Pro Mathematica, **32**, *64 (2023), 15-30,* ISSN *1012-3938*
DOI: *10.18800/promathematica.202301.002*

SOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES SINGULARES BASADA EN MINIMIZACIÓN

Juan E. Casavilca[1]

octubre, 2023

(*Presentado por R. Chavez*)

Resumen

En este artículo se introduce un nuevo concepto de solución de un sistema lineal singular (sistema descriptor), basado en minimización. Se demuestra que, imponiendo una hipótesis en las matrices del sistema descriptor, la solución basada en minimización existe y es única para cualquier condición inicial. En particular, si la condición inicial es consistente, entonces la solución basada en minimización coincide con la solución clásica. En este trabajo también se da un ejemplo numérico donde se calcula la solución basada en minimización para diferentes condiciones iniciales.

MSC(2020): 93C05.

Palabras clave: *sistemas lineales singulares, descomposición en valores singulares, métodos de minimización.*

1. *Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú*

1. Introducción

El estudio de los sistemas lineales singulares se remonta al siglo IXX. El pionero en este campo fue Karl Weierstrass, quien en [20] analiza a los sistemas lineales singulares que poseen la propiedad de regularidad. Posteriormente, Leopold Kronecker en [12] extiende esta teoría para casos generales. Varias décadas después, Gantmacher dedica un capítulo del libro [7] al estudio de los sistemas lineales singulares, realizando aportes a la teoría conocida hasta esa fecha.

En la década de 1970 se presentan las primeras aplicaciones prácticas de los sistemas lineales singulares, esto aconteció en el campo de la economía con los sistemas singulares dinámicos de Leontief [13]. Posterior a ello, las aplicaciones de los sistemas lineales singulares se incrementaron, incursionando en campos como los circuitos eléctricos [16, 17], el análisis demográfico [2], los sistemas a gran escala [4], entre otros. A finales de la década de 1970 y comienzos de la década de 1980 el desarrollo teórico de estos sistemas cobra gran interés, lo que contribuye al aumento de estudios en esta materia. Estos estudios se enfocaron, principalmente, en la existencia y unicidad de soluciones, la controlabilidad y la observabilidad de los sistemas lineales singulares. En este periodo destacan los trabajos de Luenberger [14], Campbell et al. [2, 3], Dziurla y Newcomb [6], Yip y Sincovec [21], entre otros. Años más tarde, Dai en [4] presenta un compendio de la teoría de los sistemas lineales singulares aplicada a los sistemas de control.

Gantmacher [7] y Luenberger [14, 15] afirman que un aspecto importante para la existencia de la solución son las condiciones iniciales consistentes, y que junto con la regularidad del sistema garantizan la unicidad de la solución. Usando una descomposición matricial de Weierstrass es posible obtener de forma explícita esta solución [4, 21, 1]. Además, Ishihara y Terra [10, 11] usan una descomposición matricial en valores singulares para analizar la regularidad y la estabilidad del sistema lineal singular. Una recopilación teórica de estos resultados se encuentra en el libro de Duan [5], y en la tesis de Guerrero [9].

En este artículo, se propone un nuevo concepto de solución del sistema (2.1), basado en minimización. A diferencia de la solución clásica, la solución basada en minimización puede existir sin imponer condiciones iniciales consistentes. En la Sección 2 se introduce la notación utilizada a lo largo de este artículo, y también se presentan las características del sistema (2.1). En la Sección 3 se utiliza la descomposición en valores singulares para demostrar que, bajo ciertas condiciones del sistema, existe una única solución basada en minimización para cualquier condición inicial. Si la condición inicial es consistente, entonces la solución basada en minimización coincide con la solución clásica. En la última sección se presenta un ejemplo numérico que confirma los resultados de este artículo.

