COHOMOLOGÍA DE HOCHSCHILD: DEFORMACIONES Y EXTENSIONES

Christian Valqui[1]

Octubre, 2011

Resumen

Hacemos una comparación de la teoría de deformaciones con la de un tipo particular de productos tensoriales torcidos, a través de la cohomología de Hochschild.

MSC(2010): 16E40,16S80,16S35

Palabras Clave: *Cohomología de Hochschild, Planos torcidos, Deformaciones.*

1. *Sección Matemáticas, Departamento de Ciencias, PUCP.*

Introducción

El presente artículo corresponde parcialmente al contenido de dos charlas con el mismo título, una con ocasión de los 40 años del Posgrado en Matemática en la Pontificia Universidad Católica del Perú, y la otra en el Congreso del colegio de Matemáticos del Perú en la Universidad Pedro Ruiz Gallo en Lambayeque. El objetivo del trabajo es presentar los paralelos que existen entre la teoría de deformaciones (algebraicas), intensamente estudiada desde 1964 en los trabajos de Gerstenhaber [1] hasta la actualidad por múltiples autores, y la nueva teoría de extensiones, introducida en [2, Rem.4.9]. Los resultados de la teoría de deformaciones son conocidos, y los de la teoría de extensiones son deducibles fácilmente de [2] y también aparecen en [3]; salvo la respuesta afirmativa a la pregunta 1 en el caso $n = 3$. Este último resultado muestra que en algunos aspectos la teoría de extensiones funciona mejor que la teoría de defomaciones, pues la pregunta correspondiente en el caso de deformaciones, de si un cociclo es el infinitesimal de una deformación, en general es un problema abierto.

1. Cohomología de Hochschild

A lo largo de este artículo K va a ser un anillo conmutativo con 1, (típicamente $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$, para los lectores que no estén acostumbrados a anillos abstractos). Los objetos van a ser K-módulos (en particular espacios vectoriales reales o complejos si K es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y el producto tensorial va a ser siempre sobre K. Otros objetos importantes son las K-álgebras. Una K-álgebra A es un K-módulo provisto de una aplicación $\mu_A : A \otimes_K A \to A$, llamada multiplicación, que es asociativa. Esto significa que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mu \otimes A"] \arrow[d, "A \otimes \mu"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\mu"'] & A \end{tikzcd}$$

es conmutativo, donde μ significa μ_A y escribimos A para la aplicación Id_A, es decir, $\mu \otimes A$ significa $\mu_A \otimes Id_A$. El diagrama nos dice que

$$\mu(\mu \otimes A)(a \otimes b \otimes c) = \mu(A \otimes \mu)(a \otimes b \otimes c),$$

es decir, $(ab)c = a(bc)$, que es la fórmula usual de asociatividad.

Un cocomplejo (positivo de K-módulos) es una familia de K-módulos $C = \{C^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ y una familia de aplicaciones K-lineales $\{\partial^n : C^n \to C^{n+1}\}$, de modo que $\partial^n \circ \partial^{n-1} = 0$. Escribimos

$$C: \quad 0 \to C^0 \overset{\partial^0}{\to} C^1 \overset{\partial^1}{\to} C^2 \overset{\partial^2}{\to} C^3 \overset{\partial^3}{\to} \dots$$

y la condición $\partial^2 = 0$ implica que $Im(\partial^{n-1}) \subset Ker(\partial^n)$. Formando el cociente de estos dos K-módulos obtenemos la cohomología del cocomplejo:

$$HH^n(C) := \frac{Ker\partial^n}{Im\partial^{n-1}}.$$

El cocomplejo de Hochschild de A (con coeficientes en A) está definido de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} C^0(A) & = & \{f : K \to A, \quad K-\text{lineal}\} \cong A \\ C^1(A) & = & \{f : A \to A, \quad K-\text{lineal}\} \\ C^2(A) & = & \{f : A \otimes A \to A, \quad K-\text{lineal}\} \\ C^3(A) & = & \{f : A \otimes A \otimes A \to A, \quad K-\text{lineal}\} \\ \vdots & & \\ C^n(A) & = & \{f : A^{\otimes n} \to A, \quad K-\text{lineal}\} \\ \vdots & & \end{array}$$

