happens to be also algebraically closed.

Keywords: Non-archimedean valued field, normed vector space, spherically complete, algebraically closed, spherical completion, immediate extension.

Henry Zorrilla Masías
Sección Matemáticas
Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú
hzorrilla@pucp.edu.pe