Pro Mathematica: Vol. IV, Nos. 7-8, 1990

RESOLUBILIDADE E REGULARIDADE DAS SOLUÇÕES DE EDPs LINEARES

Paulo D. CORDARO*

O propósito desta palestra é apresentar um ligeiro panorama de um dos problemas mais básicos da teoria das ecuações diferenciais parciais lineares: decidir sobre a resolubilidade local de uma EDP linear. Para formular o problema iniciamos introduzindo algunas notações.

---

* Profesor de IME-USP, Sao Paulo, Brasil

Um operador diferencial parcial linear (ODPL) em um aberto Ω de $\mathbb{R}^N$ é um operador da forma

$$P(x,D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)D^\alpha.$$

Aqui

$\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_N) \in \mathbb{Z}^N_+$, $|\alpha| = \alpha_1+\ldots+\alpha_N$ e

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{i\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{i\partial x_N}\right)^{\alpha_N}$$

(i denota a unidade imaginária). Os coeficientes a_α serão assumidos infinitamente diferenciáveis no aberto Ω.

Diremos que $P(x,D)$ é **resolúvel num ponto x_o de Ω** se existir uma vizinhança aberta U de x_o em Ω tal que

$$P(x,D)D'(U) \supset C^\infty_c(U).$$

Por exemplo, todos os operadores com coeficientes constantes são resolúveis em todo ponto de $\mathbb{R}^N$. De fato, foi demostrado independentemente por Malgrange [8] e Ehrenpreis [3] que todo ODPL com coeficientes constantes $P(D)$ admite uma **solução fundamental**, isto é, existe uma distribuição E sobre $\mathbb{R}^N$ tal que

$$P(D)E = \delta,$$

onde δ denota a medida de Dirac em $\mathbb{R}^N$.

Então se para $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ definirmos $u = E * f$ teremos

$$P(D)u = P(D)(E*f) = (P(D)E)*f = \delta * f = f$$

em $\mathbb{R}^N$. Note que neste caso a solução obtida é infinitamente difenciável.

Para o estudo de problemas envolvendo equações diferenciais parciais lineares é conveniente introduzir as noções de símbolo e símbolo principal de um ODPL. Dado um operador $P(x,D)$ as funçãoes

$$P(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} a(x)\xi^\alpha$$

$$P_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

denominam-se, respectivamente, **símbolo** e **símbolo principal** do operador. Aqui estamos escrevendo, para $\xi \in \mathbb{R}^N$ e $\alpha \in \mathbb{Z}^N$,

$$\xi^{\alpha} = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_N^{\alpha_N}.$$

Dizemos que $P(x,D)$ *é* **elítico no ponto** x_o se

$$P_m(x_o,\xi) = 0, \xi \in \mathbb{R}^N \Longrightarrow \xi = 0.$$

É fácil verificar que se $P(x,D)$ for elítico em x_o então ele o será em toda uma vizinhança de x_o.

Todo operador elítico em x_o é resolúvel em x_o e de fato também neste caso as soluções da equação $P(x,D)u = f$ serão infinitamente diferenciáveis se f o for. Tais resultados já podem, hoje, ser considerados clássicos e para uma exposição destes, com referências históricas, o leitor deve consultar [4].

Somos então naturalmente levados a considerar, a seguir, ODPL's cujos símbolos principais podem se anular e a analisar a resolubilidade das equações por eles definidas. Isto motiva a seguinte definição:

Definição 1.

Diremos que $P(x,D)$ é de tipo principal em x_o se

$$\xi \neq 0, P_m(x_o,\xi) = 0 \Longrightarrow \nabla_\xi P_m(x_o,\xi) \neq 0$$

Observe que a identidade de Euler

$$\xi . \nabla_\xi P_m(x_o,\xi) = mP_m(x_o,\xi)$$

mostra que $P(x,D)$ é de tipo principal em x_o se, e somente se, a função $\xi \longrightarrow \nabla_\xi P_m(x_o,\xi)$ não se anula no complementar da origen de $\mathbb{R}^N$. Em particular, um ODPL de primeira ordem

