Pro Mathematica: Vol. IV, Nos. 7-8, 1990

CASOS PARTICULARES DE LA DESIGUALDAD DE JOHN-NIRENBERG PARA ESPACIOS BMO$_\varphi$

ALEJANDRO ORTIZ FERNANDEZ*

En esta nota se dan los detalles de casos particulares de una extensión de la desigualdad de John- Nirenberg,

$$|\{x \in Q \; / \; |f(x) - f_Q| > \lambda\}| \leq c \; \Psi^{-1}_{|Q|} \left(\frac{\lambda}{\|f\|_{*,\varphi}} \right) ,$$

donde $f \in BMO_\varphi$,

$$\Psi_\alpha(t) = \int_t^{2^n\alpha} \frac{\varphi(y)}{y} \, dy \; , \quad o < \alpha < 1 ,$$

siendo φ *una función contínua, no-decreciente, de valor real, con* $\varphi(0)=0$.

Tal extensión nos fue comunicada por el Profesor A. Torchinsky, [6], a quien agradecemos.

---

* Profesor Asociado de la PUCP.

1. Introducción.

El espacio de las funciones de oscilación media acotada, *BMO*, fue introducido por F.John - L.Nirenberg en 1961, [3], donde

$$BMO = \{f \in L^1(Q_o) / \|f\|_* = \sup_{Q \subset Q_o} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q| dx < \infty\}$$

siendo Q_o un cubo fijo en $\mathbb{R}^n$, de medida de Lebesgue $|Q_o|$ finita, cuyos lados (así como los de los cubos Q) son paralelos a los ejes coordenados; f_Q es el promedio $\frac{1}{|Q|} \int_Q f(x)dx$. Con la norma $\|f\|_* + \|f\|_{L^1(Q_o)}$, *BMO* es un espacio de Banach.

Obsérvese que $L^\infty \subset BMO$ siendo la inclusión propia ya que $\log |x| \in BMO$. El espacio *BMO* está relacionado a otras ramas del análisis (funciones analíticas, ecuaciones en derivadas parciales, martingalas, análisis armónico,...). La desigualdad de John-Nirenberg es como sigue.

Sea $\lambda > o$ un número real y sea el conjunto $E_\lambda = \{x \in Q \ / \ |f(x) - f_Q| > \lambda\}$. Si $\omega(\lambda) \equiv |E_\lambda| \leq A\ e^{-b\lambda}|Q|$, con A y b apropiadas constantes, entonces $f \in BMO$.

[en efecto, $\displaystyle\int_Q |f(x) - f_Q| dx = \int_o^\infty \omega(\lambda) d\lambda \leq$

$$A \int_o^\infty e^{-b\lambda} d\lambda \ . |Q| = \frac{A}{b}\ |Q|].$$

El recíproco es la parte crucial: si $f \in BMO$, entonces existen constantes A y b tal que

$$\omega(\lambda) \leq A\ e^{-b\lambda \|f\|_*^{-1}} . |Q| \qquad [+]$$

La prueba original de John-Nirenberg es un tanto técnica; ella fue mejorada por A.P. Calderón, según aparece en Neri [4], en donde se hace uso de la descomposición de Calderón-Zygmund.

Como en la prueba de la extensión de la desigualdad de John-Nirenberg se usará la idea de tal descomposición, veamos algunos detalles de la misma.

Descomposición de Calderón-Zygmund.

Sea f una función integrable, definida en un cubo Q_o y sea $\lambda > o$ un real tal que

$$\frac{1}{|Q_o|}\int_{Q_o}|f(x)|dx \leq \lambda \ .$$

Entonces existe una familia enumerable $\{Q_k\}$, de cubos abiertos, disjuntos en Q_o, tal que

(a) $|f(x)| \leq \lambda$ *a.e.* si $x \in Q_o - \bigcup_k Q_k$;

(b) $\lambda < \dfrac{1}{|Q_k|}\displaystyle\int_{Q_k}|f(x)|dx \leq 2^n\lambda$;

(c) $\displaystyle\sum_k |Q_k| < \frac{1}{\lambda}\int_{Q_o}|f(x)|dx$.

Prueba.