Notemos que $C^0(A) \cong A$ por medio de $f \mapsto f(1)$, con aplicación inversa $A \to C^0(A)$ dada por $a \mapsto (\lambda \mapsto \lambda a)$. Las aplicaciones diferenciales $\partial^n : C^n(A) \to C^{n+1}(A)$ están dadas por

$$\begin{array}{rcl} \partial^n(f) : A^{\otimes n+1} & \to & A \\ \partial^n(f)(a_0, \ldots, a_n) & = & a_0 f(a_1, \ldots, a_n) - f(a_0 a_1, a_2, \ldots, a_n) \\ & & +f(a_0, a_1 a_2, \ldots, a_n) - \ldots \\ & & \pm f(a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1} a_n) \\ & & \mp f(a_0, \ldots, a_{n-1}) a_n, \end{array}$$

para $n \geq 1$ y $\partial^0(f)(a) = af(1) - f(1)a$. Entonces, tenemos

$$\begin{array}{rcl} \partial^1(f) : A^{\otimes 2} & \to & A \\ \partial^1(f)(a, b) & = & af(b) - f(ab) + f(a)b \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rcl} \partial^2(f) : A^{\otimes 3} & \to & A \\ \partial^2(f)(a, b, c) & = & af(b, c) - f(ab, c) + f(a, bc) - f(a, b)c. \end{array}$$

Veamos el significado de la cohomología de Hochschild en grados bajos. Como $\partial^{-1} = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} HH^0(A) &\cong \{f \in C^0(A) \mid \partial^0(f) = 0\} \\ &= \{f : K \to A \mid xf(1) - f(1)x = 0,\ \forall x \in A\} \\ &\cong \{a \in A \mid xa - ax = 0,\ \forall x \in A\} \\ &= \text{Centro de } A \end{aligned}$$

2. Derivaciones

Para ver el significado de la cohomología de Hochschild en grado uno, necesitamos el concepto de una derivación.

Definición 2.1 *Sea A una K-álgebra. Una aplicación K-lineal $D : A \to A$ se llama derivación, si se cumple*

$$D(ab) = D(a)b + aD(b),\ \forall\ a, b \in A. \tag{2.1}$$

Las derivaciones son un concepto importante en la geometría, lo cual se puede ver en los siguientes ejemplos:

Ejemplos 2.2 (1) *El ejemplo clásico es la derivada de polinomios, $A = K[x]$, y $D(P) = P'$, donde la regla de Leibnitz nos da* (2.1).

(2) *También es bastante conocido el ejemplo de los polinomios de varias variables $A = K[x_1, \ldots, x_n]$ y una derivada parcial $D := \frac{\partial}{\partial x_i}$.*

(3) *Las funciones reales suaves $A = C^\infty(\mathbb{R})$ también tienen la derivación dada por la derivada usual $D(f) = f'$.*

(4) *Con mayor generalidad tenemos al álgebra de funciones suaves sobre una variedad diferenciable $A = C^\infty(M)$ y la derivada a lo largo de un campo diferencial X, denominada $D = D_X$.*

(5) *Dado un álgebra A y un elemento fijo $x \in A$ el conmutador con x es una derivación llamada derivación interna, $D = D_x = [x, \cdot]$, dada por $D(y) = [x, y] = xy - yx$.*

Ahora notemos que el conjunto de derivaciones $Der(A)$ es exactamente $Ker(\partial^1)$, pues $f : A \to A$ es un elemento de $Ker(\partial^1)$, si y solamente si

$$0 = \partial^1(f)(a,b) = af(b) - f(ab) + f(a)b,\ \forall\ a,b \in A,$$

si y solamente si

$$f(ab) = f(a)b + af(b),\ \forall\ a,b \in A.$$

También es claro que la imagen de ∂^0 son todas las derivaciones internas $D.Int(A)$, y por lo tanto tenemos que

$$HH^1(A) = \frac{Ker(\partial^1)}{Im(\partial^0)} = \frac{Der(A)}{D.Int(A)}.$$

Ahora veremos una interpretación de la cohomología de Hochschild en los grados 2 y 3.