$$L(x,D) = \sum_{j=1}^{N} a_j(x)D_j + a_o(x) \qquad \textbf{(1)}$$

$(D_j = \partial/i\partial x_j, j = 1,\ldots,N)$ é de tipo principal em x_o se, e somente se,

$$\sum_{j=o}^{N} |a_j(x_o)| \neq 0.$$

Heuristicamente os operadores de tipo principal são aqueles em que os termos de ordem menor que m podem, no estudo, ser desprezados. O leitor deve observar que este não é, em geral, o caso. Por exemplo tanto o operador do calor no plano

$$P_1(x,D) = -iD_1-D_2^2$$

quanto o operador de Schrödinger

$$P_2(x,D) = -D_1-D_2^2$$

possuem o mesmo símbolo principal $(-\xi_2^2)$ mas tem comportamento totalmente distintos.

O interesse no estudo da resolubilidade local dos ODPL's de tipo principal se inicia com o célebre exemplo de Hans Lewy [7]. Em 1956, Lewy mostrou que o operador de primeira orden

$$L(x,D) = -iD_1-D_2-(x_1+ ix_1)D_3$$

não é resolúvel em ponto algum de $\mathbb{R}^3$.

Antes do aparecimemto deste exemplo Hörmander [5] já havia obtido em sua tese

(1955) um resultado afirmativo quanto à resolubilidade para uma classe de ODPL's de tipo principal:

Teorema 1.

Se $P(x,D)$ tiver parte principal real e for de tipo principal em x_o então $P(x,D)$ será resolúvel em x_o.

A técnica utilizada por Hörmander consitia em obter uma desigualdade '*a priori*' envolvendo o chamado **transposto formal** de $P(x,D)$ e concluir então a resolubilidade do operador via um argumento de dualidade. Daremos, a seguir, uma ilustração de tal método (numa versão simplificada).

Definição 2.

Dado um ODPL em Ω, $P(x,D)$, seu transposto formal é o ODPL em Ω que satisfaz a identidade

$$\int (P(x,D)\varphi)\psi \, d\, x = \int \varphi({}^{t}P(x,D)\psi) d\, x$$

quaisquer que sejam $\varphi,\psi \in C_c^{\infty}(\Omega)$.

Denotaremos por $L^2(\Omega)$ o espaco de Hilbert das (classes de equivalencia de) funções mensuráveis sobre Ω tais que $\int |f|^2 dx < \infty$. A norma neste espaço será denotada por $\| \ \|$.

Proposição 1.

Suponha que exista uma constante $C>0$ tal que

$$\|\varphi\| \leq C\|{}^tP(x,D)\varphi\| \tag{2}$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Então $P(x,D)L^2(\Omega) \supset L^2(\Omega)$. Em particular $P(x,D)$ é resolúvel em todo ponto de Ω.

Demostração: Consideremos

$$\mathcal{E} = \{{}^tP(x,D)\varphi \ : \ \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\}$$

como subespaço topológico de $L^2(\Omega)$.

Para cada $f \in L^2(\Omega)$ o funcional linear $\mathcal{E} \longrightarrow C$ definido por

$${}^tP(x,D)\varphi \longrightarrow \int f\varphi \ d \ x$$

está bem definido e é continuo uma vez que a desigualdade de Cauchy-Schwarz e **(2)** implicam que

$$\left|\int f\varphi \, d\,x\right| \le C\|f\| \, \|{}^{t}P(x,D)\varphi\|.$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach este funcional pode ser estendido a $L^2(\Omega)$ continuamente. Aplicando o Teorema de Riesz a esta extensão concluimos a existência de um elemento $u \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\int f\varphi \, d\,x = \int u\,{}^{t}P(x,D)\varphi \, d\,x$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Logo $P(x,D)u = f$ no sentido de distribuições e a proposição fica, portanto, demonstrada.

Quando $P(x,D)$ é de tipo principal mas seu símbolo principal assume valores complexos sua resolubilidade é caracterizada pela chamada condição (P) de Niremberg - Treves, condição esta que descreveremos a seguir.