Dividamos Q_o en 2^n cubos abiertos congruentes (dividiendo por 2 sus lados). Con estos subcubos se presentan dos casos.

$$\text{(I)} \quad \frac{1}{|Q'_i|}\int_{Q'_i}|f(x)|dx > \lambda \quad ;$$

$$\text{(II)} \quad \frac{1}{|Q''_i|}\int_{Q''_i} |f(x)|dx \le \lambda \ .$$

Conservemos los cubos Q'_i que satisfacen (I) (que es parte de la conclusión (b)), mientras que los cubos Q''_i, que satisfacen (II), son sometidos al anterior proceso, esto es, son divididos en 2^n nuevos subcubos congruentes, dando origen a una nueva generación de cubos en donde nuevamente tenemos

$$\text{(I)} \quad \frac{1}{|Q'_{i\,i}|}\int_{Q'_{i\,i}} |f(x)|dx > \lambda \ ;$$

$$\text{(II)} \quad \frac{1}{|Q''_{i\,i}|}\int_{Q''_{i\,i}} |f(x)|dx \le \lambda \ .$$

Retenemos los cubos $Q'_{i\,i}$, mientras los $Q''_{i\,i}$ son sometidos a tal proceso. Y así sucesivamente ... Renumerando obtenemos familias de cubos abiertos, disjuntos, de distintas generaciones $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k \ldots$ tal que

$$\lambda|Q_k| < \int_{Q_k} |f(x)|dx \le 2^n \lambda|Q_k| \ ,$$

que implica (b).

Por otro lado, $|Q_k| < \frac{1}{\lambda} \int_{Q_k} |f(x)|dx$,

de donde $\sum_k |Q_k| < \frac{1}{\lambda} \int_{Q_o} |f(x)|dx$, que es (c).

Finalmente, sea $x \in Q_o - \bigcup_k Q_k$, esto es, x pertenece a algún cubo del tipo Q''_k, donde (por construcción) $|Q''_k| \longrightarrow 0$ cuando $k \longrightarrow \infty$. Como $\frac{1}{|Q''_k|} \int_{Q''_k} |f(y)|dy \leq \lambda$, por el teorema de diferenciación de Lebesgue tenemos

$$|f(x)| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|Q''_k|} \int_{Q''_k} |f(y)|dy \leq \lambda \qquad a.e.$$

■

2. Espacios BMO_φ .

El espacio BMO fue extendido por S. Spanne [5], 1965, vía el espacio BMO_φ, donde $\varphi(t)$ es una función positiva, no - decreciente, definida sobre (o,∞). Así,

$$BMO_\varphi = \left\{ f \in L^1(Q_o) \;/\; \|f\|_{*,\varphi} = \right.$$

$$\left. \sup_{Q \subset Q_o} \frac{1}{\varphi(r)} \frac{1}{|\varphi|} \int_Q |f(x) - f_Q| dx < \infty \right\}$$

donde r es la longitud del lado del cubo Q. Con la respectiva norma, BMO_φ es un espacio Banach. Formas particulares de φ hacen coincidir (isomórficamente) BMO_φ con algunos clásicos espacios de funciones. Así,

-. Si $\varphi(t) = 1$, entonces $BMO_\varphi = BMO$;

-. Si $\varphi(t) = t^\alpha$, $o < \alpha < 1$, entonces $BMO_\varphi = \Lambda_\alpha$, donde (espacio de Lpischitz)

$$\Lambda_\alpha = \left\{ f \in L^\infty / \|f\|_{\Lambda_\alpha} = \sup_{x,y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty \right\}$$

Si $-1 < \alpha < o$, entonces se tiene $BMO_\varphi = L^{p,\lambda}$, con $\alpha = -\frac{\lambda}{p}$, siendo (espacio de Morrey)

$$L^{p,\lambda} = \left\{ f \in L^1(Q_o) / \|f\|_{L^{p,\lambda}} = \right.$$

$$\left. = \sup_{Q} \left\{ \frac{1}{r^\lambda} \int_Q |f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p} < \infty \right\} .$$

Algunos resultados de Spanne son:

(i) Si $\frac{\varphi(t)}{t}$ es casi-decreciente (esto es, si $t' \le t$, existe una constante A tal que $\frac{\varphi(t)}{t} \le A \frac{\varphi(t')}{t'}$), entonces

$$f(x) = \int_{|x_1|}^{r} \frac{\varphi(t)}{t} \, dt \in BMO_\varphi ,$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n).$$

(ii) Si $\frac{\varphi_1(t)}{t}$ es no-creciente, entonces $BMO_{\varphi_1} \subset BMO_{\varphi_2}$ si y solo sí existen constantes c, δ tal que $\varphi_1(r) \le c\, \varphi_2(r)$, $o < r < \delta$. La inclusión es continua.