2. El sistema y la notación utilizada

El espacio euclideano $n-$dimensional de números reales es denotado por $\mathbb{R}^n$ y el conjunto de números enteros no-negativos, por $\mathbb{Z}_+$. El espacio de matrices de orden $m\times n$ en $\mathbb{R}$ es denotado por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y, de manera breve, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ denota al espacio de matrices de orden $n \times n$. La norma euclideana de un vector $v \in \mathbb{R}^n$ (inducida por el producto punto usual) es denotada por $||v||$. El complemento ortogonal de un subespacio W de $\mathbb{R}^n$ es denotado por $W^\perp$ y, si v es un vector de $\mathbb{R}^n$, la proyección ortogonal de v sobre W es denotada por $\mathrm{Proy}_W v$. Finalmente, $W_1 \oplus W_2$ denota la suma directa de los subespacios W_1 y W_2 de $\mathbb{R}^n$.

Considere el siguiente sistema:

$$Sx(k+1) = Ax(k)\,, \tag{2.1}$$

donde $k \in \mathbb{Z}_+$, $x(k) \in \mathbb{R}^n$ y $S\,, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Sea $\rho = \mathrm{rank}(S) \in \{0, 1, \cdots, n\}$. Cuando $\rho = n$, el sistema (2.1) es denominado no-singular, de otro modo es llamado singular. En cualquier caso, S tiene una descomposición en valores singulares $S = U\Sigma V^T$ [18, 19, 8], donde

$\Sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es la siguiente matriz diagonal:

$$\Sigma_{ij} = \begin{cases} \sigma_i & \text{si } i = j \leq \rho \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

y $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_\rho$ son los valores singulares positivos de S. Las matrices $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ son ortogonales. Es más, las primeras ρ columnas de U forman una base ortonormal de $R(S)$, imagen de S, y las últimas columnas constituyen una base ortonormal de $R(S)^\perp$. Análogamente, las últimas $n - \rho$ columnas de V forman una base ortonormal de $N(S)$, núcleo de S, y las primeras columnas constituyen una base ortonormal de $N(S)^\perp$.

Finalmente, introducimos la siguiente estructura de Σ, U y V:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_f \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

$$U = \begin{bmatrix} U_f & U_l \end{bmatrix}, \tag{2.3}$$

$$V = \begin{bmatrix} V_f & V_l \end{bmatrix}, \tag{2.4}$$

donde: $\Sigma_f \in \mathcal{M}_{\rho\times n}(\mathbb{R})$, $0 \in \mathcal{M}_{(n-\rho)\times n}(\mathbb{R})$, $U_f \in \mathcal{M}_{n\times\rho}(\mathbb{R})$, $U_l \in \mathcal{M}_{n\times(n-\rho)}(\mathbb{R})$, $V_f \in \mathcal{M}_{n\times\rho}(\mathbb{R})$, y $V_l \in \mathcal{M}_{n\times(n-\rho)}(\mathbb{R})$.

Observación 2.1. Note que cuando $\rho = 0$: $S = 0 = \Sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (i.e. Σ_f no existe), $U = U_l \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (i.e. U_f no existe), y $V = V_l \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (i.e. V_f no existe). Y cuando $\rho = n$: S es no-singular, $\Sigma = \Sigma_f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $U = U_f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (i.e. U_l no existe), y $V = V_f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (i.e. V_l no existe).

3. Solución basada en minimización

Definición 3.1. Considere el sistema (2.1) con condición inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Se dice que la sucesión $\{x(k)\}_{k=0}^\infty$ es una solución (clásica) de (2.1) con condición inicial x_0 si: $x(0) = x_0$ y $Sx(k+1) = Ax(k)$, para todo $k \in \mathbb{Z}_+$.

Observación 3.2. Cuando el sistema es no-singular ($\rho = n$) la solución clásica existe y se puede encontrar de manera recursiva. Sin embargo, cuando el sistema es singular ($\rho < n$) debemos exigir que $Ax_0 \in R(S)$ para que exista $x(1)$, una solución de la ecuación $Sx(1) = Ax(0)$. En ese sentido, se dice que la condición inicial x_0 debe ser consistente; es una condición necesaria (aunque no suficiente) para la existencia de una solución clásica del sistema singular.