Dada $F \in C^{\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^N)$ as **curvas bicaracterísticas de** F são, por definição, as soluções das equações de **Hamilton- Jacobi** :

$$\begin{cases} \dot{x} = \nabla_{\xi} F(x,\xi) \\ \dot{\xi} = \nabla_{x} F(x,\xi). \end{cases}$$

Um cálculo simples mostra que F é constante ao longo de suas curvas bicaracterísticas. Uma bicaracterística sobre a qual F se anula identicamente é chamada **bicaracterística nula de** F.

Definição 3.

Diremos que o ODPL $P(X,D)$ satisfaz a condiçao (P) no ponto $(x_o,\xi_o) \in \Omega \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ se existirem uma vizinhança aberta $\mathcal{O}$ de (x_o,ξ_o) em $\Omega \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ e um número com- complexo z tais que:

1. $\nabla_{\xi}\, Re(zP_m)(x,\xi) \neq 0, \quad \forall (x,\xi) \in \mathcal{O}$

2. *A restrição de $Im(zP_m)$ a qualquer bicaracterística nula de $Re(zP_m)$ in $\mathcal{O}$ não muda di sinal.*

Diremos que $P(x,D)$ satisfaz a condição (P) em Ω se $P(x,D)$ satisfizer a condição (P) em todo ponto de $\Omega \times (\mathbb{R}^N \backslash \{0\})$.

Em 1970 L. Niremberg e F.Treves [10] enunciaram a condição (P), mostraram que esta é invariante sob multiplicação do operador por funções que não se anulam e conjeturaram que para um ODPL de tipo principal ser resolúvel em todo ponto de um aberto Ω seria necessário e suficiente que a condição (P) fosse vericada em Ω.

Não é difícil verificar que se $P(x,D)$ for elítico em x_o ou se $Im(P_m) \equiv 0$ numa vizinhança de x_o então $P(x,D)$ satisfaz a condição (P) no ponto (x_o,ξ), qualquer que seja ξ em $\mathbb{R}^N\backslash \{0\}$, o que faz com que a conjetura seja compatível com os resultados que mencionamos até então. Além destes casos a conjetura, naquela data, já havia sido demostrada para operadores de ordem 1 [9], para operadores em duas variáveis independentes (isto é, quando $N = 2$) [11] e para ODPL's cujos coeficientes a_α, com $|\alpha| = m$, são funções analíticas reais [10].

A conjetura de Nirenberg-Treves resultou verdadeira em geral. A suficiência de Condição (P) foi demonstrada por R. Beals e C. Fefferman [1] em 1972 enquanto que a necessidade (agora já no contexto de Operadores Pseudo-Diferenciais) foi demonstrada por Moyer [4] em 1980.

Quanto á existência de soluções infinitamente diferenciáveis, o primeiro resultado que devemos mencionar foi obtido por Treves [2] em 1976 :

Teorema 2.

Seja $L(x,D)$ o ODPL dado por (1). Suponha que $L(x,D)$ seja de tipo principal, tenha coeficientes analíticos e satisfaça a condição (P) numa vizinhança da origem em $\mathbb{R}^N$. Então existem uma vizinhança aberta da origem U e um operador linear contínuo

$$K : C_c^\infty(U) \longrightarrow C^\infty(U)$$

tais que $L(x,D)K = I$, a identidade em $C_c^\infty(U)$.

Posteriormente, em 1978, Hörmander [6] mostrou que de fato, quando o operador $P(x,D)$ satisfaz a condição (P) então a equação $P(x,D)u = f$ possui soluções locais em C^∞ se f for da mesma classe. A técnica por ele utilizada na obtenção deste resultado foi a chamada análise de **propagação de singularidades**. Neste caso a existência de soluções infinitamente diferenciáveis é consequência, uma vez mais, de um argumento de dualidade de Análise Funcional. Até a presente data não se sabe se um resultado como aquele enunciado no Teorema **2** para um ODPL de tipo principal qualquer stisfazendo a condição (P) é verdadeiro ou não.