(iii) Si $\int_o^\delta \frac{\varphi(t)}{t} \, dt < \infty$, para algún $\delta > o$, entonces toda $f \in BMO_\varphi$ es una función contínua, y su módulo de continuidad

$\omega(f,r) = \sup\limits_{|x-y|\le r} |f(x) - f(y)|$ satisface

$$\omega(f,r) \le c \int_0^r \frac{\varphi(t)}{t}\, dt \,.\|f\|_{*,\varphi} \,.$$

(iv) Si $\frac{\varphi(t)}{t}$ es casi decreciente y

$\int_0^\delta \frac{\varphi(t)}{t}\, dt = +\infty$, entonces en BMO_φ

existen funciones ni acotadas, ni continuas.

En particular, de lo anterior se deduce que

-. Si $\varphi(t) = 1$, entonces $\frac{1}{t}$ es casi-decreciente y $\int_0^\delta \frac{dt}{t} = +\infty$. Luego $BMO_\varphi = BMO$ contiene a la función no acotada $f(x) = \log|x|$.

-. Si $\varphi(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, entonces

$\int_0^r \frac{\varphi(t)}{t}\, dt = \frac{r^\alpha}{\alpha} < \infty$. Así, $\omega(f,r) \le$

$c \, \frac{r^\alpha}{\alpha} \|f\|_{*,\varphi} \le c \; r\|f\|_{*,\varphi}$. Luego, si r

es pequeño, $\omega(f,r)$ es pequeño y f es una función contínua. Mas concretamente $BMO_{t^\alpha} = \Lambda_\alpha$, lo que constituye el teorema de Meyers-Campanato. Mas generalmente, consideremos el espacio de Lipschitz

$$\Lambda_\varphi = \left\{ f / \|f\|_{\Lambda_\varphi} = \sup_{x,y \in \mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|}{\varphi(|x-y|)} < \infty \right\}.$$

Se tiene $\Lambda_\varphi \subset BMO_\varphi$, con inclusión contínua

$$\Big[\text{si } f \in \Lambda_\alpha , \ \frac{1}{\varphi(r)} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q| \, dx \le$$

$$\le \frac{1}{\varphi(r)} \frac{1}{|Q|} \int_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f(y)| dy \, dx \le$$

$$\le \sup_{x,y \in Q} \frac{|f(x)-f(y)|}{\varphi(|x-y|)} < \infty \Big] .$$

En 1971, Ch. Fefferman [1] establece que el espacio BMO se identifica con el espacio dual del espacio de Hardy H^1, donde $H^1 = \{ f \in L^1 \ / \ R_j f \in L^1, \ j = 1,\dots,n \}$ siendo $R_j f$ la transformada de Riesz de f, definida por $[R_j f]\hat{}\,(x) = \frac{x_j}{|x|}\hat{f}(x)$, con $\hat{f}$ la transformada de Fourier de f. Fefferman prueba que tal identificación es equivalente a la caracterización: $f \in BMO$ si y sólo si $f = f_o + \sum_{j=1}^{n} R_j f_j$, con $f_j \in L^\infty$, $j = o,1,\ldots n$. En esta dirección Janson [2], 1976, obtiene una caracterización semejante para BMO_φ imponiendo a φ la (extra) condición de crecimiento

$$\int_r^\infty \frac{\varphi(t)}{t}\,\frac{dt}{t} \leq c\,\frac{\varphi(r)}{r} \qquad (*)\ .$$

Se observa que se tiene $\int_r^\infty \frac{\varphi(t)}{t}\,\frac{dt}{t} \geq \frac{\varphi(r)}{r}$ y que la condición (*) implica que la función (positiva, no-decreciente y contínua) $\Theta(r) = r\int_r^\infty \frac{\varphi(t)}{t}\,\frac{dt}{t}$ define (por la anterior caracterización (ii)) al mismo espacio BMO_φ . Esto nos permite asumir que, bajo la condición (*), $f \in BMO_\varphi$ es una función contínua. Bajo estas consideraciones, Janson prueba que

$f \in BMO_{\varphi}$ si y sólo si $f = f_o + \sum_{j=1}^{n} R_j f_j$, con $f_j \in \Lambda_{\varphi}$, $j = o, 1, \ldots, n$.