3. Estructuras de Álgebra sobre $A[[t]]$

Consideremos el álgebra de series formales de potencias

$$K[[t]] = \{\lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \lambda_3 t^3 + \dots\ ,\ \lambda_i \in K\},$$

que podemos ver como polinomios de grado infinito. Este álgebra comparte varias propiedades del álgebra de polinomios contenida en ella, pero no determina una función, ya que la evaluación en un valor cualquiera supone una serie infinita de sumandos, que no necesariamente converge. Ahora veamos el K-módulo $A_t = A[[t]]$ de las series formales de potencias en A con elementos de la forma

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots .$$

Podemos ver los elementos de $A \otimes K[[t]]$ incluidos de manera natural en $A[[t]]$ por medio de $a \otimes t^n \mapsto at^n$. Entonces $A[[t]]$ es la completación t-ádica del producto tensorial $A \otimes K[[t]]$ y vamos a escribir indistintamente

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots = a_0 \otimes 1 + a_1 \otimes t + a_2 \otimes t^2 + \dots .$$

Además $A[[t]]$ posee una estructura natural de $K[[t]]$-módulo a derecha, dada por $(a \otimes t^i)t^k = a \otimes t^{i+k}$. Nuestro interés principal son las estructuras de álgebra sobre A_t, es decir, aplicaciones K-lineales

$$\mu : A_t \otimes A_t \to A_t,$$

asociativas, que además cumplen $\mu(a \otimes 1, 1 \otimes t^n) = a \otimes t^n$. La estructura canónica (llamada trivial) dada por

$$\mu(a \otimes t^i, b \otimes t^j) = ab \otimes t^{i+j}$$

en los tensores elementales y extendida linealmente a todo $A_t \otimes A_t$, es evidentemente asociativa. Además cumple con las siguientes propiedades:

(A) La inclusión de $K[[t]] \hookrightarrow A_t$ dada por $t^j \mapsto 1 \otimes t^j$ es un morfismo de álgebras, lo cual es equivalente a que $(1 \otimes t^i)(1 \otimes t^j) = 1 \otimes t^{i+j}$.

(B) La proyección canónica $\pi_A : A_t \to A$ dada por

$$\pi_A : (a_0 \otimes 1 + a_1 \otimes t + a_2 \otimes t^2 + \dots) \mapsto a_0$$

es un morfismo de álgebras.

(C) La aplicación μ es $K[[t]]$-bilineal. Esta propiedad significa que

$$\mu((a \otimes t^i)t^k, (b \otimes t^j)t^l) = \mu(a \otimes t^i, b \otimes t^j)t^{k+l}.$$

Notemos que (C) implica (A).

(D) La inclusión canónica $A \hookrightarrow A_t$, dada por $a \mapsto a \otimes 1$, es un morfismo de álgebras.

Definiendo estructuras de álgebra sobre A_t que solamente cumplen algunas de estas propiedades, obtenemos deformaciones y extensiones.

4. Deformaciones

Definición 4.1 *Una deformación de A es una estructura de álgebra asociativa sobre A_t, que cumple las propiedades (A), (B) y (C).*

Notemos que entonces

$$\begin{aligned}\mu(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots, b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \dots) \\ = \sum_{i,j} \mu(a_i t^i, b_j t^j) \\ = \sum_{i,j} \mu(a_i, b_j) t^{i+j}\end{aligned}$$

por (C), y es suficiente conocer la restricción $\mu|_{A\otimes A}$ para caracterizar completamente μ (aquí identificamos A con $A \otimes 1 \subset A[[t]]$). Es decir, μ está caracterizado por una familia de aplicaciones K-bilineales $(\mu_n : A \times A \to A)_{n=0,1,2,\dots}$ que cumplen

$$\mu(a,b) = \mu_0(a,b) + \mu_1(a,b)t + \mu_2(a,b)t^2 + \mu_3(a,b)t^3 + \dots .$$

Con la propiedad (B) se calcula directamente que $\mu_0(a,b) = \mu_A(a,b) = ab$. Entonces hemos llegado a una definición de una deformación, equivalente a la anterior, que se encuentra usualmente en la literatura:

Definición 4.2 *Una deformación de un álgebra A es una familia de aplicaciones K-bilineales $\{\mu_n : A \times A \to A\}_{n=1,2,\dots}$, de modo que para cada $n = 1, 2, 3, \dots$, se cumple*

$$\sum_{i+j=n} \mu_i(a, \mu_j(b,c)) = \sum_{i+j=n} \mu_i(\mu_j(a,b), c), \tag{4.1}$$

con $\mu_0(a,b) = ab$.