Definición 3.3. Considere el sistema (2.1) con condición inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Se define el siguiente conjunto:

$$\mathcal{S} = \left\{ x : \mathbb{Z}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^n \middle| \, x(0) = x_0 \text{ y } \sum_{k=0}^{\infty} ||Sx(k+1) - Ax(k)||^2 < \infty \right\} .$$

Observación 3.4. $\mathcal{S}$ no es vacío pues: la sucesión $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$ con $x(0) = x_0$ y $x(k) = 0 \in \mathbb{R}^n$ para $k = 1, 2, \cdots$ es tal que

$$\sum_{k=0}^{\infty} ||Sx(k+1) - Ax(k)||^2 = || - Ax(0)||^2 < \infty.$$

Definición 3.5. Considere el sistema (2.1) con condición inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Se dice que la sucesión $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$ es una solución de (2.1), basada en minimización, si resuelve el siguiente problema:

$$\min_{x \in \mathcal{S}} \sum_{k=0}^{\infty} ||Sx(k+1) - Ax(k)||^2 .$$

Este artículo da condiciones suficientes para que exista una única solución basada en minimización (Teorema 3.8); antes de ello se enuncian los siguientes lemas.

Lema 3.6. *Considere el sistema* (2.1) *con condición inicial* $x_0 \in \mathbb{R}^n$. *Si* $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$ *es una sucesión en* $\mathcal{S}$ *entonces*

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} ||Sx(k+1) - Ax(k)||^2 &= ||Proy_{R(S)^\perp}(-Ax(0))||^2 \; + \\ &\quad \sum_{k=0}^{\infty} \Big\{ ||Proy_{R(S)}(Sx(k+1) - Ax(k))||^2 + \\ &\qquad ||Proy_{R(S)^\perp}(-Ax(k+1))||^2 \Big\} \end{aligned} \tag{3.1}$$

y por tanto

$$\sum_{k=0}^{\infty} ||Sx(k+1) - Ax(k)||^2 \geq ||Proy_{R(S)^\perp}(-Ax(0))||^2 \,. \tag{3.2}$$

Demostración. Como $\mathbb{R}^n = R(S) \oplus R(S)^\perp$ [18] , tenemos que, para todo $k \in \mathbb{Z}_+$:

$$\begin{aligned}||Sx(k+1) - Ax(k)||^2 &= ||\mathrm{Proy}_{R(S)}(Sx(k+1) - Ax(k))||^2 + \\ &\quad ||\mathrm{Proy}_{R(S)^\perp}(Sx(k+1) - Ax(k))||^2 \\ &= ||\mathrm{Proy}_{R(S)}(Sx(k+1) - Ax(k))||^2 + \\ &\quad ||\mathrm{Proy}_{R(S)^\perp}(-Ax(k))||^2 \,.\end{aligned}$$

Así, para todo $N \in \mathbb{Z}_+$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} ||Sx(k+1) - Ax(k)||^2 &= \sum_{k=0}^{N} \Big\{ ||\mathrm{Proy}_{R(S)}(Sx(k+1) - Ax(k))||^2 + \\ &\qquad ||\mathrm{Proy}_{R(S)^\perp}(-Ax(k))||^2 \Big\} \\ &= ||\mathrm{Proy}_{R(S)^\perp}(-Ax(0))||^2 \; + \\ &\quad \sum_{k=0}^{N-1} \Big\{ ||\mathrm{Proy}_{R(S)}(Sx(k+1) - Ax(k))||^2 + \\ &\qquad ||\mathrm{Proy}_{R(S)^\perp}(-Ax(k+1))||^2 \Big\} + \\ &\quad ||\mathrm{Proy}_{R(S)}(Sx(N+1) - Ax(N))||^2 \,. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Por otro lado, como $\sum_{k=0}^{\infty} ||Sx(k+1) - Ax(k)||^2 < \infty$, entonces $\lim_{N\to\infty} ||Sx(N+1) - Ax(N)||^2 = 0$. Y, como

$$0 \leq ||\mathrm{Proy}_{R(S)}(Sx(k+1) - Ax(k))||^2 \leq ||Sx(k+1) - Ax(k)||^2$$

para todo $k \in \mathbb{Z}_+$, entonces $\lim\limits_{N\to\infty} ||\mathrm{Proy}_{R(S)}(Sx(N+1) - Ax(N))||^2 = 0$.