Espacios $L^{p,\Phi}$.

Sea Φ una función positiva, no-decreciente mos (por conveniencia en las aplicaciones) la condición $\Phi(2t) \leq c\, \Phi(t)$.

Sea $1 \leq p \leq \infty$ y r la longitud del lado del cubo Q,

$$L^{p,\Phi} = \left\{ f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \;/\; \|f\|_{*,\Phi} = \left(\sup_Q \frac{1}{\Phi(r)} \int_Q |f(x) - f_Q|^p dx\right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

Identificando las funciones que difieren en una constante, se obtiene la respectiva norma, con la cual $L^{p,\Phi}$ es un espacio de Banach. Observemos que si $\Phi(t) = r^n \varphi(t)$, donde φ es una función positiva, no-decreciente sobre (o,∞), entonces $L^{1,\Phi} = BMO_{\varphi}$.

3. Desigualdad de John-Nirenberg para BMO_φ (Torchinsky [6]).

En esta ocasión consideramos $\varphi(t)$, una función contínua, no-decreciente, de valor real tal que $\varphi(o) = o$. Entonces, $f \in BMO_\varphi$ si $f \in L^1(Q_o)$ y

$$\|f\|_{*,\varphi} = \sup_{Q\subset Q_o} \frac{1}{\varphi(|Q|)} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)-f_Q|\,dx < \infty .$$

El objetivo es extender a BMO_φ la desigualdad de John-Nirenberg [+] de la sección 1. Bien, sea la función

$$\Psi(t) = \int_t^{2^n} \frac{\varphi(y)}{y}\,dy .$$

Se tiene la

Proposición 1. Sea $f\in BMO_\varphi$. Si $\lim_{t\to o^+} \Psi(t)<\infty$, entonces

$$\sup_{x\in Q} ess. |f(x)-f_Q| \le c\left(\int_o^{2^n|Q|} \frac{\varphi(y)}{y}\,dy\right) \|f\|_{*,\varphi}.$$

Prueba.

Fijemos $x \in Q \subseteq Q_o$. Asumamos que x sea un punto de Lebesgue de f, esto es, tal que

$$\lim_{Q \to x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)-f(x)dy = o \ .$$

Como $f \in L^1_{loc}$ y casi todo punto de $\mathbb{R}^n$ es un punto de Lebesgue de f, es suficiente asumir tal condición para x . Llamando $Q_1 = Q$, Q_2 es uno de los 2^n subcubos congruentes en que es dividido Q_1 . Este proceso es continuado sucesivamente, y de esta manera se obtiene una sucesión de subcubos (diádicos) $\{Q_j\}$, que converge a x. Además, por el teorema de diferenciación de Lebesgue,

$$\lim_{j \to \infty} f_{Q_j} = f(x) \ a.e.$$

Pero,

$$|f_{Q_{j-1}} - f_{Q_j}| \leq \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |f(x) - f_{Q_{j-1}}| dx$$

$$\leq \text{(desde que } |Q_{j-1}| = 2^n |Q_j|)$$

$$\leq 2^n \varphi(|Q_{j-1}|)\|f\|_{*,\varphi} \ .$$

Entonces,

$$|f(x)-f_Q| \leq |f_{Q_2}-f_{Q_1}| + |f_{Q_3}-f_{Q_2}| + \ldots +$$

$$+ \lim_{j\to\infty} |f(x)-f_{Q_j}| =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} |f_{Q_{j+1}}-f_{Q_j}| \leq 2^n\left(\sum_{j=1}^{\infty} \varphi(|Q_j|)\right)\|f\|_{*,\varphi}$$

(considerando que $|Q| = 2^{(j-1)n}|Q_j|$) =

$$= 2^n\left(\sum_{j=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{|Q|}{2^{(j-1)n}}\right)\right)\|f\|_{*,\varphi} \ .$$