Dado $L(x,D)$ como em (1) consideremos sua **parte principal**:

$$L_o(x,D) = \sum_{j=1}^{N} a_j(x)D_j \quad .$$

Nas hipóteses de Teorema 2 podemos aplicar o Teorema de Cauchy-Kovalevsky e portando determinar N-1 funções de classe $C^\infty, Z_1, \ldots, Z_{N-1}$, definidas numa vizinhaça da origem e satisfazendo

$$L_o(x,D)Z_k = 0, \quad \forall k = 1,\dots,N-1$$

$$dZ_1 \wedge \dots \wedge dZ_{N-1} \neq 0.$$

Estas funções, algunas vezes chamadas de **integrais primeiras** do operador $L_o(x,D)$ assumem papel crucial na construção do operador K aludido no Teorema 2. Para fins de ilustração analisaremos agora a existência de tais inversos à direita para os chamados **Operadores de Mizohata.**

Denotemos as variáveis em $\mathbb{R}^2$ por (t,x) e por (τ,ξ) as respectivas variáveis duais. Para cada $k \in \mathbb{Z}_+$ consideremos o ODPL

$$M = M(t,\partial/\partial t,\partial/\partial x) = \partial/\partial t - it^k\partial/\partial x.$$

O símbolo principal de M (que neste caso coincide com seu símbolo) é a função $\sigma : \mathbb{R}^4 \longrightarrow C$ definida por

$$\sigma(t,x,\tau,\xi) = t^k\xi + i\tau.$$

Fixemos $(t_o,x_o,\tau_o,\xi_o) \in \mathbb{R}^4$, $(\tau_o,\xi_o) \neq (0,0)$. Se $t_o \neq 0$ então o operador M será elítico no ponto (t_o,x_o). Por outro lado a curva bicaracterística de $Im\sigma$ que passa por $(t_o, x_o, \tau_o, \xi_o)$ é dada por

$$s \longmapsto (s + t_o, x_o, \tau_o, \xi_o).$$

Tal bicaracterística será uma bicaracterística nula se e somente se $\tau_o = 0$ e a restrição de $Re\sigma$ a esta bicaracterística nula é a função

$$s \longmapsto (s + t_o)^k \xi_o.$$

Destas considerações segue o seguinte resultado:

Proposição 2.

O operador M satisfaz a condição (P) em $\mathbb{R}^2$ se, e somente se, k for par.

Seja $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ e tomemos a Transformada de Fourier em x na equação $Mu = f$. Obtemos

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t,\xi) + \xi t^k U(t,\xi) = F(t,\xi),$$

que por sua vez é equivalente a

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{\xi b(t)} U(t,\xi)\right) = e^{\xi b(t)} F(t,\xi).$$

Aqui U e F denotam, respectivamente, as Transformadas de Fourier de u e f na variável x e

$$b(t) = \frac{t^{k+1}}{k+1} .$$

Portanto

$$U(t,\xi) = \int_{\alpha(\xi)}^{t} e^{(b(s)-b(t))} F(s,\xi)ds. \qquad \textbf{(3)}$$

Uma vez que nosso intuito era, originalmente, encontrar uma solução para equação $Mu = f$ devemos determinar $\alpha(\xi)$ de modo que $U(t,\xi)$ seja 'temperada' em ξ. Se isto for possível então

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} U(t,\xi)d\xi \qquad \textbf{(4)}$$

será a solução procurada. É neste ponto que a condição (P) entra de modo crucial. Observe que quando k é par a função b é crescente em $\mathbb{R}$ e, consequentemente, $(b(s) - b(t))\xi \leq 0$ se $s \leq t$ e $\xi > 0$ ou $s \geq t$ e $\xi < 0$. Logo, se definirmos

$\alpha(\xi) = -\infty$ se $\xi > 0$, $\alpha(\xi) = \infty$ se $\xi < 0$, a seguinte propriedade é consequência de **(3)**: dados $p > 0$, n, $l \in \mathbb{Z}_+$ existe $C > 0$ tal que

$$|\xi^n \frac{\partial^l U}{\partial t^l}(t,\xi)| \leq C, \qquad \forall (t,\xi) \in \mathbb{R}^2, |t| \leq p.$$

Deste modo, se substituirmos **(3)** em **(4)** obteremos uma solução de classe C^∞ que pode, ainda, ser expressa como

$$K(f)(t,x) = \frac{1}{2\pi}\Big(-\int_{-\infty}^{0}\int_{t}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} +$$

$$\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\infty}\Big)$$

$$e^{i(w(t,x)-w(s,y))\xi} f(s,y)dydsd\xi,$$

onde

$$w(t,x) = x + ib(t)$$

é uma integral primeira de M.