Finalmente, al tomar límite a ambos lados de (3.3), obtenemos (3.1). Además, como la serie del lado derecho de (3.1) es no-negativa, tenemos la desigualdad (3.2). □

Lema 3.7. *Considere el sistema* (2.1) *y una sucesión* $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$ *arbitraria. También considere una descomposición en valores singulares* $S = U\Sigma V^T$ *con la notación dada en* (2.2), (2.3) *y* (2.4). *Para cada* $k \in \mathbb{Z}_+$ *se cumple lo siguiente:*

$$||Proy_{R(S)}(Sx(k+1) - Ax(k))|| = ||\Sigma_f V^T x(k+1) - U_f^T Ax(k)||\,, \tag{3.4}$$

$$||Proy_{R(S)^{\perp}}(-Ax(k))|| = ||-U_l^T Ax(k)||\,. \tag{3.5}$$

Demostración. Primero observe que, de la descomposición en valores singulares y de las igualdades (2.2) y (2.3) tenemos:

$$\begin{aligned} U_f^T S &= U_f^T U \Sigma V^T \\ &= U_f^T \begin{bmatrix} U_f & U_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_f \\ 0 \end{bmatrix} V^T = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_f \\ 0 \end{bmatrix} V^T \\ &= \Sigma_f V^T\,. \end{aligned}$$

Por tanto, para todo $k \in \mathbb{Z}_+$:

$$\begin{aligned} U_f^T(Sx(k+1) - Ax(k)) &= U_f^T Sx(k+1) - U_f^T Ax(k) \\ &= \Sigma_f V^T x(k+1) - U_f^T Ax(k)\,. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Por otro lado, se sabe que las ρ columnas de U_f forman una base ortonormal de $R(S)$. Por tanto, las ρ coordenadas del vector $\mathrm{Proy}_{R(S)}(Sx(k+1)-Ax(k))$, en esa base, constituyen el vector columna $U_f^T(Sx(k+1)-Ax(k))$, que es igual a $\Sigma_f V^T x(k+1) - U_f^T Ax(k)$, por la ecuación (3.6). En consecuencia, al tomar la norma euclideana de este último vector, se obtiene el mismo valor que la norma euclideana de $\mathrm{Proy}_{R(S)}(Sx(k+1)-Ax(k))$ porque la base en la que se ha escrito esta proyección es ortonormal. Es decir, tenemos la igualdad (3.4).

La igualdad (3.5) se demuestra de manera análoga: Las $n-\rho$ columnas de U_l forman una base ortonormal de $R(S)^\perp$ y por tanto, la norma euclideana del vector $\mathrm{Proy}_{R(S)^\perp}(-Ax(k))$ es igual a la norma euclideana del vector de coordenadas $-U_l^T Ax(k)$. □

Teorema 3.8. *Considere el sistema* (2.1) *con condición inicial* $x_0 \in \mathbb{R}^n$*, y una descomposición en valores singulares* $S = U\Sigma V^T$ *con la notación dada en* (2.2)*,* (2.3) *y* (2.4)*. Si* $U_l^T AV_l \in \mathcal{M}_{n-\rho}(\mathbb{R})$ *es una matriz no-singular entonces existe una única sucesión* $\{x(k)\}_{k=0}^\infty$ *en* $\mathcal{S}$ *tal que*

$$\sum_{k=0}^{\infty} ||Sx(k+1)-Ax(k)||^2 = ||Proy_{R(S)^\perp}(-Ax(0))||^2 \tag{3.7}$$

y por tanto, $\{x(k)\}_{k=0}^\infty$ *es la única solución del sistema* (2.1) *basada en minimización.*

Demostración. Primero, siguiendo la notación (2.2), (2.3) y (2.4) observe lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} \Sigma_f \\ -U_l^T AV \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & 0 \\ -U_l^T AV_f & -U_l^T AV_l \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

donde $D \in \mathcal{M}_\rho(\mathbb{R})$ es la matriz diagonal formada por los valores singulares positivos de S. Así, la matriz D es no-singular y como, por hipótesis, $U_l^T AV_l$ también es no-singular, entonces la matriz dada en (3.8) es no-singular.