Ahora probemos la desigualdad

$$\varphi\left(\frac{|Q|}{2^{kn}}\right) \leq \frac{1}{n \ \log 2} \int_{\frac{|Q|}{2^{kn}}}^{\frac{|Q|}{2^{(k-1)n}}} \frac{\varphi(y)}{y} \, dy \ , \qquad k \geq 1. \ [*]$$

En efecto,

$$\int_{\frac{|Q|}{2^{kn}}}^{\frac{|Q|}{2^{(k-1)n}}} \frac{\varphi(y)}{y}\, dy \geq \varphi\left(\frac{|Q|}{2^{kn}}\right) \int_{\frac{|Q|}{2^{kn}}}^{\frac{|Q|}{2^{(k-1)n}}} \frac{dy}{y} = \varphi\left(\frac{|Q|}{2^{kn}}\right) \log\left(\frac{1}{2^{-n}}\right)$$

$$= n \log 2\ \varphi\left(\frac{|Q|}{2^{kn}}\right) ,$$

que implica [*].

Luego,

$$|f(x)-f_Q| \leq 2^n \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n \log 2} \int_{\frac{|Q|}{2^{kn}}}^{\frac{|Q|}{2^{(k-1)n}}} \frac{\varphi(y)}{y}\, dy\right) .$$

$. \|f\|_{*\varphi} \leq$ (desde que la suma es por bloques)

$$\leq 2^n \left(\frac{1}{n \log 2} \int_0^{2^n|Q|} \frac{\varphi(y)}{y}\, dy\right) \|f\|_{*\varphi},$$

donde observamos que $\frac{1}{2^{(j-2)n}} \leq 2^n$ es equivalente a $2^{2n} \leq 2^{n(j+1)}$. Así se tiene la tesis con $c = \frac{2^n}{n \log 2}$. ■

Caso. $\lim_{t \to o^+} \Psi(t) = +\infty$.

Si esto es el caso, se sabe que

$$\Psi(|x|) = \int_{|x|}^{2^n} \frac{\varphi(y)}{y}\, dy \in BMO_\varphi$$

(ver sección 2). Sea ahora la función

$$\Psi_\alpha(t) = \int_t^{2^n\alpha} \frac{\varphi(y)}{y}\, dy \ , \ o < \alpha < 1 \ .$$

Entonces se tiene el

Teorema. Si $\lim_{t \to o^+} \Psi(t) = +\infty$, entonces existe una constante c tal que para $f \in BMO_\varphi$ y todo $Q \subseteq Q_o$ se tiene

$$\omega(\lambda) \equiv |\{x \in Q / |f(x) - f_Q| > \lambda\}| \leq c\Psi^{-1}_{|Q|}\left(\frac{\lambda}{\|f\|_{*,\varphi}}\right).$$

Prueba.

La idea de usar la descomposición de Calderón-Zygmund. Asumamos $f_Q = o$ y $\|f\|_{*,\varphi} = 1$ (pues hacemos el cambio f por

$\frac{f-f_Q}{\|f\|_{*,\varphi}}$, de ser necesario). Asi la tesis es $|\{x \in Q \;/\; |f(x)| > \lambda\}| \leq c_1\, \Psi^{-1}_{|Q|}(c_2\lambda)$.

Al usar tal descomposición obtenemos sucecivas generaciones de sub cubos de Q en la forma siguiente. La primera generación de cubos es obtenida al nivel

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|dx \leq \varphi(|Q|) \leq 2^n\, \varphi(|Q|),$$

obteniéndose cubos abiertos disjuntos $Q_j^{(1)}$ tales que

(a) $|f(x)| \leq 2^n\, \varphi(|Q|)$ *a.e.* sobre $Q-\bigcup_j Q_j^{(1)}$;

(b) $2^n\varphi(|Q|) \leq \frac{1}{|Q_j^{(1)}|}\int_{Q_j^{(1)}} |f(x)|dx \leq 4^n\varphi(|Q|)$