Ainda no caso de ODPL's de primeira ordem em $\mathbb{R}^2$, é possível reformular a condição (P) en termos das respectivas integrais primeiras.

Seja

$$M = \alpha(t,x)\partial/\partial t + b(t,x)\partial/\partial x$$

um ODPL de primeira ordem em um aberto Ω de $\mathbb{R}^2$. Assuma que M seja de tipo principal e que exista $\omega \in C^{\infty}(\Omega)$ com diferencial diferente de 0 em todo ponto e satisfazendo $Mw = 0$. Observe que a existência local de w é automática se α e b forem analíticas reais (novamente uma consequência do Teorema de Cauchy-Kovalevsky).

Proposição 3.

O operador M satisfaz a condição (P) em Ω se, e somente se, dado $(t_o, x_o) \in \Omega$ existe uma vizinhança aberta U_o de (t_o,x_o) em Ω tal que os conjuntos

$$\{(t,x) \in U_o : w(t,x) = z\}$$

são conexos, qualquer que seja $z \in w(U_o)$.

A partir de 1980 tem-se obtido algum progresso no estudo da resolubilidade local para **sistemas de ODPL's de primeira ordem**. O ponto de partida deste estudo é, sem dúvida, a reformulação da condição (P) como enunciada na Proposição 3. Para concluir esta palestra enunciaremos alguns destes resultados sem nos atermos a questões envolvendo a invariância dos sistemas analisados.

Escrevamos as coordenadas em $\mathbb{R}^N$ como $t_1,\ldots,t_n,x$ $(N = n+1)$ e consideremos uma função $\varphi = \varphi(t,x)$ de classe C^∞, a valores reais e definida numa vizinhança Ω da origem em $\mathbb{R}^N$. Para o que se segue não há perda de generalidade em assumir que

$$\varphi(0,0) = \varphi_x(0,0) = 0.$$

Os sistemas que consideraremos serão construidos através dos operadores

$$L_j = \frac{\partial\varphi}{\partial t_j} - i\,\frac{\partial\varphi}{\partial t_j}\left(1 + i\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\,,\qquad j = 1,\ldots,n.$$

É fácil ver que os operadores L_j comutam entre si (isto é, $L_jL_k = L_kL_j$, $\forall j,k = 1,\ldots,n$) e que vale a relação.

$$L_j(x + i\varphi(t,x) = 0, \quad j = 1,\dots,n.$$

Em outras palavras a função

$$Z(t,x) = x + i\varphi(t,x)$$

é uma **integral primeira do sistema** $L_1,\dots,$ L_n.

Consideraremos dois tipos de sistemas. O primeiro é o **sistema gradiente associado a** $L_1,\dots,L_n$ e o problema correspondente se enuncia do siguinte modo:

Dadas funções $f_1,\dots,f_n$ de classe C^∞, definidas numa vizinhança da origem e satisfazendo

$$L_j f_k = L_k f_j, \quad j,k = 1,\dots,n \qquad \textbf{(5)}$$

encontrar uma função de classe C^∞ u tal que as equações

$$L_j u = f_j, \qquad j = 1,\dots,n \qquad \textbf{(6)}$$

estejam simultaneamente satisfeitas em alguma vizinhança da origem.

Observe que o sistema **(6)** é sobredeterminado se $n > 1$. As condições de compatibilidade **(5)** são claramente necessárias, uma vez que os operadores L_j comutam entre si. Para tais sistemas a condição de resolubilidade é a seguinte:

Definição 4.

Diremos que o sistema $L_1, \dots, L_n$ satisfaz a condição (P') no ponto $(t_o, x_o) \in \Omega$ se existir um sistema fundamental de vizinhanças abertas $\{U_k\}$ de (t_o, x_o) de Ω tal que, para cada k e cada $z \in Z(U_k)$, o conjunto

$$\{(t,x) \in U_k : Z(t,x) = z\}$$

é conexo em U_k.