Segundo, se define una sucesión $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$ de manera recursiva: Sea $x(0) = x_0$, la condición inicial dada; luego, para cada $k \in \mathbb{Z}_+$, se define el vector $x(k+1)$ como siendo la solución del siguiente sistema (3.9):

$$\begin{bmatrix} \Sigma_f \\ -U_l^T AV \end{bmatrix} \cdot V^T x(k+1) = \begin{bmatrix} U_f^T Ax(k) \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.9}$$

Note que la solución $x(k+1)$ existe y es única pues, como vimos, la primera matriz del lado izquierdo en (3.9) es no-singular, y la matriz V^T es ortonormal (i.e. $VV^T = I = V^T V$).

Ahora, probaremos que esta sucesión satisface (3.7). Para cada $k \in \mathbb{Z}_+$, $x(k)$ y $x(k+1)$ satisfacen (3.9), es decir:

$$\begin{aligned} \Sigma_f V^T x(k+1) &= U_f^T Ax(k) \\ -U_l^T Ax(k+1) &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto, $||\Sigma_f V^T x(k+1) - U_f^T Ax(k)|| = 0$ y $|| - U_l^T Ax(k+1)|| = 0$; o equivalentemente, $||\mathrm{Proy}_{R(S)}(Sx(k+1) - Ax(k))|| = 0$ y $||\mathrm{Proy}_{R(S)^\perp}(-Ax(k+1))|| = 0$ (vea el Lema 3.7).
Así, para todo $N = 1, 2, \cdots$ se tiene que:

$$||\mathrm{Proy}_{R(S)}(Sx(1) - Ax(0))||^2 + \sum_{k=1}^{N} ||\mathrm{Proy}_{R(S)}(Sx(k+1) - Ax(k))||^2 = 0\,, \tag{3.10}$$

$$\text{y} \quad \sum_{k=1}^{N} ||\mathrm{Proy}_{R(S)^\perp}(-Ax(k))||^2 = 0\,. \tag{3.11}$$

Si sumamos (3.10) y (3.11) , y recordamos que $\mathrm{Proy}_{R(S)^\perp}(-Ax(k)) = \mathrm{Proy}_{R(S)^\perp}(Sx(k+1) - Ax(k))$, tenemos lo siguiente:

$$||\mathrm{Proy}_{R(S)}(Sx(1) - Ax(0))||^2 + \sum_{k=1}^{N} ||Sx(k+1) - Ax(k)||^2 = 0\,.$$

Y por tanto,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N}||Sx(k+1)-Ax(k)||^2 &= ||\text{Proy}_{R(S)^\perp}(Sx(1)-Ax(0))||^2+\\ &\quad ||\text{Proy}_{R(S)}(Sx(1)-Ax(0))||^2+\\ &\quad \sum_{k=1}^{N}||Sx(k+1)-Ax(k)||^2\\ &= ||\text{Proy}_{R(S)^\perp}(-Ax(0))||^2\,. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Y al tomar límite a ambos lados de (3.12) se obtiene (3.7). Note que, como la serie es finita, la sucesión $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$ está en $\mathcal{S}$.

Ahora probaremos la unicidad. Sea $\{x'(k)\}_{k=0}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{S}$ que satisface (3.7). Como el Lema 3.6 afirma que se debe cumplir la igualdad (3.1), entonces se tiene lo siguiente:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\{||\text{Proy}_{R(S)}(Sx'(k+1)-Ax'(k))||^2+||\text{Proy}_{R(S)^\perp}(-Ax'(k+1))||^2\right\}=0\,.$$

Es decir, para cada $k\in\mathbb{Z}_+$: $||\text{Proy}_{R(S)}(Sx'(k+1)-Ax'(k))||=0$ y $||\text{Proy}_{R(S)^\perp}(-Ax'(k+1))||=0$, o equivalentemente $||\Sigma_f V^T x'(k+1)-U_f^T Ax'(k)||=0$ y $||-U_l^T Ax'(k+1)||=0$, o también:

$$\begin{bmatrix}\Sigma_f\\ -U_l^T AV\end{bmatrix}\cdot V^T x'(k+1)=\begin{bmatrix}U_f^T Ax'(k)\\ O\end{bmatrix}. \tag{3.13}$$

Finalmente, se sigue por inducción que para todo $k\in\mathbb{Z}_+$: $x'(k)=x(k)$, ya que $x'(0)=x_0=x(0)$ y ya que el sistema (3.13) es igual al sistema no-singular (3.9) que define la sucesión $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$.