(c) $\sum_j |Q_j^{(1)}| \leq \frac{1}{2^n\varphi(|Q|)} \sum_j \int_{Q_j^{(1)}} |f(x)|dx \leq$

$$\leq \frac{|Q|}{2^n \varphi(|Q|)|Q|} \int_Q |f(x)|dx$$

$$\leq \frac{1}{2^n} |Q| \; .$$

Ahora, en la segunda etapa, aplicamos la descomposición de Calderón-Zygmund a cada función $(f(x)-f_{Q_j^{(1)}})\, \chi_{Q_j^{(1)}}(x)$, y obtenemos una segunda generación de subcubos. Asi, fijemos $Q_j^{(1)}$ y pongamos $Q^{(1)} \equiv Q_j^{(1)}$. Entonces, desde que

$$\frac{1}{|Q^{(1)}|} \int_{Q^{(1)}} |f(x)-f_{Q^{(1)}}| \leq \varphi(|Q^{(1)}|)$$

$$< 2^n \varphi(|Q^{(1)}|),$$

obtenemos los subcubos $Q_j^{(2)}$ de $Q^{(1)}$, abiertos y disjuntos, tales que

(a)' $|f(x)-f_{Q^{(1)}}| \leq 2^n \varphi(|Q^{(1)}|)$ *a.e.* sobre

$Q^{(1)} - \bigcup_j Q_j^{(2)}$

(b)' $2^n\varphi(|Q^{(1)}|) \leq \dfrac{1}{|Q_j^{(2)}|}\displaystyle\int_{Q_j^{(2)}} |f(x)-f_{Q^{(1)}}|dx$

$$\leq 4^n\varphi(|Q^{(1)}|)$$

(c)' $\displaystyle\sum_j |Q_j^{(2)}| \leq \frac{1}{2^n\varphi(|Q^{(1)}|)}\sum_j\int_{Q_j^{(2)}} |f(x)-f_{Q^{(1)}}|dx$

$$\leq \frac{1}{2^n\varphi(|Q^{(1)}|)}\int_{Q^{(1)}} |f(x)-f_{Q^{(1)}}|dx$$

$$\leq \frac{|Q^{(1)}|}{2^n} \quad .$$

Desde que $|Q^{(1)}| \leq \dfrac{|Q|}{2^n}$ **, de (a)' y (b) obtenemos**

$$|f(x)| \leq |f(x)-f_{Q^{(1)}}| + \frac{1}{|Q^{(1)}|}\int_{Q^{(1)}} |f(x)|dx$$

$$\leq 4^n\varphi\left(\frac{|Q|}{2^n}\right) + 4^n\varphi(|Q|) \quad ,$$

esto es,

$$|f(x)| \leq 4^n\left(\varphi\left(\frac{|Q|}{2^n}\right) + \varphi(|Q|)\right) \quad . \qquad [+]'$$

Ahora, de (b)′ y (c), sumando sobre todos los cubos de la primera generación $Q^{(1)}$, obtenemos

$$\sum_j |Q_j^{(2)}| \le \frac{1}{2^n} \sum_j |Q_j^{(1)}| \le \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 |Q|. \qquad [++]'$$

Y asi podemos continuar... Asumiendo que tenemos seleccionado una $(k-1)$-geración de cubos $Q^{(k-1)}$, por el método usado antes, se selecciona una (k)-generación de Calderón-Zygmund cubos, tal que para cada cubo $Q^{(k-1)}$ se tiene (inductivamente)

$$[+] \qquad |f(x) \le 4^n \sum_{j=o}^{k-1} \varphi\left(\frac{|Q|}{2^n j}\right) \quad a.e. \text{ sobre}$$

$$Q^{(k-1)} - \cup_j Q_j^{(k)}$$

$$[++] \quad \sum_j |Q_j^{(k)}| \le \left(\frac{1}{2^n}\right)^k |Q| \; .$$

Ahora hagamos el siguiente argumento.