Em 1983 F. Treves [13] mostrou que, cuando φ é analítica real, a resolubilidade do sistema (6) é caracterizada pela condição (P'). Mais precisamente:

Teorema 3.

Assuma que φ seja analítica real.

1. Suponha que a condição (P') não esteja verificada na origem. Então existem funções $f_1,\ldots,f_n$ *de classe* C^∞ *numa vizinhança da origem e satisfazendo (5) tais que o sistema (6) não possui solução em vizinhança alguma da origem.*

2. Se a condição (P') for verificada em todo ponto de uma vizinhança da origem então o sistema (6) possui solução de classe C^∞ *numa vizinhança da origem, quaisquer que sejam* $f_1,\ldots,f_n$ *verificando as condições de compatibilidade (5).*

Observe que quando $n = 1$ as condições de compatibilidade **(5)** inexistem e o Teorema 3 é, neste caso, consequência da Proposiçao 3 e dos resultados discutidos anteriormente.

Consideremos, a seguir, o **sistema divergente associado a** $L_1,\ldots,L_n$. A condição de resolubilidade para o problema correspondente também é descrita em termos da geometria dos conjuntos $Z = constante$.

Teorema 4.

Suponha $n \geq 2$. As duas propiedades seguintes são equivalentes:

1. Dada f, de classe C^∞ numa vizinhança da origem, existem funções $u_1, \ldots, u_n$ de classe C^∞ tais que a equação

$$L_1 u_1 + \ldots + L_n u_n = f$$

está verificada em alguna vizinhança da origem.

2. Existe uma vizinhança U_o da origem tal que, para cada $z \in Z(U_o)$, o conjunto

$$\{(t,x) \in U_o : Z(t,x) = z\}$$

não possui componentes conexas compactas em U_o.

A demostração do Teorema **4** pode ser encontrada em [2] no caso em que φ é analítica real e em [14] no caso geral.

Referências

[1] *Beals, R.* e *Fefferman, C.* On local solvability of linear partial differential equations. Ann. of Math.**97**, 487-498 (1973).

[2] *Cordaro, P.* e *Hounie, J.* On local solvability of underdetermined systems of vector fields. A aparecer em Am. J. Math.

[3] *Ehrenpreis, L.* Solutions of some problems of división I. Am. J. Math **76**, 883-903 (1954).

[4] *Hörmander, L.* The analysis of linear partial differential operators (4 volumes). Springer-Verlag, 1983.

[5] *Hörmander, L.* On the theory of general partial differential operators. Acta Math, **94**, 161-248 (1955).

[6] *Hörmander, L.* Propagation of singularities and semiglobal existence theorems for (pseudo-)differential operators of principal type. Ann. of Math. **108**, 569 - 609 (1978).

[7] *Lewy, H.* An example of a smooth linear partial differential equation without solution. Ann. of Math. **66**, 155-158 (1957).

[8] *Malgrange, B.* Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convulution. Ann. Inst. Fourier Grenoble **6** 271-355 (1955-56).

[9] *Nirenberg, L.* e *Treves, R.* Solvability of a first order linear partial differential equation. Comm. Pure Appl. Math. **16**, 331-351 (1963).

[10] *Nirenberg, L.* e *Treves, F.* On local solvability of linear partial differential equations. I.Necessary conditions. II. Sufficient conditions. Corretion.Comm.Pure Appl. Math.**23**, 1-38 e 459-509(1970); **24**, 279-288(1971).

[11] *Treves, F.* On the local solvability of linear partial differential equations in two independent variables. Amer. J. Math.**92**, 174-204(1970).

[12] *Treves, F.* Integral representation of solutions of first-order linear differential equations. Ann. Scuola. Norm. Pisa **3**, 1-35 (1976).

[13] *Treves, F.* On the local integrabilty and local solvability of systems of vector fields. Acta Math. **151**, 1-48 (1983).

[14] *Treves, F.* On the local solvability for top degree forms in hypo-analytic structures. A aparecer.

Agosto 9, 1989