Ahora probaremos que esta sucesión es la única solución del sistema (2.1) basada en minimización. Sea $\{x^*(k)\}_{k=0}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{S}$ arbitraria. El Lema 3.6 nos indica que $\{x^*(k)\}_{k=0}^{\infty}$ debe cumplir la desigualdad (3.2) con $x^*(0)=x_0=x(0)$, y como la sucesión $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$ satisface (3.7), tenemos:

$$\sum_{k=0}^{\infty}||Sx^*(k+1)-Ax^*(k)||^2\geq\sum_{k=0}^{\infty}||Sx(k+1)-Ax(k)||^2\,.$$

Como $\{x^*(k)\}_{k=0}^{\infty}$ es una sucesión arbitraria, entonces $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$ resuelve el problema de minimización de la serie. Además, cualquier sucesión en $\mathcal{S}$ cuya serie iguale a $\sum_{k=0}^{\infty} ||Sx(k+1) - Ax(k)||^2$ va a satisfacer (3.7) y por tanto, tiene que ser la sucesión $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$, como vimos arriba. $\square$

Observe que el Teorema 3.8 es válido para cualquier condición inicial x_0 (la hipóteis se refiere al sistema (2.1)); es decir, la solución basada en minimización existe para cualquier condición inicial. Si, además, la condición inicial es consistente (i.e. $Ax_0 \in R(S)$), la solución basada en minimización es la solución clásica. Esto se analiza en el siguiente Corolario.

Corolario 3.9. *Considere la hipótesis del Teorema 3.8. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) La condición inicial x_0 es consistente;

(ii) La solución basada en minimización es una solución clásica con condición inicial x_0;

(iii) Existe una única solución clásica con condición inicial x_0.

Demostración. (i)⇒(ii): Decir que la condición inicial x_0 es consistente significa que $Ax_0 \in R(S)$ (vea la Observación 3.2), o equivalentemente que $\mathrm{Proy}_{R(S)^\perp} Ax_0 = 0$. Además, el Teorema 3.8 garantiza la existencia de la solución basada en minimización $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$ con $x(0) = x_0$. En consecuencia, la serie en (3.7) es cero , y por tanto $||Sx(k+1) - Ax(k)|| = 0$ para cada $k \in \mathbb{Z}_+$. Esto quiere decir que la solución basada en minimización es una solución clásica.

(ii)⇒(iii): Sólo resta probar la unicidad. Sea $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$ la solución basada en minimización con $x(0) = x_0$. Como esta solución es clásica, tenemos que $\sum_{k=0}^{\infty} ||Sx(k+1) - Ax(k)||^2 = 0$. Por otro lado, cualquier solución clásica $\{x^*(k)\}_{k=0}^{\infty}$ con condición inicial $x^*(0) = x_0$ es tal que $\sum_{k=0}^{\infty} ||Sx^*(k+1) - Ax^*(k)||^2 = 0$, y por tanto, es una sucesión en $\mathcal{S}$ que resuelve el problema de minimización. Así, por la unicidad vista en el Teorema 3.8, tiene que ser igual a $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$.