Caso $\lambda > 2^n\, \varphi(|Q|)$. Sea k el más grande entero tal que

$$4^n \sum_{j=o}^{k-1} \varphi\left(\frac{|Q|}{2^{nj}}\right) < \lambda .$$ Entonces se tiene

$$\{x \in Q \,/\, |f(x)| > \lambda\} \subseteq \{x \in Q \,/\, 4^n \sum_{j=o}^{k-1} \varphi\left(\frac{|Q|}{2^{nj}}\right)$$

$$< |f(x)|\} \subset \bigcup_j Q_j^{(k)} \quad , \text{ por [+]}$$

Luego,

$$|\{x \in Q \,/\, |f(x)| > \lambda\}| \leq \sum_j |Q_j(x)|$$

$$\leq \left(\frac{1}{2^n}\right)^k |Q|. \qquad [**]$$

Ahora, por construcción de k,

$$\lambda \leq 4^n \sum_{j=o}^{k} \varphi\left(\frac{|Q|}{2^{jn}}\right) \leq (\text{por } [*]) \leq \frac{4^n}{n \log 2} \sum_{j=o}^{k}$$

$$\int_{\frac{|Q|}{2^{jn}}}^{\frac{|Q|}{2^{(j-1)n}}} \frac{\varphi(y)}{y}\, dy \le \frac{4^n}{n \log 2} \int_{\frac{|Q|}{2^{kn}}}^{2^n |Q|} \frac{\varphi(y)}{y}\, dy =$$

$$C\ \Psi_{|Q|}\left(\frac{|Q|}{2^{kn}}\right) .$$

Luego, usando {**],

$$|\{x \in Q \ / |f(x)| > \lambda\}| \le \frac{|Q|}{2^{kn}} \le \Psi^{-1}_{|Q|}(c_2\lambda),$$

que es la tesis para este caso.

Caso $\lambda \le 2^n\varphi(|Q|)$. Por hipótesis, si $\lambda \to o^+$ entonces $\Psi^{-1}_{|Q|}(\lambda) \to \infty$, luego existe una constante c_1 tal que $|Q| \le c_1\Psi^{-1}_{|Q|}(\lambda)$, $\lambda \le 2^n\varphi(|Q|)$. Por lo tanto, $|\{x \in Q \ / \ |f(x)| > \lambda\}| \le |Q| \le c_1\Psi^{-1}_{|Q|}(\lambda)$. ■

4. Casos particulares.

PROPOSICION 2. Sea $\varphi(t) = \eta(log(\frac{1}{t}))$ y $\Phi'(t) = \eta(t)$, donde Φ es una función contínua (derivable), no-decreciente, con $\Phi(o) = o$.

Si
$$\Psi_{|Q|}(t) = \int_t^{2^n|Q|} \eta(log(\tfrac{1}{y}))\ \frac{dy}{y}\ ,$$

entonces tenemos

$$\Psi^{-1}_{|Q|}(t) \le C_1 e^{(-1/2)\Phi^{-1}(t)}|Q|.$$

Prueba. Tenemos

$$\Psi_{|Q|}(t) = \int_{\frac{1}{t}}^{\frac{1}{2^n|Q|}} \eta(log\ s)(-\ \frac{ds}{s}) = \int_{\frac{1}{2^n|Q|}}^{\frac{1}{t}} \eta(log\ y)\ \frac{dy}{y}$$

$$= \int_{\frac{1}{2^n|Q|}}^{\frac{1}{t}} \eta(log\ y)d(log\ y) = \Phi(log(\tfrac{1}{t})) - $$

$$-\Phi(log(\frac{1}{2^n|Q|}));$$

esto es,

$$\Psi_{|Q|}(t) + \Phi\left(log\left(\frac{1}{2^n|Q|}\right)\right) = \Phi(log(\tfrac{1}{t})).$$

Llamemos $\Psi_{|Q|}(t) = t^*$; así, $t = \Psi^{-1}_{|Q|}(t^*)$.

Luego $t^* + \Phi\left(log\left(\frac{1}{2^n|Q|}\right)\right) = \Phi\left(log\left(\frac{1}{\Psi^{-1}_{|Q|}(t^*)}\right)\right)$,

o aun, reescribiendo, $\Phi\left(log\left(\frac{1}{\Psi^{-1}_{|Q|}(t)}\right)\right) =$

$= t + \Phi\left(log\left(\frac{1}{2^n|Q|}\right)\right)$, de donde

$$log\left(\frac{1}{\Psi^{-1}_{|Q|}(t)}\right) = \Phi^{-1}\left(t + \Phi\left(log\left(\frac{1}{2^n|Q|}\right)\right)\right),$$

o aún $\Psi^{-1}_{|Q|}(t) = e^{(t+\Phi(log(\frac{1}{2^n|Q|})))}$. Pero, desde que Φ^{-1} es creciente, en general, si $a,b > o$ se tiene $\Phi^{-1}(a+b) \geq \frac{\Phi^{-1}(a)+\Phi^{-1}(b)}{2}$.