Si definimos una aplicación $K[[t]]$-bilineal $\mu : A_t \otimes A_t \to A_t$ por medio de

$$\mu(a,b) = ab + \mu_1(a,b)t + \mu_2(a,b)t^2 + \mu_3(a,b)t^3 + \dots \tag{4.2}$$

entonces la igualdad (4.1) es equivalente a la asociatividad de μ:

$$\begin{aligned}
0 &= \mu(a, \mu(b, c)) - \mu(\mu(a, b), c) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i \left(a, \sum_{j=0}^{\infty} \mu_j(b, c) t^j \right) t^i - \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i \left(\sum_{j=0}^{\infty} \mu_j(a, b) t^j, c \right) t^i \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i \left(a, \sum_{j=0}^{\infty} \mu_j(b, c) \right) t^{j+i} - \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i \left(\sum_{j=0}^{\infty} \mu_j(a, b), c \right) t^{j+i} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\mu_i \left(a, \mu_j(b, c) \right) - \mu_i \left(\mu_j(a, b), c \right) \right) t^{j+i} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} \left(\mu_i \left(a, \mu_j(b, c) \right) - \mu_i \left(\mu_j(a, b), c \right) \right) t^{j+i} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} \left(\mu_i \left(a, \mu_j(b, c) \right) - \mu_i \left(\mu_j(a, b), c \right) \right) t^{n}.
\end{aligned}$$

La igualdad (4.1) para $n = 0$ significa que

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i+j=0} (\mu_i(a, \mu_j(b, c)) - \mu_i(\mu_j(a, b), c)) \\
&= \mu_0(a, \mu_0(b, c)) - \mu_0(\mu_0(a, b), c) = a(bc) - (ab)c,
\end{aligned}$$

es decir, es equivalente a la asociatividad del álgebra A.
Para $n = 1$ la igualdad (4.1) se lee

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i+j=1} \mu_i(a, \mu_j(b, c)) - \mu_i(\mu_j(a, b), c) \\
&= \mu_0(a, \mu_1(b, c)) - \mu_0(\mu_1(a, b), c) + \mu_1(a, \mu_0(b, c)) - \mu_1(\mu_0(a, b), c) \\
&= a\mu_1(b, c) - \mu_1(a, b)c + \mu_1(a, bc) - \mu_1(ab, c) \\
&= \partial^2(\mu_1)(a, b, c),
\end{aligned}$$

lo cual significa que para toda deformación, $\mu_1 \in Ker(\partial^2)$, es decir, μ_1 es un cociclo de Hochschild, llamado el infinitesimal de la deformación. Uno de los principales problemas en la teoría de deformaciones, no resuelto en general, es la pregunta de cuándo un cociclo de Hochschild es el infinitesimal de una deformación. Un problema más accesible, y cuya solución responde parcialmente la primera pregunta, es la siguiente: ¿Si μ_1 es un cociclo de Hochschild, es decir, cumple (4.1) para $n = 1$, cuándo existe un μ_2, tal que se cumple (4.1) para $n = 2$? El siguiente teorema responde una pregunta más general:

Teorema 4.3 *Sean $\mu_1, \ldots, \mu_{k-1} : A \otimes A \to A$ aplicaciones K-bilineales que cumplen* (4.1) *para $n = 1, \ldots, k-1$, entonces $F : A \otimes A \otimes A \to A$ dado por*

$$F(a, b, c) = \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j>0}} \mu_i(a, \mu_j(b, c)) - \mu_i(\mu_j(a, b), c)$$

es un cociclo de Hochschild, es decir, $F \in Ker(\partial^3)$, y por lo tanto define una clase de cohomología $[F] \in HH^3(A)$. Además $[F] = 0$ si y solamente si existe μ_k tal que $\mu_1, \ldots, \mu_k$ cumplen (4.1) *para $n = k$.*

Demostración. La primera parte del teorema corresponde a [1, Prop.3, sec. 5, pág. 69]. Para la segunda afirmación consideremos que

$$\begin{aligned}
& \sum_{i+j=k} (\mu_i(a, \mu_j(b, c)) - \mu_i(\mu_j(a, b), c)) \\
= \quad & \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j>0}} (\mu_i(a, \mu_j(b, c)) - \mu_i(\mu_j(a, b), c)) \\
& + \mu_0(a, \mu_k(b, c)) - \mu_0(\mu_k(a, b), c) \\
& + \mu_k(a, \mu_0(b, c)) - \mu_k(\mu_0(a, b), c) \\
= \quad & F(a, b, c) + a\mu_k(b, c) - \mu_k(a, b)c \\
& + \mu_k(a, bc) - \mu_k(ab, c) \\
= \quad & F(a, b, c) + \partial^2(\mu_k)(a, b, c).
\end{aligned}$$