(iii)⇒(i): Sea $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$ la solución clásica con $x(0) = x_0$. Por tanto, $Sx(1) = Ax(0)$, y así $Ax_0 \in R(S)$; es decir la condición inicial x_0 es consistente. □

Corolario 3.10. *Considere la hipótesis del Teorema 3.8. Sea* $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$ *la solución basada en minimización con condición inicial* $x(0)$*, y sea* $\{x'(k)\}_{k=0}^{\infty}$ *la solución basada en minimización con condición inicial* $x'(0)$*. Ambas soluciones coinciden (para* $k = 1, 2, \ldots$*) si y solo si* $Proy_{R(S)}Ax(0) = Proy_{R(S)}Ax'(0)$*.*

Demostración. Primero, observe que $\text{Proy}_{R(S)}Ax(0) = \text{Proy}_{R(S)}Ax'(0)$ si solo si $U_f^T Ax(0) = U_f^T Ax'(0)$.

Ahora, de la demostración del Teorema 3.8, se sabe que la solución basada en minimización se calcula de manera recursiva usando el sistema (3.9). Por tanto, si $U_f^T Ax(0) = U_f^T Ax'(0)$ entonces $x(1) = x'(1)$; y por inducción se tiene que ambas soluciones coinciden para $k = 1, 2, \ldots$. Y si $U_f^T Ax(0) \neq U_f^T Ax'(0)$ entonces $x(1) \neq x'(1)$ ya que el sistema (3.9) es no-singular (inyectivo); así, ambas soluciones son diferentes. □

4. Ejemplo

Encontraremos soluciones basadas en minimización del sistema (2.1) para las siguientes matrices:

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Note que: $n = 3$, $\rho = 1$ y una descomposición en valores singulares es $S = U\Sigma V^T$, donde $\Sigma = S$ y $U = I = V$. Con esta descomposición calculamos $U_l^T AV_l = I \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que es no-singular; por tanto, el Teorema 3.8 garantiza la existencia de una única solución basada en minimización para cada condición inicial $x(0)$. En este ejemplo, hemos considerado 4 condiciones iniciales diferentes mostradas en la Tabla 1. Para cada caso, se calculó la solución basada en minimización $\{x(k)\}_{k=0}^{N}$, con $N = 10$.

	$x(0)$	$\text{Proy}_{R(S)}Ax(0)$	$\text{Proy}_{R(S)^\perp}Ax(0)$	Suma*
caso 1	$[5\ -5\ -5]^T$	$[5\ 0\ 0]^T$	$[0\ 0\ 0]^T$	0
caso 2	$[5\ -4\ -5]^T$	$[5\ 0\ 0]^T$	$[0\ 1\ 0]^T$	1
caso 3	$[5\ -5\ -4]^T$	$[5\ 0\ 0]^T$	$[0\ 0\ 1]^T$	1
caso 4	$[5\ -4\ -4]^T$	$[5\ 0\ 0]^T$	$[0\ 1\ 1]^T$	2

* Suma $= \sum_{k=0}^{N-1} ||Sx(k+1) - Ax(k)||^2$

Cuadro 1: Resultados encontrados para 4 condiciones iniciales diferentes.

Como las 4 condiciones iniciales son tales que $\text{Proy}_{R(S)}Ax(0) = [5\ 0\ 0]^T$ (ver Tabla 1), el Corolario 3.10 nos indica que las 4 soluciones deben coincidir para $k = 1, \cdots, N$. Esto se confirma numéricamente: La Figura 1 muestra que las 4 soluciones difieren apenas en la condición inicial. Finalmente, para cada caso, se calculó el vector $\text{Proy}_{R(S)^\perp}Ax(0)$ así como $\sum_{k=0}^{N-1} ||Sx(k+1) - Ax(k)||^2$ (ver Tabla 1). Los resultados confirman lo establecido en el Teorema 3.8: esta suma debe ser igual a la norma al cuadrado del vector proyección. Cabe resaltar que el caso 1 corresponde a una condición inicial consistente y por tanto, la solución es clásica.

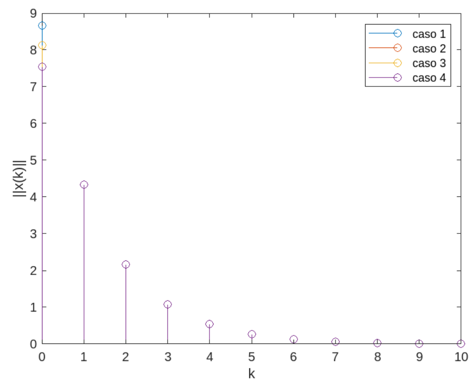

Figura 1: Soluciones basadas en minimización calculadas para 4 condiciones iniciales diferentes.