Luego,

$$\Phi^{-1}_{|Q|}(t) \leq e^{\frac{\Phi^{-1}(t)+log(\frac{1}{2^n|Q|})}{2}} = e^{\frac{1}{2}\Phi^{-1}(t)} \, .$$

$$. \; e^{\frac{1}{2} log(\frac{1}{2^n|Q|})} \, .$$

Considerando que

$$e^{\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2^n|Q|}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2^n|Q|}\right)^{1/2}} = 2^{n/2}|Q|^{1/2} \leq$$

$$\leq c_1|Q| \;,$$

tenemos la tesis.

■

Corolario 1. Sea $\eta(y) = 1$ y $\varphi(t) = 1$. Como Φ es tal que $\Phi'(t) = 1$, $\Phi(t) = t$, esto es, $\Phi^{-1}(t) = t$. Luego,

$$\Psi^{-1}_{|Q|}(t) \leq c_1 e^{-(1/2)\Phi^{-1}(t)}|Q| = c_1 e^{-(1/2)t}|Q|,$$

y por teorema tenemos

$$|\{x \in Q \;/\; |f(x)-f_Q| > \lambda\}| \leq c_1 \Psi^{-1}_{|Q|}\left(\frac{\lambda}{\|f\|_{*,\varphi}}\right) \leq$$

$$\leq c_1\, e^{-(1/2)\lambda\|f\|^{-1}_{*,\varphi}}|Q| \;,$$

que es la desigualdad de John-Nirenberg para BMO .

Corolario 2. Asumamos $\eta(y) = y^{-\varepsilon}$, $o < \varepsilon < 1$; $\varphi(t) = (log(1/t))^{-\varepsilon} = \dfrac{1}{(-log\ t)^{\varepsilon}}$.

Entonces $\Phi'(t) = t^{-\varepsilon}$, $\Phi(t) = \dfrac{t^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon}$,

$$\Phi^{-1}\left(\frac{t^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon}\right) = t \ . \quad \text{Si} \quad \frac{t^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon} = s \ ,$$

$$t = (s(1-\varepsilon))^{1/1-\varepsilon} \ .$$

Entonces,

$$\Phi^{-1}(s) = (s(1-\varepsilon))^{1/1-\varepsilon} = c\ s^{1/1-\varepsilon} \ .$$

Luego,

$$\Psi^{-1}_{|Q|}(t) \le c_2\ e^{-(1/2)t^{1/1-\varepsilon}} .|Q| \ ,$$

y por tanto se tiene la respectiva desigualdad de John-Nirenberg,

$$\omega(\lambda) \le c\ e^{-(1/2)(\lambda \|f\|^{-1}_{*,\varphi})^{1/1-\varepsilon}} |Q| \ .$$

Corolario 3. (Stegenga). Sea $\eta(y) = \frac{1}{y}$ y $\varphi(t) = \frac{1}{\log(\frac{1}{t})} = -(\log t)^{-1}$. Asi $\Phi'(t) = -t^{-1}$ ó $\Phi(t) = \log(c\,\frac{1}{t})$. Entonces $\Phi^{-1}(t) = c\,e^{-t}$ y se tiene la correspondiente desigualdad de John - Nirenberg .

Referencias.

[1] *Fefferman, Ch.-Stein,E.M.:* "H^p spaces of several variables". Acta Math. (1972), 137-193.

[2] *Janson, S.:* "On functions with conditions on the mean oscillation". Arkiv. for Math (1976), 189-196.

[3] *John, F.-Nirenberg, L.:* "On functions of bounded mean oscillation". Comm.P.Appl.Math.(1961), 415-426.

[4] *Neri, U.* : "Some properties of functions with bounded mean oscillation". Studia Math.(1976), 63-75.

[5] *Spanne, S.*: "Some function spaces defined using the mean oscillation over cubes". Ann.Sup.Pisa.(1965), 593-608.

[6] *Torchinsky, A.* : Comunicación personal. Bloomington. (1984).