Como $[F] = 0 \in HH^3(A)$ significa que $F \in Im(\partial^2)$, se tiene en ese caso que $F = \partial^2(g)$ para algún $g : A \otimes A \to A$. Basta tomar $\mu_k := -g$ para obtener (4.1) para $n = k$. $\square$

Corolario 4.4 *Si $HH^3(A) = 0$, entonces todo elemento $\mu_1 \in Ker(\partial^2)$ es el infinitesimal de una deformación.*

La interpretación de $HH^3(A)$ en este contexto es entonces que ciertas clases son la obstrucción a continuar la construcción gradual de una deformación.
Los siguientes resultados los vamos a dar sin la demostración, que se puede encontrar en [1, Sec. 3, pág 65].

Proposición 4.5 *Sean μ_f y μ_g deformaciones dadas por (f_i) y (g_i) respectivamente. Si $\varphi : A_t \to A_t$ es un isomorfismo $K[[t]]$-lineal (dado por $\varphi_j : A \to A$) que lleva (A_t, μ_f) en (A_t, μ_g), entonces los infinitesimales de μ_f y μ_g son cohomólogos. Es decir $[f_1] = [g_1] \in HH^2(A)$, más aún $f_1 = g_1 + \partial^1(\varphi_1)$.*

El resultado recíproco no vale, pues hay ejemplos de deformaciones tales que $[f_1] = [g_1]$, pero $(A_t, \mu_f) \ncong (A_t, \mu_g)$. Si una deformación es isomorfa a la deformación trivial ($f_i = 0$ para $i \geq 1$) entonces también se llama trivial. La siguiente proposición nos da una condición suficiente para que una deformación sea trivial (ver [1, Corolario sec. 3, pág 65]):

Proposición 4.6 *Si $HH^2(A) = 0$, entonces A es rígida, es decir, toda deformación es trivial.*

5. Extensiones

Las estructuras de álgebra sobre A_t que cumplen (A) y (D) se llaman extensiones y más general, si en vez de $K[[t]]$ tomamos un álgebra B, se llaman productos tensoriales torcidos. Nosotros en este trabajo solamente vamos a ver las extensiones que además cumplen (B), pues estas se pueden clasificar por medio de la cohomología de Hochschild, de manera parecida al caso de las deformaciones. En este caso la estructura de álgebra de A_t está completamente determinada por el producto

$$(1 \otimes t)(a \otimes 1) = \gamma_1^1(a) \otimes t + \gamma_2^1(a) \otimes t^2 + \gamma_3^1(a) \otimes t^3 + \dots$$

donde $\gamma_j^1 : A \to A$ son funciones K-lineales. Notemos que el término constante, que se llamaría $\gamma_0^1(a) \otimes 1 = \pi_A((1 \otimes t)(a \otimes 1))$, se anula por (B), pues $\pi_A(1 \otimes t) = 0$. Si definimos

$$\gamma_j^r := \sum_{\substack{u_1,\dots,u_r>0\\ u_1+\dots+u_r=j}} \gamma_{u_1}^1 \cdots \gamma_{u_r}^1 \tag{5.1}$$

para $r \geq 2$, se tiene que (comparar con [3, Prop. 3.1, Prop.4.1])

$$(1 \otimes t^r)(a \otimes 1) = \gamma_r^r(a) \otimes t^r + \gamma_{r+1}^r(a) \otimes t^{r+1} + \gamma_{r+2}^r(a) \otimes t^{r+2} + \dots$$

y que las aplicaciones γ_j^r cumplen

$$\gamma_j^r(ab) = \sum_{i=r}^{j} \gamma_i^r(a)\gamma_j^i(b). \tag{5.2}$$

Las aplicaciones $\gamma_1^1, \gamma_2^1, \dots, \gamma_{n-1}^1$ definen una estructura de álgebra asociativa sobre el producto tensorial

$$A \otimes K[t]/\langle t^n \rangle.$$

(Comparar con [2, Prop.1.2]). En nuestro caso ($\gamma_0^1 = 0$) se trata de una extensión polinomial truncada no conmutativa triangular superior (EPTNCTS) (ver definición [2, Sección 4]).