Referencias

[1] A. A. Belov, O. G. Andrianova, and A. P. Kurdyukov. *Control of discrete-time descriptor systems an anisotropy-based approach*, Springer International Publishing, 2018.

[2] S. L. Campbell. *Singular systems of differential equations*, San Francisco Pitman, 1980.

[3] S. L. Campbell, C. D. Meyer, and N. J. Rose. Applications of the drazin inverse to linear systems of differential equations with singular constant coefficients, *SIAM Journal on Applied Mathematics* **31** no. 3 (1976) 411–425.

[4] L. Dai, *Lecture notes in control and information sciences*, Springer, 1989.

[5] G. Duan. *Analysis and design of descriptor linear systems*, **23**. Dordrecht Springer, 2010.

[6] B. Dziurla and R. W. Newcomb. *The drazin inverse and semistate equations*, Proceedings of the 4th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, 1979.

[7] F. R. Gantmacher. *The theory of matrices*, Chelsea, 1974.

[8] G. H. Golub and V. L. Charles F. *Matrix computations*, Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 2013. xiv+756 pp.

[9] J. C. Guerrero, *Análisis de estabilidad de sistemas lineales singulares con saltos markovianos con probabilidades de transición parcialmente conocidas*, Tesis de Maestría,, Pontificia Universidad Católica del Perú, 2021.

[10] J. Y. Ishihara and M. H. Terra, On the Lyapunov theorem for singular systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **47**, no. 11 (2002) 1926–1930.

[11] J. Y. Ishihara and M. H. Terra *A new Lyapunov equation for discrete-time descriptor systems*, Proceedings of American Control Conference, vol. 6, 2003.

[12] L. Kronecker. Algebraische reduction der schaaren bilinearer formen, *Sitzungsber. Akad. Wiss Berlin* (1890), 1225–1237.

[13] D. G. Luemberger and A. Arbel, Singular dynamic Leontief systems, *Econometrica* **45** no. 4 (1977) 991–995.

[14] D. G. Luenberger. Time-invariant descriptor systems *Automatica* **14**, no. 5 (1978) 473–480.

[15] D. G. Luenberger. Dynamic equations in descriptor form, I*EEE Transactions on Automatic Control* **22**, no. 3 (1977) 312–321.

[16] R. W. Newcomb. The semistate description of nonlinear time-variable circuits. *IEEE Transactions on Automatic Control* **28** no. 1 (1981) 62–71.

[17] R. W. Newcomb and B. Dziurla, Some circuits and systems applications of semistate theory *Circuits, Systems, and Signal Process* **8** no. 3 (1989) 235–260.

[18] G. Strang. *Linear algebra and its applications*, 3 ed., Brooks/Cole, 1988.

[19] Lloyd N. Trefethen and David Bau, *Numerical linear algebra*, SIAM, 1997.

[20] K. Weierstrass *Zur theorie der bilinearen und quadratischen formen* Monatsber. Akad. Wiss. Berlin (1868), 310–338.

[21] E. L. Yip and R. F. Sincovec, Solvability, controllability, and observability of continuous descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* **26** (1981), no. 3, 702–707.

Abstract

This article introduces a new concept of solution of a linear singular system (descriptor system), based on minimization. It is shown that, by imposing a hypothesis on the matrices of the descriptor system, the minimization-based solution exists and is unique for any initial condition. In particular, if the initial condition is consistent, then the minimization-based solution is equal to the classical solution. Also in this work, a numerical example is given in order to analyze the minimization-based solutions for different initial conditions.

Keywords: linear singular system, singular value decomposition, minimization methods

Presentado: agosto del 2023.
Aceptado: octubre del 2023.

Juan Casavilca,
https://orcid.org/0000-0002-6972-2824
Pontificia Universidad Católica del Perú,
Av. Universitaria 1801,
San Miguel, 15088, Perú.
Email: casavilca.je@pucp.edu.pe