Notemos que existe una aplicación

$$\pi_n : A_t \to A_t/\langle t^n \rangle \cong A \otimes K[[t]]/\langle t^n \rangle \cong A \otimes K[t]/\langle t^n \rangle$$

que es un morfismo de álgebras para las estructuras de álgebras definidas por los γ_j^r. Entonces las preguntas que se plantean, motivados por las preguntas planteadas en el caso de deformaciones, son las siguientes: Supongamos que $\gamma_1^1, \gamma_2^1, \dots, \gamma_{n-1}^1$ definen una EPTNCTS sobre $A \otimes K[t]/\langle t^n \rangle$:

(1) Extensión Infinita: ¿Existirán $\gamma_n^1, \gamma_{n+1}^1, \dots$ tales que las aplicaciones

$$\gamma_1^1, \gamma_2^1, \dots, \gamma_{n-1}^1, \gamma_n^1, \gamma_{n+1}^1, \dots$$

definan una extensión (infinita)?

(2) Paso de n a $n+1$: ¿Existirá γ_n^1 tal que las aplicaciones $\gamma_1^1, \gamma_2^1, \ldots, \gamma_{n-1}^1, \gamma_n^1$ definen una EPTNCTS sobre $A \otimes K[t]/\langle t^{n+1}\rangle$?

Nos limitaremos al caso $\gamma_1^1 = Id_A$ para evitar fórmulas muy técnicas, pero los resultados valen, con una ligera modificación, cuando γ_1^1 es un automorfismo arbitrario de A.

La primera pregunta solamente está completamente resuelta para $n = 3$. En ese caso se puede definir $D := \gamma_2^1$ y poner

$$\gamma_j^1 = D^{j-1}$$

para $j > 2$. Esto define una extensión triangular superior, lo cual se puede verificar del siguiente modo: Usando (5.1) se obtiene que

$$\gamma_j^r = \binom{j-1}{r-1} D^{j-r}$$

y un cálculo directo muestra que se cumple (5.2). Finalmente se aplica sucesivamente el corolario [2, Cor. 1.6].

En general la primera pregunta se responde parcialmente atacando el segundo problema, y la obstrucción a construir grado por grado una extensión es una clase de cohomología en $HH^2(A)$, muy similar al caso de las deformaciones (Ver [2, Th. 4.1]):

Teorema 5.1 *Supongamos que $\gamma_1^1, \gamma_2^1, \ldots, \gamma_{n-1}^1$ definen una EPTNCTS sobre $A \otimes K[t]/\langle t^n\rangle$. Consideremos la aplicación $F : A \otimes A \to A$ dada por*

$$F(a \otimes b) = \sum_{i=2}^{n-1} \gamma_i^1(a)\gamma_n^i(b).$$

Entonces F es un cociclo de Hochschild, es decir, $F \in Ker(\partial^2)$, y por lo tanto define una clase de cohomología $[F] \in HH^2(A)$. Además $[F] = 0$ si y solamente si existe γ_n^1 tal que las aplicaciones $\gamma_1^1, \gamma_2^1, \ldots, \gamma_{n-1}^1, \gamma_n^1$ definen una EPTNCTS sobre $A \otimes K[t]/\langle t^{n+1}\rangle$. En ese caso $F = -\partial^2(\gamma_n^1)$.

También tenemos un resultado de rigidez, para el cual definimos primero una noción de equivalencia de extensiones:

Definición 5.2 *Dos extensiones formales triangulares superiores sobre* A_t *se llaman equivalentes, si hay un isomorfismo de álgebras*

$$\varphi\colon A_t \to A_t,$$

que lleva una estructura de álgebra en la otra, tal que $\varphi(a) = a$ *para todo* $a \in A$ *y* $\varphi(t) = t + R$*, donde* $R \in (A_t)t^2$*.*

Entonces tenemos el siguiente resultado de rigidez [2, T. 4.17]:

Teorema 5.3 *Si* $H^1(A, A) = 0$*, entonces toda extensión formal triangular superior es equivalente a la extensión formal trivial.*

Referencias

[1] Gerstenhaber, Murray: *On the deformation of rings and algebras*, Ann. of Math. (2) 79 (1964), 59-103

[2] Guccione, Jorge A., Guccione, Juan J. y Valqui, Christian: *Non commutative truncated polynomial extensions*, Preprint ArXiv 1008.4076 (2010).

[3] Valqui, Christian: *Planos torcidos*, XXVIII Coloquio de la SMP Sociedad Matemática Peruana (2010).

Abstract
We compare the deformation theory with a particular type of twisted tensor products, using Hochschild Cohomology.

Keywords: Hochschild Cohomology, twisted planes, deformations

Christian Valqui
Sección Matemática, Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú
cvalqui@pucp.edu.pe